# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Professor zu Greifswald.

Einunddreissigster Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

---

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1858.

1871, July 1.
Haven Fund.

# Inhaltsverzeichniss des einunddreissigsten Theils.

## Arithmetik.

## Geometrie.

## Trigonometrie.



## Geodäsie.



(S. Arithmetik Nr. XXX.)

## Uebungsaufgaben für Schüler.



## Literarische Berichte *).



*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

# I.

## Einige Beobachtungen und Bemerkungen über Personaldifferenz.

Von

Herrn Doctor *Julius Hartmann*,

Lehrer am Gymnasium zu Rinteln.

---

Wenn zwei Beobachter plötzliche Phänomene — z. B. Lichtblitze (Pulver- oder Heliotrop-Signale) oder Sterndurchgänge u. dgl. — an einer und derselben Secundenuhr und überhaupt unter sonst gleichen Umständen beobachten, so zeigt sich bei Vergleichung der Zeitangabe, zu welcher Jeder das Phänomen gesehen haben will, eine Verschiedenheit, die von der Individualität des Beobachters abhängt und die man Personaldifferenz zu nennen vorgeschlagen. Sie kann, natürlich abgesehen von zufälligen grösseren Irrthümern, für einzelne Beobachtungen mehr als eine halbe Secunde betragen, im Mittel aus einer Reihe Beobachtungen aber leicht bis zu mehreren Zehntelsecunden sich belaufen.

Fragt man nach den möglichen Ursachen dieser Erscheinung, so bieten sich zunächst im Allgemeinen folgende dar:

1) Unsicherheit der Beobachtungen. Die plötzlichen Phänomene überraschen den Beobachter, auch wenn er sie mit Aufmerksamkeit erwartet, immer mehr oder weniger. Die freie Eintheilung der Secunde in kleinere Zeitintervalle und Abschätzung der vor und nach dem Erscheinen des Phänomens vergangenen Secundentheile aus der Erinnerung erfordert grosse Ruhe und Aufmerksamkeit. Eine gewisse Unsicherheit wird selbst bei grosser Uebung nicht ganz verschwinden. — Die aus dieser Quelle stammenden Differenzen werden durch Vermehrung der Beobachtun-

gen bekanntlich mehr und mehr ausgeglichen, um ein etwaiges constanteres Element mehr und mehr hervortreten zu lassen.

2) Verschiedene Gewöhnung in der Schätzung, wobei natürlich wenigstens die eines Beobachters unrichtig ist. Freilich könnte auch jeder Beobachter nach seiner Weise genau beobachten, der eine aber den Anfang, der andere das Ende oder die Mitte der scheinbaren Dauer des Licht- oder Schalleindrucks fixiren. — Eine solche verschiedene Gewöhnung würde durch grössere Uebung immer fester und dann mit eine Quelle einer constanten Personaldifferenz werden.

3) Es könnte aber auch eine Ursache in der verschiedenen Organisation des Auges oder Ohres der Beobachter liegen. Bei dem einen könnten die Zeiten, welche vergehen, bis das gehörte und bis das gesehene Phänomen zum Bewusstsein kommt, von den entsprechenden Intervallen beim andern Beobachter verschieden sein. Auch diese Ursache würde eine Constanz der Personaldifferenz bedingen.

Bei wichtigeren Beobachtungen, zu welchen verschiedene Beobachter beitragen, müssen die Angaben auf einen einzigen reducirt werden; weshalb die Beobachter an einer Reihe ähnlicher Phänomene ihre Personaldifferenz zu ermitteln pflegen. Sind die Beobachtungen an verschiedenen Orten gemacht, so kommen später die Beobachter persönlich zusammen, um sich zu vergleichen. — Es bleibt aber dann die Frage, ob die Personaldifferenz bei dieser späteren Vergleichung unter vielleicht geänderten geistigen und körperlichen Umständen noch dieselbe ist, wie sie während der Beobachtungen selbst stattfand.

Es müssten eigentlich zwischen den wirklichen Beobachtungen auch Personaldifferenz-Bestimmungen gemacht werden.

Dies wäre trotz der Entfernung der Beobachter möglich, wenn jeder Beobachter zwischen seinen Beobachtungen sich gleichsam mit „der Wahrheit" vergliche, d. h. Beobachtungen an einem Instrumente anstellte, welches den eigentlichen Beobachtungen sehr ähnliche Beobachtungen gestattete, und sich — von einem Gehülfen — so stellen liess, dass zu einer bis auf wenigstens einige Hundertelsecunden genau bestimmten Zeit zwischen zwei Uhrschlägen ein plötzliches Phänomen an ihm erscheint.

Ein solches Instrument würde neben dem eben angedeuteten Zwecke — die relative Personaldifferenz (Differenz zwischen zwei Beobachtern) während der Beobachtungen selbst durch Vermittelung der absoluten (Abweichung des Beobachters von den Angaben

des Instruments) zu erforschen, — auch einem angehenden Beobachter nützliche Dienste leisten, indem es ihm bei seinen Uebungen auf einfache Weise auch die Kenntniss seiner Fehler gäbe, was bei andern Beobachtungsweisen, z. B. am Kater'schen Federpendel oder an Lichtblitzen mit einer Lampe, nicht der Fall ist. Ja, es würde ihm auch eine richtige Gewöhnung verschaffen, denn wenn z. B. das Phänomen sehr oft hintereinander zu derselben Zehntelsecunde erscheint, so wird sich der Gesammteindruck der Aufeinanderfolge vom Secundenschlag und Phänomen dem Beobachter so einprägen, dass er ihm gleichsam zur andern Natur wird; kurz es würde gleichsam die Dienste eines aufmerksamen Exercitienmeisters vertreten. Auch der geübte Beobachter würde dadurch auf directe Weise einen Anhaltepunkt erhalten, wie genau er sich etwa an einem bestimmten Tage in seinen Beobachtungen der Wahrheit anzuschliessen pflege. — Anderntheils aber würde es auch leichtern Aufschluss versprechen über einige interessante psychologische Erscheinungen.

Im Folgenden erlaube ich mir, die Beschreibung eines solchen Instruments, wie ich es mir habe anfertigen lassen, und einige damit angestellte Beobachtungen als vorläufige Notizen vorzulegen.

## Beschreibung des Instruments.

Unter, zwischen und über zwei starken Messingplatten *) von etwa 8 Zoll Durchmesser findet sich zunächst eine

### schlagende und zeigende Uhr.

1) Mittels eines Centrifugalpendels wird die vertikale Axe *aa* (Taf. I. Fig. 1.), die Secundenaxe, in gleichmässige Rotation versetzt.

2) Diese Axe trägt bei *ss* eine horizontale Scheibe, die nach einer Windung einer archimedischen Spirale (Taf. I. Fig. 2.) ausgeschnitten ist. Auf deren Rand gleitet der Haken *p* des Arms *rop*, der um eine Axe bei *o* drehbar ist und von einer Feder *f* angedrückt wird, um bei jeder Rotation der Secundenaxe von dieser hinweggehoben zu werden und vom Absatz der Spirale wieder abzugleiten. Bei diesem Abgleiten schlägt, ehe der Haken *p* die der Axe nähern Theile der Spiralscheibe erreicht (um die Zapfenlöcher der Axe nicht zu verderben), der Stift *r* auf das Metall-

*) Taf. I. Fig. 15. Horizontalprojection des Räderwerks zwischen den Platten auf die Unterplatte *UU*. Taf. I. Fig. 16. Horizontalprojection des Räderwerks über der Oberplatte *OO* auf diese.

stück $r'$ und gibt einen Ton, ähnlich dem gewöhnlichen Secundenschlag einer Pendeluhr; so dass also regelmässig Secundenschläge gehört werden.

3) Der Hammerarm $op$ trägt bei $t$ noch einen Ansatz, der im Augenblick des Anschlags von $r$ an $r'$, also der Entstehung des Schalls einen andern Theil (s. Taf. I. Fig. 15.) auslöst.

4) Bei $c$ (Taf. I. Fig. 1.) trägt die Secundenaxe einen Trieb, in welchen ein Zwischenrad $B$ und in dessen Trieb das Minutenrad $M$ eingreift. Die Axe dieses letztern, $mm$, trägt oben einen Zeiger $z$, der über dem Zifferblatte $ZZ$, welches in 60 Theile getheilt ist, die einzelnen Secunden anzeigt. Ein Spiegel $D$ (Taf. I. Fig. 16.), unter 45° gegen den Horizont geneigt, gestattet das Zifferblatt, statt von oben, von der Seite zu betrachten.

5) In den Trieb der Minutenaxe greift ein Rad mit dem Federhaus $F$ (Taf. I. Fig. 15.) und der weitern gewöhnlichen Einrichtung zum Aufziehen.

6) Die Axe des Minutenrades trägt oben noch die Scheibe $S$ (Taf. I. Fig. 1. und Fig. 3.), welche an ihrem Umfange zwei aufsteigende schiefe Ebenen mit Absätzen $\alpha$ und $\alpha'$ hat, auf denen ein federnder Hammer $q$ (Taf. I. Fig. 5.) während einer Minute zweimal gehoben wird und zweimal in Intervallen von 30 Secunden, allemal zwischen zwei Secundenschlägen heruntergleitet, z. B. zwischen dem 59sten und 60sten und zwischen dem 29sten und 30sten Schlage.

7) Ein an der Secundenaxe befestigtes Rad $C$ (Taf. I. Fig. 15.) greift weiter in den Trieb der Sirenenaxe $n$ ein, welche oben eine Scheibe $Q$ (Taf. I. Fig. 16.) mit 100 gleichweit entfernten, nahe am Rande in der Peripherie eines Kreises befindlichen Löchern trägt. Ueber diesen Löchern endigt ein kleines Blaserohr, um bei der Umdrehung der Sirenenscheibe einen Ton entstehen lassen zu können. Die Sirene dient zum Erkennen des gleichmässigen Ganges des Pendels. So lange der Ton noch auf- und niederschwankt ist der Gang noch ungleichmässig.

## Stellsystem.

8) Das Getriebe der Secundenaxe bewegt weiter ein Zwischenrad $V$ (Taf. I. Fig. 15. und Fig. 4.), welches wieder in das Getriebe $g$ der Stellaxe eingreift. Diese Axe dreht sich, da ihr Trieb dem der Secundenaxe gleich ist, also auch in einer Secunde mit gleichmässiger Geschwindigkeit herum. Sie lässt sich von einem unter der Unterplatte befestigten drehbaren Arm $AA$ (Taf. I. Fig. 15. und Fig. 4.), der mit einer schiefen Ebene endigt, auf welcher das

Ende der Stellaxe ruht, senken und heben, so dass ihr Getriebe mit dem Rad *V* in Berührung oder ausser Berührung kommt, sie also an der Bewegung Theil nimmt oder unabhängig davon bleibt. Sie trägt über der Oberplatte eine Scheibe *ll* (Taf. I. Fig. 4.) mit einen Kreis voll dicht an einander stehender, nach oben sich conisch erweiternder Löcher, in welche eine stumpfe Spitze $\sigma$ einfallen kann.

9) Um das über der Löcherscheibe hervorragende Ende der Stellaxe ist ein Rohrstück $\beta$ (Taf. I. Fig. 4.) drehbar, das unten eine leichte Scheibe von Kartenpapier *pp* von circa 3 Zoll Durchmesser trägt. Diese Scheibe ist am Rande (Taf. I. Fig. 13. und Fig. 16.) in 100 Theile eingetheilt und von 5 zu 5 Theilen numerirt. An einem aussen befestigten Zeiger $\xi$ gleitet also von dieser Theilung, wenn die Scheibe mit rotirt, ein Theil in je einer Hundertelsecunde vorüber.

10) Um $\beta$ (Taf. I. Fig. 4.) ist ein weiteres Rohrstück $\gamma$ drehbar, an welchem ein, bei *e* schwach nach oben federnder Arm *eh* festsitzt, welcher die stumpfe Spitze $\sigma$ trägt und nach oben zurückgebogen in das Knöpfchen *h* endigt. Durch Anziehen der Druckschraube $\delta$ kann $\gamma$ mit $\beta$ fest verbunden werden.

11) Die Papierscheibe ist über den Löchern der Scheibe *ll* ausgeschnitten, so dass sie gleichsam aus zwei concentrischen Ringen besteht, die nur durch drei schmale Streifchen mit einander verbunden sind, so dass der Arm *eh* auf jede Nummer gestellt werden und dabei der Stift $\sigma$ zwischen der Papierscheibe hindurch immer auf ein Loch der Löcherscheibe *ll* treffen kann.

12) Bei *o* (Taf. I. Fig. 16.) hat der äussere Papierring eine kleine Oeffnung, welche sich, wenn die Papierscheibe mit ihrem Nullpunkt am Zeiger $\xi$ steht, gerade über einer correspondirenden Oeffnung in der Oberplatte befindet.

13) Unter dieser Oeffnung der Oberplatte ist ein kleines Spiegelchen unter 45° befestigt, welches das Licht einer Lampe *L*, die zur Seite der Uhr gestellt wird, durch diese beiden Oeffnungen nach oben sendet, so dass man von oben eine runde Lichtstelle sieht. Durch einen Spiegel *D'*, unter 45° gegen den Horizont geneigt, erblickt man die Lichtstelle von der Seite. Bei der Rotation der Papierscheibe wird diese das Licht verdecken, bis bei dem jedesmaligen Vorbeigleiten ihres Mittelpunktes vor dem Zeiger $\xi$ ein kaum 0",01 dauernder Lichtblitz erscheint.

14) Stellt man nun die Papierscheibe z. B. so fest, dass der Zeiger $\xi$ auf 35 derselben zeigt, und fängt sie genau mit einem

vollen Secundenschlag an, an der Bewegung Theil zu nehmen, so werden von diesem Secundenschlag an noch 35 Hundertelsecunden verfliessen, bis ihr Nullpunkt an den Zeiger, d. h. ihre Oeffnung über die Lichtstelle kommt, bis also der Lichtblitz erscheint.

15) Um aber zu bewirken, dass die, erst ruhende, Papierscheibe gerade mit einem vollen Secundenschlag anfängt zu rotiren, dreht sich um eine auf der Oberplatte senkrecht stehende Axe (Taf. I. Fig. 5.) eine Hülse, an welcher einestheils ein nach oben federnder Arm $qy$, anderntheils der unbiegsame Arm $x\pi$ befestigt ist. Das Ende $q$ gleitet auf den Spiralen der Minutenaxe (Taf. I. Fig. 3.), wird bei der Umdrehung der Minutenaxe gehoben und fällt zwischen dem 59sten und 60sten oder 29sten und 30sten Secundenschlage vom Absatz $\alpha$ resp. $\alpha'$ herunter. Ist $q$ über die Hälfte der Höhe der schiefen Ebene von $S$ aufgestiegen, so geht — zwischen der 48sten und 60sten, resp. 18ten und 30sten Secunde einer jeden Minute — der Ansatz $t$ am Hammer $op$ (Taf. I. Fig. 2. und Fig. 5.) unter $q$ weg, ohne es zu treffen; ist aber $q$ abgefallen und noch nicht hoch genug gestiegen, so wird es von $t'$ zur Seite gestossen.

16) Die Vertiefung $\pi$ des Arms $x\pi$ (Taf. I. Fig. 4., 13., 16.) wird nun zwischen der 48sten und 59sten, resp. 18ten und 29sten Secunde — wenn $q$ von $t$ nicht mehr berührt wird — unter das Knöpfchen $h$ gebracht, wobei $h$ etwas emporgehoben wird und die Spitze $\sigma$ ausser Berührung mit der Löcherscheibe kommt. — Dann wird, während die Stellaxe mit rotirt, die Papierscheibe aber noch ruht, zwischen dem 59sten und 60sten, resp. 29sten und 30sten Secundenschlage $q$ von $\alpha$ resp. $\alpha'$ herunterfallen, mit dem 60sten resp. 30sten Schlage aber $q$ zur Seite und somit $\pi$ unter $h$ weggestossen; der Stift $\sigma$ fällt in das gerade darunter befindliche Loch der Löcherscheibe, und die Papierscheibe fängt mit einem vollen Secundenschlage an, an der Rotation Theil zu nehmen.

17) Die Manipulationen, die der Gehülfe also zu machen hat, sind folgende (die Uhr sei im Gange):

1) verschiebt er den Arm $A$, so dass dessen schiefe Ebene die Stellaxe hebt, somit diese samt der Papierscheibe vom Uhrwerk unabhängig wird;
2) löst er mit einem Schraubenschlüssel die Schraube $\delta$;
3) hebt er beim Haken $h$ die Spitze $\sigma$ aus der Löcherscheibe, dreht das Stück $\gamma$ so, dass $h$ an seinem richtigen Platz über der Vertiefung $\pi$ steht, und dreht die Papierscheibe bis sie mit dem fraglichen Hundertel (z. B. 0",35), bei welchem der Blitz erscheinen soll, am Zeiger $\xi$ steht;

4) schliesst er die Schraube $\delta$, wodurch $\gamma$ mit seinem Arm $eh$ fest mit der Papierscheibe verbunden wird.

Dann bringt er

5) zwischen 48″ und 59″ resp. zwischen 18″ und 29″ die Einbiegung $\pi$ des Arms $x\pi$ unter $h$, schiebt

6) den Arm $A$ zurück, so dass die Stellaxe mit rotirt (ohne die Papierscheibe) entfernt sich und schreibt den Stand auf.

Dann erscheint der Lichtblitz um 0″,35 resp. 30″,35 *). Diese sechs Geschäfte können bequem in 3 bis 4 Secunden beendet werden. Uebrigens braucht man den Lichtblitz nicht immer zwischen der 0ten und 1sten, resp. 30sten und 31sten Secunde erscheinen zu lassen, denn — auch zu andern Zwecken (s. 22)) — ist weiter

18) um eine zur Oberplatte senkrechte Axe ein leichtes Rad $R$ (Taf. I. Fig. 16.) von etwa 3 Zoll Durchmesser drehbar, dessen Zähne in ein, an $\beta$ (Taf. I. Fig. 4.) sitzendes Getriebe eingreifen. Die Fläche dieses Rades hat eine Oeffnung $o'$, welche bei der Umdrehung desselben einmal gerade über die beiden Oeffnungen in der Oberplatte und der Papierscheibe gelangt und dann dem Lichte freien Durchgang nach oben gestattet. Da es erst in 8 Secunden einen Umgang macht, so wird der Lichtblitz noch eine Anzahl ganzer Secunden (unter 8), je nach der Stellung dieses Rades, die auch an einem Zeiger $\omega$ (Taf. I. Fig. 16.) abgelesen wird, zurückgehalten, bis er zuerst erscheint. Der Gehülfe wird also die Möglichkeit haben, den Lichtblitz zu jeder auf ein Hundertstel Secunde angebbaren Zeit zwischen 0″,00 und 8″,00, resp. 30″,00 und 38″,00 auftauchen zu lassen. (Wollte man aus irgend einem Grunde die hier ausgeschlossenen Secunden zur Erscheinungszeit wählen, so brauchte man nur den Zeiger $z$ zu verstellen.). Die dazwischen liegenden Zeiten sind zu der neuen Stellung mehr als hinreichend, von 8″ bis 18″ zu den Geschäften 1) bis 4); von 18″ bis 29″ zu den Geschäften 5) und 6), wozu jetzt als 7tes noch die Notirung der vollen Secunde, am Zeiger $\omega$ abzulesen, kommt.

19) Auch ohne Gehülfen kann man sich selbst stellen, dann beobachten und hinterher den Stand des Instruments ablesen. Man muss nur — das Auge etwa in die Ebene der Papierscheibe gehalten, so dass man die Zahlen nicht sieht, — blind stellen, nach der Beobachtung das Stellwerk mittels des Arms $A$ auslösen und $h$ wieder an seine Stelle über $\pi$ bringen **), um wieder denselben

---

*) Und von da an jede folgende Secunde um dasselbe Hundertstel.

**) Dies ist auch nicht einmal nöthig, wenn man sich gemerkt, dass der Arm $eh$ in dieser Stellung immer 12 Theilstriche von $\xi$ entfernt steht.

Theilstrich bei ξ zu finden. Will man auch die volle Secunde controliren, so legt man auf das Rad *R* bei dem Zeiger ω ein kleines Papierstückchen.

20) Um den Lichtpunkt bei seinem Erscheinen nicht zu verfehlen, wird in einiger Entfernung vom Instrument ein Kartenblatt mit einer Oeffnung auf einem Stativ so gerichtet, dass man durch diese Oeffnung gerade den Lichtpunkt im Spiegel *D'* sehen und zugleich auch die Secunden im Spiegel *D* ablesen kann.

21) Die Papierscheibe, so wie das Rad *R*, sind sehr leicht, so dass der Gang des Uhrwerks, das eine Pendelkugel von 6½ Pfund hat, durch das plötzlich eintretende Mitrotiren derselben fast gar nicht alterirt wird. Doch kann es jedenfalls nichts schaden, wenn der Gehülfe den Blitz erst wenigstens 3 Secunden nach 0″ resp. 30″ erscheinen lässt, damit sich der Gang sicher vollständig beruhigt habe. Etwas merklicher ist die Alteration beim Einfall der ganzen Stellaxe, weshalb es gut ist, den Arm *A* so früh als möglich, also schon bei 19″ resp. 49″ zurückzuschieben. Uebrigens geht das Uhrwerk auch hier schon nach 3 bis 4 Secunden mit der nöthigen Gleichmässigkeit weiter.

22) Um den Sterndurchgängen ähnliche Phänomene zu erhalten, brachte ich auf das oben schwarze Rad *R* eine kleine Stahlperle, die von einer seitlichen Lampe oder dem Tageslichte beleuchtet wurde Darüber ist in der Richtung eines Radius ein weisser Faden *nn* (Taf. I. Fig. 16.) ausgespannt, unter welchem der Lichtpunkt vorbei wandert. Beobachtet wurde das Sternchen entweder mit freiem Auge durch das Kartenblatt oder einem astronomischen Fernrohre von etwa zwei- bis dreimaliger Verkleinerung; statt des Fernrohrs auch wohl mit einer (Voigtländerschen) Camera obscura, auf deren matter Scheibe sich diese Durchgänge sehr zart darstellen. Stern, Faden und Fernrohr wird im Anfange so gestellt, dass wenn der Nullpunkt der Papierscheibe am Zeiger ξ steht, der Stern gerade unter dem Faden erscheint. Durch Entfernen oder Nähern des Fernrohrs oder der Camera, Verschieben der Perle am Mittelpunkte des Rades ferner oder näher, lassen sich verschiedene Durchgangsgeschwindigkeiten hervorbringen, um der verschiedenen Vergrösserung der Passage-Instrument-Fernrohre und der verschiedenen Declination der beobachteten Sterne nah zu kommen.

## Pendel.

23) Unter der Unterplatte ist ein starker Bügel *EE* (Taf. I. Fig. 6.) befestigt, der das Lager für das Umdrehungssystem des

Pendels trägt. Die Pendelstange, etwa 15 Zoll lang, endet oben in ein polirtes Ende, das in die kreisförmig gebogene, an der Secundenaxe festsitzende Rinne $xx$ (Taf. I. Fig. 6. und Fig. 8.) fasst. Zwei Zoll von oben sitzt der Ansatz $m$ mit den zwei Stahlspitzen $p'$ und $p''$; die in den Vertiefungen 1 und 3 der beweglichen Stahlplatte $T$ (Taf. I. Fig. 9.) ruhen.

24) Die Stahlplatte $T$ (Taf. I. Fig. 9.) hat unten zwei ähnliche Vertiefungen 2 und 4, mit welchen sie auf den Stiften $q'$ und $q''$ schwebt. Die vier Vertiefungen liegen natürlich bei 0, 90, 180 und 270 eines Kreises.

25) Die Stifte $q'$ und $q''$ stecken in einer Messingplatte $VV$, welche durch vier Stellschrauben nach vorn und hinten, rechts und links verstellbar ist.

26) Das ganze Uhrwerk ruht auf einem Gestell von Schmiedeeisen mit drei Füssen (Taf. I. Fig. 7.), an denen sich Fussschrauben mit Gegenschrauben befinden. In der Mitte der die drei Füsse verbindenden Stangen ist ebenfalls durch drei Schrauben verstellbar eine Platte $w$ mit einem oben in eine Spitze endigenden Stift $k$, der vertikal unter die Pendelstange gleichsam als deren Verlängerung gebracht werden kann.

27) Eine Schraubenmutter, um diesen Stift schraubbar, umfasst, in die Höhe geschraubt, die untere Spitze der Pendelstange, um diese, wenn das Instrument nicht gebraucht wird, festzustellen.

28) Damit die Uhr gleichmässig gehe, müssen bekanntlich (Taf. I. Fig. 11.) der Schwerpunkt $s$ des Pendels und der Angriffspunkt desselben, $\alpha$, zugleich horizontale Kreise um die vertikale Secundenaxe beschreiben. Dazu ist nöthig:

1) dass die Secundenaxe vertikal stehe. Dies wird genau genug bewirkt durch Horizontalstellen der Oberplatte mittels der drei Fussschrauben und einer Libelle;

2) dass die (obere) Spitze der Pendelstange, der Umdrehungspunkt ($u$) und der Schwerpunkt ($s$) in gerader Linie liegen; denn liegt die Spitze nicht in der Verlängerung der $su$, so wird sie bei der Kreisbewegung des Schwerpunktes nicht auch einen Kreis, sondern eine Art sphärischer Ellipse *) durchlaufen. Nun ist zwar die Spitze der Pendelstange nicht eigentlich Angriffspunkt; dieser liegt aber immer im Endpunkte der Hypotenuse

*) Durchschnitt eines gemeinen geraden Cylinders (Horizontalprojection des Weges der Pendelstangenspitze) mit der Kegelfläche.

des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 1) die Entfernung der Spitze von der geometrischen Axe der Secundenaxe und 2) Radius des Pendelstangenquerschnitts sind, bleibt also mit der Spitze in constanter Entfernung von der Secundenaxe. (In den vier in Taf. I. Fig. 10. dargestellten Lagen des oberen Endes der Pendelstange, I, II, III, IV, ist der Angriffspunkt der Reihe nach 1, 2, 3, 4).

Um die erwähnten drei Punkte in gerade Linie zu bekommen, wurde durch sorgfältige Abrichtung auf der Drehbank der Umdrehungspunkt (zunächst Mitte zwischen den Spitzen $p'$ und $p''$) und die Pendelstangenspitze in die geometrische Axe der Stange verlegt. Um den Schwerpunkt auch in diese Axe zu bringen, wurde bei feststehendem Umdrehungspunkt die Kugel um die Pendelstange gedreht und so lange daran gefeilt, bis bei dieser Umdrehung die Spitze ihren Ort nicht veränderte. Uebrigens beschreibt auch bei einer kleinen Abweichung der Spitze von der Verlängerung der $su$, wie sie hier nur vorkommen kann, der Angriffspunkt doch noch nahe einen Kreis; wichtig aber ist es, dass der Mittelpunkt dieses „Kreises" in der geometrischen Axe der Secundenaxe liege, deshalb muss

3) der Umdrehungspunkt in der Verlängerung der Secundenaxe liegen. Dies wird bewirkt durch Stellung der Platte $vv$ mittels der vier Stellschrauben unter Prüfung des Sirenentons;

4) der „Umdrehungspunkt" muss wirklich ein Punkt sein, d. h. die zwei Verbindungslinien 0, 180 und 90, 270 der tiefsten Stellen in den Vertiefungen der Stahlplatte $T$ müssen sich schneiden, oder die vier tiefsten Stellen in einer Ebene liegen. Denn wäre z. B. (Taf. I. Fig. 12.) bei einer Ausbiegung der Pendelstange, etwa nach Nord, $x$ Umdrehungsaxe, bei der nach West dagegen $y$, so würde bei der „Kreisbewegung" des Schwerpunkts (welche streng genommen in diesem Falle eigentlich unmöglich ist), die Bahn der oberen Pendelstangenspitze schon sehr merklich vom Kreise abweichen. In Taf. I. Fig. 12. ist

$$xN = xP, \quad xs = xp;$$
$$yW = yP, \quad yo = yp;$$

$N$ und $W$ von der Ruhelage $Pp$ gleich weit entfernt.

Die vier Punkte in eine Ebene zu bekommen wurde vom Uhrmacher möglichst genau zu erreichen gesucht.

5) Ob die vier Vertiefungen so liegen, dass die Verbindungslinien 18 und 24 sich genau rechtwinklig schneiden, ist weniger wichtig; es ginge bei bedeutender Abweichung vom rechten Winkel nur ein Theil des Raums verloren, welchen die Pendelstange erreichen könnte, in welchen sie aber nie zu gelangen braucht; ebenso braucht die Verbindungslinie der Spitzen $p'$ und $p''$, so wie $q'$ und $q''$, nicht genau horizontal zu sein.

6) Compensation ist, da die Uhr nur näherungsweise Secunden zu schlagen braucht, natürlich ganz überflüssig.

29) Ist das Instrument einmal durch Nivellirung der Oberplatte und Stellung der Platte $vv$ regulirt, so bringt man die Spitze des Stiftes $k$ (s. 26)) mit der untern Spitze der ruhenden Pendelstange in Coincidenz. Dann kann man das Instrument wochenlang benutzen und wieder aufheben, und hat zur jedesmaligen Aufstellung nur nöthig, mittels der Fussschrauben die Pendelstangenspitze wieder mit der Spitze $k$ zusammenzubringen.

## Fehler des Instruments und Grenzen der Genauigkeit seiner Angaben.

1) **Fehler in der Zeitangabe bei bestimmten Tonschwankungen der Sirene.** In der Beurtheilung dieser Unsicherheit werden einige Beispiele am einfachsten einen Anhaltepunkt geben. Theilen wir die Secunde z. B. in Achtel, so müssen bei gleichmässigem Gange des Pendels resp. der Sirene in jeder Achtelsecunde 12½ Hundertel des Papierscheibenrandes am Zeiger $\xi$ vorbeigehen. Gebe nun die Sirene

1) in den ersten 4 Achteln des Intervalls von einem Secundenschlage bis zum folgenden den Grundton, in den letzten 4 Achteln dessen obere Quinte an. Dann hat man, da während des Tönens der Quinte $\frac{3}{2}$mal so viel Bogentheile vorübergehen, als beim Auftreten des Grundtons, wegen $1+1+1+1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=10$ $[=m]$ den Umfang der Papierscheibe in $m=10$ gleiche Stücke zu theilen, zu je $\frac{100}{m}=p=10$ Bogentheilen, und es werden in jedem der ersten 4 Achtel der Secunde $1.p=10$, in jedem der letzten 4 Achtel aber $\frac{3}{2}p=15$ Bogentheile am Zeiger vorübergehen. Es treffen also zusammen mit

der 0 12½ 25 37½ 50 62½ 75 87½ 100ten Hundertelsecunde,
der 0 10 20 30 40 55 70 85 100ste Bogentheil.

Die grösste Differenz zwischen der regelmässig und der unregelmässig sich drehenden Papierscheibe würde sich also auf $4(12\frac{1}{2}-p)=10$ Bogentheile; das Maximum des Fehlers also auf 10 Hundertelsecunden belaufen. (Die Abweichung steigt, wie man sieht, bei jedem Achtel des Anfangstons um $(12\frac{1}{2}-p)$ und geht mit jedem Achtel der Quinte um $(\frac{3}{2}p-12\frac{1}{2})$ Bogentheil zurück.

2) Vertheilen sich die 4 Achtel Grundton und 4 Achtel Quinte anders, z. B. 3 Achtel Grundton, 4 Achtel Quinte, 1 Achtel Grundton, so werden die Differenzen lauten:

$$0 \quad -2\frac{1}{2} \quad -5{,}0 \quad -7{,}5 \quad -5{,}0 \quad -2{,}5 \quad 0 \quad +2{,}5 \quad 0,$$

die grösste Abweichung beträgt also jetzt nur 0″,075.

3) Bei der Vertheilung: 1 Achtel Grundton, 1 Achtel Quinte, 1 Achtel Grundton u. s. w., von Achtel zu Achtel abwechselnd, kann sie nicht mehr als 2,5 Hundertel erreichen.

4) Dass, wenn Grundton und Quinte im Ganzen jeder eine halbe Secunde tönt, die Abweichung sich nie auf mehr als 4mal $(12\frac{1}{2}-p)$, wie im Falle 1) anhäufen kann, sieht man leicht.

5) Theilen sich Grundton und Quinte in anderm Verhältniss in die Secunde, als zu halb und halb, so wird zunächst das $m$ und $p$ ein anderes, z. B. bei 5 Achtel Grundton, 3 Achtel Quinte wird $m=9{,}5$, $p=10{,}5263$. Die grösste Abweichung findet in diesem Falle statt, wenn die 5 Achtel Grundton die Secunde beginnen, dann kann sie sich auf $5\times(12{,}5-p)$ oder $3\times(\frac{3}{2}p-12{,}5)=9{,}87$ Hundertelsecunden belaufen. — Im Falle aber Grundton und Quinte von Achtel zu Achtel wechseln, beträgt die grösste Differenz nur 3 bis 4 Hundertel.

6) Bei 6 Achtel Grundton, 2 Achtel Quinte kann die Abweichung bis 8,33; bei 7 Achtel Grundton, 1 Achtel Quinte aber nur bis 5,145 Hundertel steigen. Liegt aber im letzten Falle das Achtel Quinte in der Mitte, so beläuft sich die grösste Differenz nur auf $4(12{,}5-11{,}765)=2{,}94$.

7) Theilt man die Secunde in Sechzehntheile, so ist das Maximum der Abweichung, wenn Grundton und Quinte je eine halbe Secunde tönen, wieder $=10$, wechseln sie aber zu Sechzehnteln ab, nur 1,25 Bogentheile.

An diesen Beispielen übersieht man schon:

1) Das Maximum der Abweichung findet statt, wenn der Grundton eine halbe Secunde und die Quinte ebenfalls eine halbe

Secunde anhält und zwar von Anfang der Secunde an gerechnet.

2) Die Abweichung wird kleiner, wenn die beiden Töne, deren jeder im Ganzen eine halbe Secunde tönt, während der Secunde anders vertheilt sind.

3) Am geringsten ist sie, wenn die Töne gleichsam trillerartig regelmässig abwechseln.

4) Sie beträgt auch weniger als obiges Maximum, wenn von den beiden Tönen der eine länger, der andere kürzer dauert als eine halbe Secunde. Am grössten ist sie in diesem Falle wieder, wenn die Töne nur einmal wechseln, der eine die Secunde beginnt, der andere sie schliesst. Sie wird um so geringer, je ungleicher die Dauer der Töne ist, am geringsten dabei, wenn der kürzere in die Mitte der Secunde fällt, u. s. w.

Zieht man ebenso, wie oben die Quinte, auch die Quarte, Terz und Secunde in Betrachtung, so findet man die möglichst grosse Abweichung

bei Grundton und Quinte $=0'',100$ im Falle 1), bis $0'',012$ im Falle 7),
„ „ „ Quarte $=0'',071$ „ „ „ „ $0'',009$ „ „ „
„ „ „ Terz $=0'',056$ „ „ „ „ $0'',007$ „ „ „
„ „ „ Secunde $=0'',030$ „ „ „ „ $0'',004$ „ „ „

Ohne diese Untersuchung genauer und allgemeiner hier auszuführen, können wir doch schon die nöthige Anwendung für unseren Zweck machen. Da es, wenigstens bei meinem Instrumente, schwierig und zeitraubend, vielleicht unmöglich ist, die Schwankung der Sirene vollkommen wegzubringen, — schon wegen des nicht absolut festen Standes auf einem Tische im Zimmer, — so habe ich mir eine Schwankung bis zur Secunde, wenn diese nicht gerade zu halb und halb mit dem Grundton erschien, ja selbst bis zur Terz, wenn diese nur kurz und ziemlich in der Mitte zwischen zwei Schlägen auftrat, gefallen lassen, wobei also die Unsicherheit 2 Hundertelsecunden noch nicht überstieg.

2) **Fehler, dass nicht genau mit einem Secundenschlage die Papierscheibe anfängt, an der Rotation Theil zu nehmen.** Möglichst genau in der Stellung, wo $r$ auf $r'$ stösst, also der Ton des Secundenschlags entsteht, fällt $h$ von dem es vorher stützenden Arm $\pi$ herab (bei der Bewegung wahrscheinlich nicht früher, wie man des Stosses von $t$ auf den Arm

*φ* wegen glauben könnte, weil *h* mit Reibung auf *n* ruht). Die nun freie Spitze *σ* fällt in das gerade darunter befindliche Loch der Löcherscheibe. Die Zeit, die dazu erforderlich ist, ist höchst wahrscheinlich noch geringer als 0″,003, welche beim freien Fall vergehen würde, weil die Spannkraft der Feder den freien Fall noch beschleunigt. Möglicherweise kann eine Unsicherheit von höchstens ½ Hundertelsecunde entstehen, wenn *σ* nicht genau in ein Loch, sondern zwischen zwei Löcher fällt und also von dem konischen Rande einer Oeffnung etwas vor- oder zurückgedrängt wird.

Beim ersten Anblick scheint freilich eine bedeutendere Verspätung des Einfalls vorzukommen. Hat man nämlich den Arm *h* so gestellt, dass der Zeiger *ξ* z. B. auf 0 zeigt, lässt die Maschine auf gewöhnliche Weise das Stellsystem auslösen, hält dann den Pendel an, ohne die Stellaxe ausser Verbindung mit dem Gehwerk zu bringen, und führt das Werk in die Stellung zurück, dass das Hammerende *p* (Taf. I. Fig. 13.) an den Absatz der archimedischen Spirale der Secundenaxe stösst, von dem es abgeglitten, so zeigt der Zeiger statt auf 0, auf ca. 3, überhaupt immer ca. 3 Bogentheile mehr; der Arm *h* steht dann nicht an seinem richtigen Platze, sondern etwa in der Stellung *h′*. Es scheint also hier eine constante Verspätung des Einfalls um 0″,03 vorzuliegen, als wäre im Moment der Auslösung der Stift *σ* nicht in das gerade darunter befindliche Loch, sondern in das dritte dahinter gefallen, weil die Löcherscheibe in der Zeit um 3 Hundertel-Umdrehung schon weiter gegangen. — Bedenkt man indess, dass nicht der Augenblick des Abgleitens des Hammerendes *p* von dem Spiralenabsatz der des Secundenschlags und der Auslösung ist, sondern der des Auftritts von *r* auf *r′*, wo *p* der Secundenaxe am nächsten ist, so wird man sich bald überreden, dass jene 0″,03 die Zeit ist, welche *p* braucht, um vom Gipfel des Spiralenabsatzes bis auf die Secundenaxe zu gelangen, wo erst der Ton entsteht und die Auslösung erfolgt. In der That, lässt man das Uhrwerk schnurren (das Pendel nicht mitgehen), so findet sich, je schneller das Werk läuft, die Differenz am Zeiger immer grösser, wenn man *p* an den Spiralenabsatz bringt, weil jetzt in den 3 Hundertelsecunden die Löcherscheibe immer mehr und mehr als 3 Hundertelumdrehung macht. Man überzeugt sich auch davon, wenn man auf die Spirale ein Blättchen Papier befestigt, auf dessen Rand *p* trifft und einen sichtbaren Eindruck macht. Bringt man das Uhrwerk so zurück, dass *p* nicht an den Absatz, sondern auf diesen Eindruck stösst, so ist der Unterschied in der Stellung am Zeiger fast = 0.

Der Unterschied zwischen der Entstehung des Schalls und des

Beginnens der Rotation der Papierscheibe möchte also wohl auf nicht höher als 1 Hundertelsecunde anzuschlagen sein.

3) Weiter ist zu erwähnen eine zufällige Unsicherheit gerade meines Instruments bis zu einer Grösse von fast 1 Hundertelsecunde. Es rührt diese her von einem Theilungsfehler im Zwischenrade *V* zwischen Secunden- und Stellaxe. Nach je einer vollen Umdrehung der Secundenaxe (den Hammer *p* immer an den Absatz der Spirale gebracht) zeigt nämlich die Papierscheibe z. B. folgende periodisch wiederkehrende Nummern am Zeiger $\xi$:

10,5
10,0
9,5
8,75
8,5
8,5
9,25
10,0
u. s. w.

Dagegen zeigte die Sirene bei 32 Viertelumdrehungen (= einer Umdrehung der Secundenaxe) nahezu je $3\frac{1}{4}$ Hundertel Fortgang am Zeiger $\xi$, mit dem Fehler des Zwischenrades (so dass wenn man von 10,5 anfing, man durch 7,4; 4,25; 1,1 u. s. w. nicht wieder bis zu 10,5, sondern bis zu 10,0 u. s. w. gelangte), wonach also das Rad der Secundenaxe, *C*, das Getriebe der Sirenenaxe u. s. w. keinen beachtungswerthen Theilungsfehler hat.

4) Die Correction wegen der Entfernung von der Schallquelle beträgt, da der Beobachter nur ein Paar Fuss vom Instrumente absteht, weniger als $\frac{1}{2}$ Hundertelsecunde.

Nach allem diesem ist also, wenn die Sirene in ihren Schwankungen nicht über die oben angegebenen Grenzen hinausgeht, die Unsicherheit in den Angaben des Instruments im schlimmsten Falle nicht höher als 0″,03 bis 0″,04 zu schätzen, und könnte, wenn es nöthig schiene, bei einem zweckmässiger eingerichteten und noch sorgfältiger ausgeführten Instrumente auf noch weniger herabgebracht werden.

---

## Erfahrungen bei den Beobachtungen.

Im Allgemeinen stellte sich bei verschiedenen Personen, die Beobachtungen mit dem Instrumente anstellten und noch nicht hin-

reichend geübt waren, eine grössere oder geringere Unsicherheit heraus. Diese schien sich, bei solchen, die auch im gewöhnlichen Leben eine gewisse Präcision, Ruhe und Schärfe bekundeten, eher zu verlieren; unter Anderm schien auch musikalische Fertigkeit — also ein geübteres Taktgefühl — schnellern Fortschritt zu bedingen. Uebrigens war die Unsicherheit an verschiedenen Tagen sehr verschieden, auch schien eine erlangte Fertigkeit durch längere Unterbrechung wieder theilweise verloren werden zu können.

Um die Beobachtungen zu erleichtern und schneller ein sichereres Resultat über das Schätzen der Secundenbruchtheile zu erhalten, wurden die Beobachtungen meist so angestellt, dass die vollen Secunden unbeachtet gelassen und nur die Zehntel der Secunden, bei welchen man das Phänomen erschienen glaubte, angegeben wurden. Ferner wurde oft ein und derselbe Stand des Instruments beibehalten, und das Phänomen, das alle 8 Secunden in derselben Weise wiederkehrt, öfters beobachtet. Dabei zeigte sich besonders die Fehlerquelle der Ueberraschung, denn die ersten Angaben (gleichsam die Ablesungen prima vista) waren da oft ganz anders und erst bei der spätern consolidirte sich die Ansicht, wenn man sich das Phänomen genauer und ruhiger, gleichsam mit Musse betrachtet hatte. Bei Lichtblitzen wurde erst das Rad *R* entfernt, so dass jede Secunde bei demselben Zehntel der Blitz erschien. Dadurch gelangte man unverhältnissmässig rascher — wegen der Regelmässigkeit der Wiederkehr — zu einer, von Ueberraschung freien Ansicht über die Zeit des Erscheinens. Hat sich diese feste, obgleich noch unrichtige Ansicht gebildet, und man erfährt dann die richtige Angabe, und beobachtet nun immer wieder dasselbe Phänomen, so überzeugt man sich leicht von dem begangenen Fehler; es überkömmt einen ein ähnliches Gefühl, wie wenn einem eine erst unklare Sache plötzlich klar geworden; es fällt einem wie Schuppen von den Augen und man begreift nicht, wie man früher anders habe schätzen können.

Bei Beobachtung der Appulse unterschied ich vier Arten:

1) Man betrachtet den Durchgang ähnlich wie einen Lichtblitz, indem man in Gedanken die Zeit zwischen zwei Secundenschlägen eintheilt und das plötzliche Phänomen gehörig einreiht. Nach dieser Art müssen auch u. A. die Durchgänge des Federpendels beobachtet werden.

Wenn der Stern aber mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich fortbewegt, wie bei wirklichen Sterndurchgängen im Passage-Instrument oder bei meinem Instrument, so kann man

2) den wandernden Stern verfolgen, den Ort, wo er vor dem

Durchgange beim Secundenschlage stand, und den Punkt, wo er nach dem Durchgange beim nächsten Schlage sich befand, fixiren und diesen Zwischenraum in Gedanken in 10 Theile theilen und nach dem Augenmaass das Verhältniss der beiden Entfernungen bis zum Faden abschätzen. Den Raum abzuschätzen halte ich für leichter, als die Zeit, daher diese Methode für sicherer als die erste.

3) Leichter noch wird diese Bestimmung, wenn der Stern an einer sichtbaren Linie herzieht, weil man dann die beiden Orte des Sterns bei den Secundenschlägen nicht so weit vom Faden gleichsam im leeren Raume zu fixiren braucht.

4) Am leichtesten und sichersten endlich ist die Beobachtung, wenn der Weg, den der Stern in einer Secunde durchläuft, gerade in 10 Theile getheilt ist, er also an einer Scala herwandert wie Taf. I. Fig. 14. Man braucht dann nur einmal den Scalentheil abzulesen, wo der Stern bei dem letzten Schlage vor dem Faden war. Liest man auch den nächsten Ort nach dem Durchgange ab, welcher genau dieselbe Zahl gibt, so hat man zwei Bestimmungen, die sich controliren. (Man könnte auch einen ganzen eingetheilten Kreis über dem Rade *R* befestigen, nur müsste dann die Parallaxe und der variabele Ort des Lichtpunktes auf der Perle gehörig berücksichtigt werden; man hätte dann bei einer Umdrehung von *R* acht Bestimmungen.)

Der Unterschied für die Art 1) und 4) ist:

bei 1) ist d. Ort, wo das Phänom. erscheint, fest, d. Zeit wechselnd,
„ 4) „ „ „ „ „ „ „ wechselnd, d. Zeit fest.

Bei dieser letzten Art zu beobachten hatte ich eine eigenthümliche Erscheinung. Wenn ich den Scalenpunkt, bei welchem der Stern beim Secundenschlag sein musste, vorher wusste, so glaubte ich den Lichtpunkt doch beim Eintritt des Schlags noch etwa 0,5 Scalentheile (zwischen 0,3 und 0,8 wechselnd) vor dem richtigen Ort zu sehen, wodurch also die Angaben um ca. 0″,05 zu gross ausfallen würden. Bemühte ich mich namentlich, recht scharf zu sehen und recht aufmerksam zu sein, so schien es, als wenn der sich stetig nähernde Stern an jenem Punkte einen Moment still stehe, so dass ich versucht ward, zu meinen, es müsse der Ort, wo der Stern beim Eintritt des Schlags stehe, äusserst scharf bestimmbar sein. Oftmals aber schien der Stern auch wieder ohne Stillstand in stetigem Flusse während des Secundenschlags fortzugehen; er flog dann während des Schlags gleichsam durch den richtigen Punkt hindurch und die Angabe wurde richtig. Dies geschah meist am Ende einer Beobachtungsreihe, wenn ich gleichsam schon ermüdet war, oder wenn ich die Beobachtungen etwas nonchalant machte. Dieselbe Erscheinung hatte ich auch bei noch

langsamerer und schnellerer Bewegung, z. B. bei einem schwarzen Punkte auf der Papierscheibe, der in der Secunde 8 par. Zoll durchlief. Der anticipirte Raum war auch hier derselbe, ca. $\frac{1}{15}$ des in einer Secunde durchlaufenen Wegs.

Eine Erklärung dieser Erscheinung möchte ich noch nicht wagen. Es ist so, als widme man einmal den regelmässig erfolgenden Secundenschlägen überwiegende Aufmerksamkeit. Dadurch anticipire man einen solchen vielleicht selbst, wie man einen erwarteten Stoss gleichsam früher fühlt, als er wirklich erfolgt, während man den wandernden Stern, den man weniger beachtet, immer an einem neuen Orte sich zum Bewusstsein zu bringen habe, wobei die Seele, der es schwer halte, zwei heterogene Geschäfte, zu hören und zu sehen, zugleich zu verrichten, gleichsam in der Vorstellung des gesehenen Lichtpunktes nachhinke; bis ein andermal man, die Schläge weniger beachtend, den wandernden Stern mit grösserem Interesse verfolge, und ihn so ohne Stillstand in freiem Zuge durch den Schall hindurchfliegen, ja ihm sogar vorauseilen sehe.

Für Lichtblitze hält es weit schwerer, eine ähnliche sichere Beobachtungsmethode einzurichten *). Etwas ähnliches sollte man hier vermuthen, die Secundenschläge als erwartete Phänomene gleichsam voraus, den Blitz aber als eine überraschende Erscheinung nach zu empfinden. Dies habe ich aber, der grösseren Unsicherheit dieser Beobachtungen wegen, direct nicht constatiren können, auch stellte sich indirect aus den Beobachtungen eine daraus folgende Verspätung — zu grosse Angaben der Erscheinungszeiten — nicht bestimmt heraus.

## Beobachtungs-Beispiele.

Als Proben und theilweise als Belege erlaube ich mir einige Beobachtungsreihen hier mitzutheilen. Ich würde mehr oder gar alle Beobachtungen vorlegen, wenn sie dazu dienen sollten, etwa eine Grösse definitiv festzusetzen; da sie aber an und für sich keinen Werth weiter haben, als meine vorläufigen, subjectiven

*) Wollte man auch hier die Schätzung der Zeitbruchtheile durch Rannbeobachtung ersetzen — etwa dadurch, dass man die Lichtblitze in einem von aussen spiegelnden cylinderartigen Körper betrachtete, der als Grundfläche einen Kreis, als Deckfläche aber eine Spirale, wie ss (Taf. I. Fig. 2.) hätte, und sich in 1 Secunde um seine vertikale Axe drehte, wodurch die Blitze zu verschiedenen Zehnteln höher oder tiefer erschienen, oder auf andere Art, — was bei wirklichen Beobachtungen etwa mit Vortheil geschehen könnte, — so würde man den eigentlichen Charakter der Beobachtungsweise verwischen.

**Erfahrungen zu bekunden, so lasse ich sie der Raumersparniss wegen weg.**

**A. Lichtblitze. [Rad *R* entfernt. Jedes Phänomen öfters beobachtet, um die Ueberraschung zu beseitigen, aufgezeichnet erst, wenn ich mich fest überzeugt zu haben glaubte. Selbst gestellt, ohne Gehülfen, bei I., II. und IV. geordnet in (a) nach den Nummern des Standes, in (b) nach den Angaben.]**

**I.** (a)

| No. der Beobachtung | Stand des Instruments ($W$) | Angabe ($A$) | $A = W +$ in Hundertein |
|---|---|---|---|
| 19 | $n''$,00 | $n''$,00 | 0 |
| 20 | ,01 | ,00 | —1 |
| 15 | .03 | .00 | —3 |
| 4 | ,07 | ,05 | —2 |
| 22 | ,15 | ,10 | —5 |
| 9 | ,16 | .25 | +9 |
| 10 | ,27 | ,30 | +3 |
| 1 | ,30 | ,40 | +10 |
| 18 | ,38 | ,45 | +7 |
| 11 | ,39 | ,40 | +1 |
| 12 | ,42 | ,40 | —2 |
| 7 | ,45 | ,50 | +5 |
| 2 | ,50 | ,50 | 0 |
| 21 | ,51 | ,50 | —1 |
| 6 | ,62 | ,75 | +13 |
| 14 | ,65 | ,75 | +10 |
| 13 | ,68 | ,80 | +12 |
| 16 | ,77 | ,90 | +13 |
| 5 | ,84 | ,85 | +1 |
| 3 | ,90 | ,90 | 0 |
| 17 | ,94 | ,95 | +1 |
| 8 | ,98 | ,00 | +2 |

Mittel $A = W + 0'',033$.

Mittlerer Fehler einer Angabe*) $m = 0'',056$.

(a)

| $W$ um | $A = W +$ |
|---|---|
| $n$,00 | 0 |
| ,10 | —3 |
| ,20 | +9 |
| ,30 | +6 |
| ,40 | +3 |
| ,50 | 0 |
| ,60 | +11 |
| ,70 | +12 |
| ,80 | +7 |
| ,90 | 0 |

*) $m = \sqrt{\frac{(vv)}{s_0 - 1}}$ s. u. A. Gerling: Ausgleichungsrechnung p. 39.

**II.** (a)

| No. | (W) | (A) | A = W + |
|---|---|---|---|
| 35 | n'',02 | n'',95 | −7 |
| 19 | ,02 | ,00 | −2 |
| 30 | ,06 | ,00 | −6 |
| 39 | ,07 | ,05 | −2 |
| 27 | ,08 | ,05 | −3 |
| 17 | ,09 | ,05 | −4 |
| 25 | ,09 | ,05 | −4 |
| 7 | ,09 | ,10 | +1 |
| 2 | ,12 | ,10 | −2 |
| 14 | ,17 | ,20 | +3 |
| 36 | ,17 | ,25 | +8 |
| 26 | ,22 | ,25 | +3 |
| 24 | ,25 | ,30 | +5 |
| 1 | ,27 | ,35 | +8 |
| 5 | ,27 | ,35 | +8 |
| 16 | ,28 | ,35 | +7 |
| 6 | ,32 | ,40 | +8 |
| 28 | ,34 | ,40 | +6 |
| 8 | ,40 | ,40 | 0 |
| 10 | ,42 | ,50 | +8 |
| 43 | ,47 | ,50 | +3 |
| 34 | ,50 | ,50 | 0 |
| 23 | ,54 | ,50 | −4 |
| 9 | ,56 | ,50 | −6 |
| 20 | ,57 | ,55 | −2 |
| 33 | ,61 | ,55 | −6 |
| 37 | ,62 | ,55 | −7 |
| 15 | ,64 | ,55 | −9 |
| 41 | ,64 | ,55 | −9 |
| 29 | ,69 | ,70 | +1 |
| 42 | ,72 | ,70 | −2 |
| 18 | ,75 | ,70 | −5 |
| 40 | ,77 | ,70 | −7 |
| 11 | ,80 | ,75 | −5 |
| 13 | ,87 | ,90 | +3 |
| 22 | ,88 | ,90 | +2 |
| 44 | ,88 | ,85 | −3 |
| 32 | ,90 | ,90 | 0 |
| 21 | ,90 | ,95 | +5 |
| 3 | ,91 | ,90 | −1 |
| 38 | ,94 | ,90 | −4 |
| 31 | ,95 | ,95 | 0 |
| 4 | ,97 | ,00 | +3 |
| 12 | ,98 | ,00 | +2 |

Mittel: $A = W - 0{,}004$

$m = 0{,}05$

(a)

| (W) um | A = W + | Gewicht |
|---|---|---|
| n,00 | −1 | (4) |
| ,10 | −3 | (7) |
| ,20 | +5 | (4) |
| ,30 | +7 | (5) |
| ,40 | +4 | (2) |
| ,50 | 0 | (3) |
| ,60 | −6 | (6) |
| ,70 | −2 | (3) |
| ,80 | −6 | (2) |
| ,90 | 0 | (8) |

(b)

| A | W = A + | Gewicht |
|---|---|---|
| n,00 | +1 | (4) |
| ,05 | +3 | (4) |
| ,10 | 0 | (2) |
| ,15 | ..... | ..... |
| ,20 | −3 | (1) |
| ,25 | −5 | (2) |
| ,30 | −5 | (1) |
| ,35 | −8 | (3) |
| ,40 | −5 | (3) |
| ,45 | ..... | ..... |
| ,50 | 0 | (5) |
| ,55 | +7 | (5) |
| ,60 | ..... | ..... |
| ,65 | ..... | ..... |
| ,70 | +3 | (4) |
| ,75 | +5 | (1) |
| ,80 | ..... | ..... |
| ,85 | +3 | (1) |
| ,90 | 0 | (5) |
| ,95 | +1 | (3) |

Falls etwa die Beobachtungsreihen I. oder II. zwischen wirklichen Beobachtungen gemacht wären, so müssten sie zum Gebrauch

etwa wie in (b) zusammengestellt werden. Ob man sie aber als Ganzes benutzen, also für I.: $W = A - 0'',033$, für II.: $W = A + 0'',004$ nehmen solle, oder besser thue, sie etwa im Einzelnen zu berücksichtigen, also (für I.) die Angaben $n'',2$; $n'',3$; $n'',4$; $n'',6$; $n'',7$; $n'',8$ verkleinern, die $n'',1$ vergrössern, $n'',0$; $n'',5$ und $n'',9$ aber unverändert lassen; bei II. aber die $n'',2$; $n'',3$; $n'',4$ verkleinern, $n'',6$; $n'',7$; $n'',8$; $n'',0$ vergrössern, die $n'',1$; $n'',5$; $n'',9$ uncorrigirt beibehalten solle — würde erst noch eine specielle Berücksichtigung der Umstände erheischen, z. B. ob die Zehntel in den Angaben der wirklichen Beobachtungen ziemlich gleich vertreten seien, oder nur einzeln vorkämen u. s. w.

Ein Gehülfe würde leichter eine bessere Vertheilung der Stände herbeiführen können, als es hier der blinde Zufall gethan. Eine Beobachtungsreihe, bei welcher der Gehülfe etwa blos immer ganze Zehntel stellt und der Beobachter auch nur solche angibt, sieht viel glätter aus, entspricht aber nicht so gut der Wirklichkeit; z. B. Casselmann beobachtet, geordnet nach dem Stande:

**III.**

| *W* | *A* | *A = W +* | |
|---|---|---|---|
| *n*,0 | *n*,0 | 0 | |
| 0 | ,0 | 0 | |
| 1 | ,1 | 0 | |
| 1 | ,1 | 0 | |
| 2 | ,2 | 0 | |
| 2 | ,2 | 0 | |
| 3 | ,2 | −1 | |
| 3 | ,3 | 0 | |
| 4 | ,3 | −1 | |
| 4 | ,4 | 0 | |
| 5 | ,5 | 0 | |
| 5 | ,5 | 0 | |
| 6 | ,6 | 0 | |
| 6 | ,7 | | +1 |
| 7 | ,7 | 0 | |
| 7 | ,8 | | +1 |
| 8 | ,8 | 0 | |
| 8 | ,9 | | +1 |
| 9 | ,9 | 0 | |
| 9 | ,9 | 0 | |

Mittel: $A = W + 0'',005$.

B. Appulse. In den Beobachtungen der Appulse nach Art 1) fand ich noch keinen wesentlichen Unterschied von den Lichtblitz-

beobachtungen *). Daher möge hier nur noch ein Beispiel der Beobachtung nach Art 4) folgen:

**IV.**

| No. | W | A | A = W + | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | n",03 | n",05 | +2 | | |
| 21 | ,06 | ,10 | +4 | | |
| 32 | ,07 | ,05 | | | −2 |
| 2 | ,07 | ,10 | +3 | | |
| 1 | ,10 | ,10 | | 0 | |
| 11 | ,16 | ,20 | +4 | | |
| 30 | ,20 | ,15 | +5 | | |
| 3 | ,20 | ,20 | | 0 | |
| 14 | ,20 | ,25 | +5 | | |
| 18 | ,21 | ,25 | +4 | | |
| 15 | ,24 | ,30 | +6 | | |
| 5 | ,25 | ,30 | +5 | | |
| 10 | ,26 | ,30 | +4 | | |
| 13 | ,27 | ,30 | +3 | | |
| 16 | ,30 | ,35 | +5 | | |
| 7 | ,43 | ,45 | +2 | | |
| 12 | ,43 | ,50 | +7 | | |
| 25 | ,50 | ,50 | | 0 | |
| 28 | ,53 | ,50 | | | −3 |
| 20 | ,54 | ,60 | +6 | | |
| 9 | ,59 | ,60 | +1 | | |
| 22 | ,68 | ,65 | | | −3 |
| 23 | ,70 | ,70 | | 0 | |
| 27 | ,74 | ,70 | | | −4 |
| 24 | ,74 | ,75 | +1 | | |
| 17 | ,75 | ,80 | +5 | | |
| 19 | ,76 | ,80 | +4 | | |
| 26 | ,82 | ,80 | | | −2 |
| 4 | ,83 | ,85 | +2 | | |
| 8 | ,83 | ,90 | +7 | | |
| 6 | ,87 | ,95 | +8 | | |
| 29 | ,92 | ,95 | +3 | | |
| 33 | ,96 | ,95 | | | −1 |

Mittel: $A = W + 0'',02$

$m = 0'',036$

od. dieselb. Beobacht., Differenzen von —7,5 bis —2,5 für —5 Hundertel erklärt
„ —2,5 „ +2,5 „ 0 „ „
„ +2,5 „ +7,5 „ +5 „ „
und nach der Reihenfolge zusammengestellt:

| No. | A = W + | | |
|---|---|---|---|
| | + | | − |
| 1 | | 0 | |
| 2 | 5 | | |
| 3 | | 0 | |
| 4 | | 0 | |
| 5 | 5 | | |
| 6 | 10 | | |
| 7 | | 0 | |
| 8 | 5 | | |
| 9 | | 0 | |
| 10 | 5 | | |
| 11 | 5 | | |
| 12 | 5 | | |
| 13 | 5 | | |
| 14 | 5 | | |
| 15 | 5 | | |
| 16 | 5 | | |
| 17 | 5 | | |
| 18 | 5 | | |
| 19 | 5 | | |
| 20 | 5 | | |
| 21 | 5 | | |
| 22 | | | 5 |
| 23 | | 0 | |
| 24 | | 0 | |
| 25 | | 0 | |
| 26 | | 0 | |
| 27 | | | 5 |
| 28 | | | 5 |
| 29 | 5 | | |
| 30 | 5 | | |
| 31 | | 0 | |
| 32 | | 0 | |
| 33 | | 0 | |

Appulsbeobachtungen ohne Scale nach Art 2) sind lange nicht so sicher, es finden sich da die *m* zu etwa 0",06, bei Primavista

*) Dagegen zeigte sich, Astron. Nachrichten 1838. No. 351 und 352, bei Appulsbeobachtungen am Passage-Instrument die Personaldifferenz weit bedeutender als bei Lichtblitzen. Es scheint dies noch einen specifischen Grund zu haben, u. A. vielleicht das längere Verweilen der Sterne von hoher Declination hinter dem Faden. — Die Federpendelbeobachtungen rangirten einmal mit dem Passage-Instrument, einmal mit den Lichtblitzen.

bis zu 0″,09. Die Unsicherheit im Schätzen der Entfernungen rührt natürlich zum grössten Theile her von der Schwierigkeit, das sich Bewegende an einem bestimmten Punkte und in einem vorgeschriebenen Momente zu fixiren. Bei einem ruhenden Punkte ist die Schätzung viel genauer. Ich zeichnete z. B. auf Papier 30 Linien von der Länge eines Zolls, und hinein irgendwo einen Punkt, schätzte die Entfernung desselben von den Enden nach dem Augenmaass zuerst mit Musse. Als ich sie darauf mit Zirkel und Maassstab mass, ergab sich: $A = W + 0{,}003$ im Mittel; $m = 0{,}009$. Hernach wurden dieselben Linien, jede nur einen Moment betrachtet, und der Gesammteindruck aus der Erinnerung aufgeschrieben; da fand sich $A = W - 0{,}06$ und $m = 0{,}024$.

Darf ich nun aus den Beobachtungen *) schon jetzt einen Schluss ziehen, so scheint sich mir Folgendes herauszustellen:

1) dass eine grössere Abweichung (eine oder mehre Zehntelsecunden) in der Angabe eines Beobachters von der Wahrheit nicht darauf beruhe, dass es bei demselben etwa einer so viel längern Zeit bedarf, um den Schalleindruck zum Bewusstsein zu bringen, als den Lichteindruck, oder umgekehrt. Ich glaube, dass Licht- und Schalleindruck nach einer sehr kurzen Zeit — in weniger noch als 1 Hundertelsecunde — und wahrscheinlich in gleicher Zeit, worauf es allein ankommt **), zum Bewusstsein kommen kann, dass also eine so grosse Personaldifferenz nicht etwa in der Einrichtung der menschlichen Organe oder der Seele nothwendig begründet liege, dass vielmehr ein möglicher, in der Natur begründeter Unterschied in der Receptionszeit (zufällige, aber gewiss seltene Abnormitäten abgerechnet) sich höchstens bis in die ersten Hundertelsecunden erstrecken. — Weit über die Hälfte der einzelnen Beobachtungen (ohne volle Secunde und in Musse betrachtet) weichen nicht mehr als 0″,05 von den Angaben des Instruments ab, ebenso liegen die Gesammtmittel der Beobachtungen (Abweichungen einzelner Beobachtungen, grösser als 0″,25, die sporadisch in geringer Menge vorkommen, ausgeschlossen) fast alle innerhalb der Grenzen $A = W \pm 0''{,}05$;

---

*) Zahlreichere Beobachtungsreihen habe ich eigentlich nur noch von Dr. Casselmann (zu Wiesbaden). Die übrigen Beobachter beobachteten nur mehr oder weniger gelegentlich; daher die Geübteren und Sicheren derselben nur durch eine geringere Zahl von Beobachtungen vertreten sind.

**) Nach Helmholtz's Versuchen pflanzt sich ein Gefühl zum Gehirn mit einer Geschwindigkeit von ca. 180 Fuss in der Secunde fort.

2) dass vielmehr die Abweichung, um die es sich hier handelt, ihren Grund in ungleicher Aufmerksamkeit, Ueberraschung, mangelhafter Erinnerung der Folge der Licht- und Schallphänomen u. s. w. finde, ein constanteres Element aber unter andern von einer unrichtigen Angewöhnung des Anschauens und Schätzens, oder der Fixirung verschiedener Momente des Licht- und Schalleindrucks u. s. w. herrühre, dass daher die Personaldifferenz durch Uebung nach einer Methode, die die begangenen Fehler erkennen lässt, — wenn Jemand die Zeit und Mühe darauf verwenden wollte — auf ein Minimum reducirt werden könnte;

3) dass die individuelle Geneigtheit, von der Wahrheit abzuweichen, nicht unveränderlich ist. Es fanden sich nicht blos an verschiedenen Tagen verschiedene Mittel aus den Beobachtungsreihen, bald $A = W +$, bald $A = W -$, sondern die Abweichung war auch im Einzelnen für verschiedene Zehntel verschieden und an verschiedenen Tagen variabel.

So hatte ich z. B. in Probe I. entschieden die Geneigtheit, die Stände $n,6$; $n,7$; $n,8$ zu hoch anzugeben, in Probe II. dagegen taxirte ich dieselben Stände hartnäckig zu tief; in beiden aber übereinstimmend die Stände $n,20$; $n,30$; $n,40$ zu hoch; in beiden scheine ich in der Angabe die $n,6$ gleichsam ganz vergessen zu haben, während das in andern Reihen anders ist, u. s. w. Im Allgemeinen ist die Abweichung beim Stande $n'',0$ entschieden am geringsten, danach kommen die geringsten Abweichungen bei $n'',5$ vor. Dann folgen etwa in der Richtigkeit die Angaben des Standes $n,9$ und $n,1$. Am fehlerhaftesten zeigten sie sich bei den Ständen $n,2$; $n,3$; $n,4$ so wie $n,6$; $n,7$; $n,8$. Dies gilt namentlich, wenn man bei der Beobachtung und Schätzung sich gleichsam dem Gefühl überlässt, wie es wohl geschehen muss, wenn man die vollen Secunden mitzuzählen hat. Lässt man die vollen Secunden unberücksichtigt und schlägt in Gedanken gleichsam den Takt, d. h. zählt man in jeder Secunde etwa 0, 1, 2, 3 (d. h. $n,0$; $n,25$; $n,5$; $n,75$), so scheinen diese Stände am besten beobachtet zu werden; doch bleibt, scheint's, der hörbare Secundenschlag immer der beste Leiter *).

Diese Veränderlichkeit der Angabendifferenz zu verschiedenen Zeiten, und Verschiedenheit und Veränderlichkeit für verschiedene Zehntel findet sich auch bei wirklichen Beobachtungen von

*) Hiernach wäre zu erwarten, dass man mit einer halbe Secunden schlagenden Uhr sicherere Beobachtungen erzielen könnte, als mit einer gewöhnlichen Secundenuhr.

Heliotrop- und Pulversignalen von Gauss und Goldschmidt; s. Astron. Nachrichten a. a. O. (1838, No. 351 und 352). Hier ergibt sich im Mittel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| am 25. August, | Gauss | = | Goldschmidt, | + 0″,14, | m = 0″,29; |
| „ 6. Septbr. | „ | | „ | + 0″,19, | m = 0″,25; |
| „ 7. „ | „ | | „ | − 0″,06, | m = 0″,25; |
| „ 8. „ | „ | | „ | + 0″,06, | m = 0″,23; |
| „ 9. „ | „ | | „ | − 0″,03, | m = 0″,26. |

Am 25. August finden sich (zufällig) nur die Goldschmidtschen mit 4, 5, 6, 7, 8, 9 Zehnteln *) bezeichneten Beobachtungen vertreten; bei diesen allen findet sich vorwaltend: Gauss (G) = Goldschmidt (𝔊) +

| | | | |
|---|---|---|---|
| Am 7. Sept. findet sich bei den 𝔊schen Angaben | 8, 9, 0 Zehntel: | | G = 𝔊 + |
| | 2, 3, 5, 6, 7 | „ | „ „ − |
| | 1, 4 | „ | kein Zeich. |
| „ 8. „ „ „ „ „ „ „ | 1, 2, 3, 5, 8 | „ | G = 𝔊 + |
| | 6, 0 | „ | „ „ − |
| | 4, 7, 9 | „ | kein Zeich. |
| „ 9. „ „ „ „ „ „ „ | 3, 6 | „ | G = 𝔊 − |
| | 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 | „ | kein Zeich. |

entschieden vorwaltend.

---

Durch die galvanisch registrirenden Uhren (von Locke und Lamont) — die ich leider noch nicht aus eigner Erfahrung kennen zu lernen Gelegenheit hatte — wird die Sicherheit der Beobachtungen ohne Zweifel bedeutend gesteigert, weil durch den Wegfall der Aufmerksamkeit auf die Zeit die geistige Thätigkeit bei der Beobachtung viel einfacher, diese also sehr erleichtert wird. (Aehnlich wie bei der „Art 4) Appulse zu beobachten.“)

Eine Personaldifferenz wird aber, wenn auch in engere Grenzen eingeschlossen, doch bleiben, namentlich in so weit sie ihren Grund hat in Auffassung verschiedener Momente des Lichteindruckes, in Ueberraschung und ungleicher Aufmerksamkeit. Die

*) Welche Zehntel es in den Original-Beobachtungen waren, ist nicht mehr zu sehen, da diese hier schon mit der Correction des Uhrgangs u. s. w. versehen sind.

Quelle der verschiedenen Zeitschätzung und Fixirung verschiedener Momente des Schalleindrucks wird wegfallen, — dadurch natürlich auch die Veränderlichkeit für verschiedene Zehntel, — die „absolute“ Differenz aber wird grösser sein, als sie bei den Beobachtungen „aus freier Hand“ zu sein braucht, weil es bei diesen nur der Zeit bedarf, bis der Gesichts- und Gehöreindruck sich bis zum Gehirn fortpflanzt, dort aber noch die — wahrscheinlich bei verschiedenen Individuen und in verschiedenen Gemüthsverfassungen mehr veränderliche — Zeit hinzukommt, die vom Augenblick des Bewusstwerdens des Gesichtseindrucks vergeht, bis die Hand die Taste berührt, und da nach Helmholtz bis zu etwa 2 Zehntelsecunden gehen soll.

---

Schliesslich kann ich nicht umhin, den Wunsch auszusprechen, dass Männer, die in solchen Beobachtungen geübt sind, auch einmal an einem, dem besprochenen ähnlichen Instrumente Beobachtungen anstellen möchten. — Das meinige würde natürlich gern zu Gebote stehen, um vorläufig Erfahrungen zu machen. Zu genaueren Versuchen aber (die meine Ansichten bestätigen und erweitern, modificiren oder verwerfen würden), wäre es wünschenswerth, dass der Eine oder Andere, dem hinreichende Fonds zu Gebote stehen, sich ein eigenes, von den Mängeln des meinigen freies Instrument, namentlich auch für „galvanische“ Uhren, anfertigen lasse. Ich selbst hoffe auch im Laufe der Zeit, so weit es meine Kräfte und Mittel gestatten, diese Beobachtungen fortsetzen zu können, um über noch manchen Punkt nähern Aufschluss zu erhalten.

---

# II.

## Ueber einige Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen, nach „Résumés analytiques par M. Augustin Cauchy. A Turin. 1833. p. 14."

Von
dem Herausgeber.

---

In dem oben genannten, vieles Schöne enthaltenden Werkchen hat Cauchy für den bekannten Elementar-Satz, dass jede ganze rationale algebraische Function von $x$, welche für $x=a$ verschwindet, durch $x-a$ ohne Rest theilbar ist, einen einfachen Beweis gegeben, der bekannter zu sein verdient, als er zu sein scheint; zugleich aber hat der leider uns durch den Tod entrissene grosse Mathematiker, dem die Wissenschaft so ungemein Vieles verdankt, daran verschiedene Folgerungen geknüpft, welche zu Sätzen führen, die zur Abkürzung mancher Beweise sehr geeignet sind. Wenn auch Einiges hiervon schon in der Analyse algébrique. Chap. IV. vorkommt, so scheint uns die in dem oben genannten neueren Werkchen gegebene Darstellung bemerkenswerth genug und namentlich von Werth für den Unterricht zu sein, so dass wir es für zweckmässig halten, auf dieselbe in den folgenden Mittheilungen aufmerksam zu machen.

### I.

Wenn

$$X = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $x$ ist, und man setzt in derselben $y+a$ für $x$, so erhält man

nach gehöriger Entwickelung der Potenzen von $y+a$ für $X$ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$X = B_0y^n + B_1y^{n-1} + B_2y^{n-2} + \ldots + B_{n-1}y + B_n,$$

wobei zugleich aus der Natur dieser Entwickelung auf der Stelle ganz von selbst ersichtlich ist, dass jederzeit $A_0 = B_0$ ist. Führt man nun in den letzteren Ausdruck von $X$ für $y$ seinen Werth $x-a$ ein, so gelangt man zu dem folgenden Ausdrucke von $X$:

$$X = B_0(x-a)^n + B_1(x-a)^{n-1} + B_2(x-a)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(x-a) + B_n,$$

der sich, weil nach dem Obigen $A_0 = B_0$ ist, auch unter der Form

$$X = A_0(x-a)\left\{(x-a)^{n-1} + \frac{B_1}{A_0}(x-a)^{n-2} + \frac{B_2}{A_0}(x-a)^{n-3} + \ldots \right. \\ \left. \ldots + \frac{B_{n-2}}{A_0}(x-a) + \frac{B_{n-1}}{A_0}\right\} \\ + \frac{B_n}{A_0}$$

oder der Kürze wegen unter der Form

$$X = A_0(x-a)X_1 + \frac{B_n}{A_0}$$

darstellen lässt, wo $X_1$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von $x$ bezeichnet, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes offenbar die Einheit ist. Wenn nun die Function $X$ so beschaffen ist, dass sie für $x=a$ verschwindet, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, wenn man in derselben $a$ für $x$ setzt, unmittelbar

$$\frac{B_n}{A_0} = 0,$$

wobei man zu beachten hat, dass diese Grösse natürlich von $x$ ganz unabhängig ist; und es ist also unter der gemachten Voraussetzung für jedes $x$:

$$X = A_0(x-a)X_1,$$

wo nach dem Obigen $X_1$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von $x$ ist, deren höchstes Glied die Einheit zum Coefficienten hat.

## II.

Wir wollen nun annehmen, dass die Function $X$ für jeden der $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots . a_n$$

von $x$ verschwinde, so ist nach I. zuerst

$$X = A_0(x - a_1)X_1,$$

wo $X_1$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von $x$ bezeichnet, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes die Einheit ist. Weil nun aber $X$, und folglich auch

$$A_0(x - a_1)X_1$$

für den Werth $a_2$ von $x$ verschwindet, für diesen Werth von $x$ aber $x - a_1$ nicht verschwindet, weil nach der Voraussetzung $a_1$ und $a_2$ ungleich sind, so muss nothwendig $X_1$ für den Werth $a_2$ von $x$ verschwinden, und nach I. ist folglich:

$$X_1 = (x - a_2)X_2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$X = A_0(x - a_1)(x - a_2)X_2,$$

wo $X_2$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-2)$ten Grades von $x$ bezeichnet, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes die Einheit ist. Nun verschwindet $X$, also auch

$$A_0(x - a_1)(x - a_2)X_2,$$

ferner für den Werth $a_3$ von $x$; weil aber nach der Voraussetzung die Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$ sämmtlich unter einander ungleich sind, so verschwindet $(x - a_1)(x - a_2)$ für den Werth $a_3$ von $x$ nicht; und es muss also $X_2$ für diesen Werth von $x$ nothwendig verschwinden, woraus sich nach I.

$$X_2 = (x - a_3)X_3,$$

also

$$X = A_0(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)X_3$$

ergiebt, wo $X_3$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-3)$ten Grades von $x$ bezeichnet, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes die Einheit ist. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich gelangt man zu der Gleichung

$$X = A_0(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots . (x - a_{n-1})X_{n-1},$$

wo $X_{n-1}$ eine ganze rationale algebraische Function des 1sten Grades von $x$ bezeichnet, in welcher das höchste Glied die Einheit zum Coefficienten hat. Nun verschwindet aber $X$, also auch

$$A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_{n-1})X_{n-1},$$

auch für den Werth $a_n$ von $x$; und da die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\ldots a_{n-1}, a_n$ nach der Voraussetzung sämmtlich unter einander ungleich sind, so verschwindet das Product

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_{n-1})$$

für den Werth $a_n$ von $x$ nicht, woraus sich ergiebt, dass $X_{n-1}$ für diesen Werth von $x$ verschwinden muss. Nach dem Obigen ist aber $X_{n-1}$ eine ganze rationale algebraische Function des 1sten Grades von $x$, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes die Einheit ist, woraus sich ergiebt, dass diese Function, welche für $x=a_n$ verschwindet, nur von der Form $x-a_n$ sein kann, so dass also

$$X_{n-1}=x-a_n,$$

und folglich nach dem Obigen

$$X=A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

ist.

Hiernach sind wir also berechtigt, den folgenden Satz auszusprechen:

**Wenn die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $x$:**

$$X=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots.+A_{n-1}x+A_n$$

**für die $n$ sämmtlich unter einander ungleichen Werthe**

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots.a_n$$

**verschwindet, so ist immer:**

$$X=A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_n).$$

## III.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

**Die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von $x$:**

$$X=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots.+A_{n-1}x+A_n$$

**kann höchstens für $n$ ungleiche Werthe von $x$ verschwinden.**

Denn verschwände $X$ für die $n+1$ ungleichen Werthe

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots\ldots a_n, \quad \alpha$$

von $x$, so wäre nach II.

$$X = A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n),$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $X$ auch für $x=\alpha$ verschwindet:

$$A_0(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)\ldots\ldots(\alpha-a_n)=0,$$

was ungereimt ist, da nach der Voraussetzung keiner der Factoren des Products auf der linken Seite des Gleichheitszeichens verschwindet.

## IV.

**Wenn zwei ganze rationale algebraische Functionen des $n$ten Grades von $x$:**

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n,$$
$$B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots\ldots + B_{n-1}x + B_n$$

**für mehr als $n$ ungleiche Werthe von $x$ gleiche Werthe erhalten, so sind diese beiden Functionen identisch gleich; d. h. die sämmtlichen Coefficienten gleich hoher Potenzen von $x$ sind in beiden Functionen dieselben, oder es ist:**

$$A_0=B_0, \quad A_1=B_1, \quad A_2=B_2, \ldots\ldots A_{n-1}=B_{n-1}, \quad A_n=B_n.$$

Wären die Gleichungen

$$A_0=B_0, \quad A_1=B_1, \quad A_2=B_2, \ldots\ldots A_{n-1}=B_{n-1}, \quad A_n=B_n$$

nicht sämmtlich erfüllt, so würde in allen Fällen

$$(A_0-B_0)x^n + (A_1-B_1)x^{n-1} + \ldots\ldots + (A_{n-1}-B_{n-1})x + A_n - B_n$$

nach der Voraussetzung eine ganze rationale algebraische Function von $x$ sein, welche für eine ihren Grad übersteigende Anzahl ungleicher Werthe von $x$ verschwände, was nach III. ungereimt ist.

## V.

**Zwei ganze rationale algebraische Functionen von $x$ sind identisch gleich, wenn sie für eine den Grad**

**einer jeden übersteigende Anzahl ungleicher Werthe von $x$ gleiche Werthe erhalten.**

Sind die beiden Functionen von gleich hohem Grade, so folgt der Satz unmittelbar aus IV.; sind dieselben dagegen von ungleichem Grade, so kann man sich die Function des niedrigeren Grades durch Hinzufügung einiger Glieder mit verschwindenden Coefficienten jederzeit zu einer Function von gleich hohem Grade mit der Function des höheren Grades ergänzt denken, und hat dann wieder den ersten Fall.

Anmerkung. Freilich würde unter den gemachten Voraussetzungen die Function des höheren Grades eigentich immer nur scheinbar von einem so hohen Grade sein, da ja eben der Satz aussagt, dass sie mit der Function des niedrigern Grades identisch ist, also nothwendig einige ihrer Anfangsglieder verschwinden müssen.

## VI.

**Wenn zwei ganze rationale algebraische Functionen zweier veränderlicher Grössen $x$, $y$, die im Allgemeinen von der Form**

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{A}_0x^n+\overset{0}{A}_1x^{n-1}+\overset{0}{A}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{0}{A}_{n-1}x+\overset{0}{A}_n\\
&+(\overset{1}{A}_0x^n+\overset{1}{A}_1x^{n-1}+\overset{1}{A}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{1}{A}_{n-1}x+\overset{1}{A}_n)y\\
&+(\overset{2}{A}_0x^n+\overset{2}{A}_1x^{n-1}+\overset{2}{A}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{2}{A}_{n-1}x+\overset{2}{A}_n)y^2\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+(\overset{m}{A}_0x^n+\overset{m}{A}_1x^{n-1}+\overset{m}{A}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{m}{A}_{n-1}x+\overset{m}{A}_n)y^m
\end{aligned}$$

**und**

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{B}_0x^n+\overset{0}{B}_1x^{n-1}+\overset{0}{B}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{0}{B}_{n-1}x+\overset{0}{B}_n\\
&+(\overset{1}{B}_0x^n+\overset{1}{B}_1x^{n-1}+\overset{1}{B}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{1}{B}_{n-1}x+\overset{1}{B}_n)y\\
&+(\overset{2}{B}_0x^n+\overset{2}{B}_1x^{n-1}+\overset{2}{B}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{2}{B}_{n-1}x+\overset{2}{B}_n)y^2\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+(\overset{m}{B}_0x^n+\overset{m}{B}_1x^{n-1}+\overset{m}{B}_2x^{n-2}+\ldots+\overset{m}{B}_{n-1}x+\overset{m}{B}_n)y^m
\end{aligned}$$

**sind, für eine $n$ übersteigende Anzahl ungleicher**

Werthe von $x$, und für eine $m$ übersteigende Anzahl ungleicher Werthe von $y$, wie man auch diese Werthe von $x$ und $y$ unter einander combiniren mag, gleiche Werthe erhalten; so sind die beiden Functionen jederzeit einander **identisch** gleich.

Wenn

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots;$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5, \ldots$$

respective die Werthe von $x$, $y$ sind, für welche die beiden Functionen gleiche Werthe erhalten, so kann man sich zuerst für $x$ den Werth $a_1$, für $y$ alle Werthe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$; dann für $x$ den Werth $a_2$, für $y$ alle Werthe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$; für $x$ ferner den Werth $a_3$, für $y$ alle Werthe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$; u. s. f. gesetzt denken, und schliesst dann aus IV. unmittelbar, dass die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $y$ in den beiden obigen Functionen sämmtlich gleiche Werthe erhalten, wenn man für $x$ die Werthe $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ setzt, woraus dann ferner wiederum nach IV. folgt, dass

$$\overset{0}{A}_0=\overset{0}{B}_0,\quad \overset{0}{A}_1=\overset{0}{B}_1,\quad \overset{0}{A}_2=\overset{0}{B}_2, \ldots, \overset{0}{A}_n=\overset{0}{B}_n;$$

$$\overset{1}{A}_0=\overset{1}{B}_0,\quad \overset{1}{A}_1=\overset{1}{B}_1,\quad \overset{1}{A}_2=\overset{1}{B}_2, \ldots, \overset{1}{A}_n=\overset{1}{B}_n;$$

$$\overset{2}{A}_0=\overset{2}{B}_0,\quad \overset{2}{A}_1=\overset{2}{B}_1,\quad \overset{2}{A}_2=\overset{2}{B}_2, \ldots, \overset{2}{A}_n=\overset{2}{B}_n;$$

u. s. w.

$$\overset{m}{A}_0=\overset{m}{B}_0,\quad \overset{m}{A}_1=\overset{m}{B}_1,\quad \overset{m}{A}_2=\overset{m}{B}_2, \ldots, \overset{m}{A}_n=\overset{m}{B}_n$$

ist, die beiden Functionen also identisch gleich sind, wie bewiesen werden sollte.

Wenn also etwa die beiden obigen Functionen für alle positiven ganzen Werthe von $x$ und $y$ gleiche Werthe erhalten, so sind sie identisch gleich, und erhalten also gleiche Werthe, was man auch für Werthe den Grössen $x$ und $y$ beilegen mag.

Auch wenn die beiden obigen Functionen nur für alle positiven ganzen Werthe von $x$, $y$, welche grösser sind als eine gewisse endliche positive Grösse, gleiche Werthe erhalten, sind sie identisch gleich, und erhalten also gleiche Werthe, was man auch für Werthe den Grössen $x$ und $y$ beilegen mag.

Anmerkung. Die keiner Schwierigkeit unterliegende Erweiterung des obigen Satzes auf ganze rationale algebraische Functionen mit mehr als zwei veränderlichen Grössen kann hier füglich dem Leser überlassen werden.

## VII.

Ein lehrreiches Beispiel für die Anwendung der vorhergehenden Sätze liefern die folgenden Betrachtungen.

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist, wenn $\lambda$ und $\mu$ positive ganze Zahlen bezeichnen, wie in den Elementen gelehrt wird:

$$(1+x)^\lambda = 1 + (\lambda)_1 x + (\lambda)_2 x^2 + (\lambda)_3 x^3 + \ldots + (\lambda)_\lambda x^\lambda,$$
$$(1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + (\mu)_3 x^3 + \ldots + (\mu)_\mu x^\mu.$$

Weil aber bekanntlich die Binomial-Coefficienten

$$(\lambda)_{\lambda+1},\quad (\lambda)_{\lambda+2},\quad (\lambda)_{\lambda+3},\quad (\lambda)_{\lambda+4},\ldots;$$
$$(\mu)_{\mu+1},\quad (\mu)_{\mu+2},\quad (\mu)_{\mu+3},\quad (\mu)_{\mu+4},\ldots$$

sämmtlich verschwinden, so kann man diesen Reihen immer respective eine beliebige Anzahl der Glieder

$$(\lambda)_{\lambda+1}x^{\lambda+1},\quad (\lambda)_{\lambda+2}x^{\lambda+2},\quad (\lambda)_{\lambda+3}x^{\lambda+3},\quad (\lambda)_{\lambda+4}x^{\lambda+4},\ldots;$$
$$(\mu)_{\mu+1}x^{\mu+1},\quad (\mu)_{\mu+2}x^{\mu+2},\quad (\mu)_{\mu+3}x^{\mu+3},\quad (\mu)_{\mu+4}x^{\mu+4},\ldots$$

beifügen, ohne die Richtigkeit der obigen Gleichungen im Geringsten zu stören, und übersieht nun auf der Stelle, dass man sich immer so viele dieser Glieder noch beigefügt denken kann, dass, wenn man das Product

$$(1+x)^\lambda (1+x)^\mu$$

bildet, darin für jedes positive ganze $k$ das Glied

$$\{(\lambda)_k + (\lambda)_{k-1}(\mu)_1 + (\lambda)_{k-2}(\mu)_2 + \ldots + (\lambda)_1(\mu)_{k-1} + (\mu)_k\}x^k$$

wirklich vorkommt, oder dass man immer die für jedes $x$ bestehende Gleichung

$$\begin{aligned}
&(1+x)^\lambda (1+x)^\mu \\
= &\; 1 \\
&+ \{(\lambda)_1 + (\mu)_1\}x \\
&+ \{(\lambda)_2 + (\lambda)_1(\mu)_1 + (\mu)_2\}x^2 \\
&+ \{(\lambda)_3 + (\lambda)_2(\mu)_1 + (\lambda)_1(\mu)_2 + (\mu)_3\}x^3 \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&+ \{(\lambda)_k + (\lambda)_{k-1}(\mu)_1 + (\lambda)_{k-2}(\mu)_2 + \ldots + (\lambda)_1(\mu)_{k-1} + (\mu)_k\}x^k \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

hat, wo, wie gesagt, $k$ jede positive ganze Zahl bezeichnen kann.

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist ferner für jedes $x$:

$$(1+x)^{\lambda+\mu}=1+(\lambda+\mu)_1 x+(\lambda+\mu)_2 x^2+(\lambda+\mu)_3 x^3+\ldots+(\lambda+\mu)_{\lambda+\mu} x^{\lambda+\mu}.$$

Weil aber die Binomial-Coefficienten

$$(\lambda+\mu)_{\lambda+\mu+1},\quad (\lambda+\mu)_{\lambda+\mu+2},\quad (\lambda+\mu)_{\lambda+\mu+3},\ \ldots$$

sämmtlich verschwinden, so kann man auch setzen:

$$(1+x)^{\lambda+\mu}=1+(\lambda+\mu)_1 x+(\lambda+\mu)_2 x^2+(\lambda+\mu)_3 x^3+\ldots+(\lambda+\mu)_k x^k+\ldots,$$

wo wieder $k$ jede positive ganze Zahl bezeichnen kann.

Nun ist aber für jedes $x$ bekanntlich

$$(1+x)^{\lambda+\mu}=(1+x)^{\lambda}(1+x)^{\mu},$$

und man hat also nach dem Vorhergehenden die für jedes $x$ geltende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&1+(\lambda+\mu)_1 x+(\lambda+\mu)_2 x^2+(\lambda+\mu)_3 x^3+\ldots+(\lambda+\mu)_k x^k+\ldots\\
=\ &1\\
&+\{(\lambda)_1+(\mu)_1\}x\\
&+\{(\lambda)_2+(\lambda)_1(\mu)_1+(\mu)_2\}x^2\\
&+\{(\lambda_3)+(\lambda)_2(\mu)_1+(\lambda)_1(\mu)_2+(\mu)_3\}x^3\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+\{(\lambda)_k+(\lambda)_{k-1}(\mu)_1+(\lambda)_{k-2}(\mu)_2+\ldots+(\lambda)_1(\mu)_{k-1}+(\mu)_k\}x^k\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

also ist nach den in IV. und V. bewiesenen Sätzen, da diese Gleichung für jedes $x$ gilt:

$$(\lambda+\mu)_1=(\lambda)_1+(\mu)_1,$$

$$(\lambda+\mu)_2=(\lambda)_2+(\lambda)_1(\mu_1)+(\mu)_2,$$

$$(\lambda+\mu)_3=(\lambda)_3+(\lambda)_2(\mu)_1+(\lambda)_1(\mu)_2+(\mu)_3,$$

u. s. w.

$$(\lambda+\mu)_k=(\lambda)_k+(\lambda)_{k-1}(\mu)_1+(\lambda)_{k-2}(\mu)_2+\ldots+(\lambda)_1(\mu)_{k-1}+(\mu)_k,$$

u. s. w.

wo $\lambda$, $\mu$, $k$ alle positiven ganzen Zahlen sein können.

Setzen wir nun aber in der Gleichung

$$(\lambda+\mu)_k=(\lambda)_k+(\lambda)_{k-1}(\mu)_1+(\lambda)_{k-2}(\mu)_2+\ldots+(\lambda)_1(\mu)_{k-1}+(\mu)_k$$

für alle Binomial-Coefficienten ihre entwickelten Werthe, so nimmt diese Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)(\lambda+\mu-2)\ldots(\lambda+\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

$$=\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)}{1\ldots k}+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+2)}{1\ldots(k-1)}\cdot\frac{\mu}{1}$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+3)}{1\ldots(k-2)}\cdot\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+4)}{1\ldots(k-3)}\cdot\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}$$

u. s. w.

$$+\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1\ldots(k-1)}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1\ldots k},$$

und man übersieht auf der Stelle, dass die Grössen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung, wenn man $\lambda$ und $\mu$ als veränderliche Grössen betrachtet, unter der Form der in VI. mit einander verglichenen Functionen von $x$ und $y$ enthalten sind, oder wenigstens nach gehöriger Entwickelung immer auf diese Form gebracht werden können. Also gilt die obige Gleichung nach VI., weil sie für alle positiven ganzen Werthe von $\lambda$ und $\mu$ gilt, für alle ganz beliebigen Werthe von $\lambda$ und $\mu$, und es ist daher für jedes $\lambda$ und $\mu$, und für jedes positive ganze $k$:

$$(\lambda+\mu)_k=(\lambda)_k+(\lambda)_{k-1}(\mu)_1+(\lambda)_{k-2}(\mu)_2+\ldots+(\lambda)_1(\mu)_{k-1}+(\mu)_k.$$

Die Bedeutung dieser für jedes $\lambda$ und $\mu$ gültigen Gleichung *) für den Beweis des allgemeinen binomischen Lehrsatzes ist bekannt genug und braucht daher hier nicht weiter erläutert zu werden.

Es kam hier bloss darauf an, zu zeigen, wie mittelst der im Obigen bewiesenen Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen oft Sätze, die für's Erste bloss unter gewissen Ein-

*) Einen allgemeinen Beweis dieser sehr wichtigen Gleichung durch Rechnung s. m. z. B. in meinem Aufsatze Thl. I. Nr. X.

schränkungen oder unter Voraussetzung der Erfüllung gewisser besonderer Bedingungen bewiesen worden sind, oft ohne Weiteres zu völliger Allgemeinheit erhoben werden können, was zur Vereinfachung der analytischen Betrachtungen nicht selten wesentlich beiträgt und der Abkürzung des Vortrags förderlich ist.

---

## III.

# Stereometrische Sätze entsprechend den planimetrischen Sätzen oder harmonische und anharmonische Proportionen.

Von

Herrn Professor Dr. *Heis*

zu Münster.

---

1. Fünf nicht in einer Ebene liegende Strahlen mögen die beliebigen Ebenen (Taf. II. Fig. 1.) $ABCD$ und $abcd$ in den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ und $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ treffen. Verbindet man den Punkt $E$ mit den Eckpunkten des Vierecks $ABCD$ und $e$ mit den Eckpunkten des Vierecks $abcd$, so ist:

$$\frac{\Delta AED.\Delta BEC}{\Delta AEB.\Delta DEC}=\frac{\Delta aed.\Delta bec}{\Delta aeb.\Delta dec}.$$

**Beweis.** $$\frac{\Delta AED.\Delta BEC}{\Delta AEB.\Delta DEC}=\frac{\text{Pyr. }SAED.\text{Pyr. }SBEC}{\text{Pyr. }SAEB.\text{Pyr. }SDEC},$$

$$\frac{\Delta aed.\Delta bec}{\Delta aeb.\Delta dec}=\frac{\text{Pyr. }Saed.\text{Pyr. }Sbec}{\text{Pyr. }Saeb.\text{Pyr. }Sdec}.$$

Nach einem leicht geometrisch zu beweisenden Satze, „dass zwei dreiseitige Pyramiden, welche einen gleichen Körperwinkel haben, sich dem Inhalte nach wie die Producte aus den an den gleichen Körperwinkeln zusammenstossenden Kanten verhalten", ist:

$$\frac{\text{Pyr. } SAED}{\text{Pyr. } Saed} = \frac{SA.SD.SE}{Sa.Se.Sd},$$

$$\frac{\text{Pyr. } SBEC}{\text{Pyr. } Sbec} = \frac{SB.SE.SC}{Sb.Se.Sc},$$

$$\frac{\text{Pyr. } SAEB}{\text{Pyr. } Saeb} = \frac{SA.SE.SB}{Sa.Se.Sb},$$

$$\frac{\text{Pyr. } SDEC}{\text{Pyr. } Sdec} = \frac{SD.SE.SC}{Sd.Se.Sc}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\text{Pyr. } SAED . \text{Pyr. } SBEC}{\text{Pyr. } SAEB . \text{Pyr. } SDEC} : \frac{\text{Pyr. } Saed . \text{Pyr. } Sbec}{\text{Pyr. } Saeb . \text{Pyr. } Sdec} = 1:1,$$

somit:

$$\frac{\Delta AED . \Delta BEC}{\Delta AEB . \Delta DEC} = \frac{\Delta aed . \Delta bec}{\Delta aeb . \Delta dec}.$$

Leicht lässt sich einsehen, dass wenn an die Stelle des Vierecks ein $2n$Eck tritt, und sowohl durch Eckpunkte des $2n$Ecks, als durch einen beliebigen, in der Ebene des $2n$Ecks liegenden Punkt $2n+1$ Strahlen gelegt werden, dass alsdann für beliebige, die Strahlen durchschneidende Ebenen das Product der abwechselnd liegenden $n$ Dreiecke des $2n$Ecks, dividirt durch das Product der übrigen Dreiecke, constant ist.

2. $SABC$ (Taf. II. Fig. 2.) sei eine beliebige Pyramide, in die Grundfläche sei ein Dreieck $DEF$ eingeschrieben; nach $D, E, F$ seien die Strahlen $SD$, $SE$, $SF$ gezogen und sämmtliche sechs Strahlen durch eine zweite beliebige Ebene geschnitten, welche dieselben in den Punkten $a, b, c, d, e, f$ treffen möge; alsdann ist:

$$\frac{\Delta ADF . \Delta BED . \Delta FEC}{\Delta ABC . (\Delta DEF)^2} = \frac{\Delta adf . \Delta bec . \Delta fec}{\Delta abc . (\Delta def)^2}.$$

Es ist also das Product der äussern Dreiecke, dividirt durch das ganze Dreieck multiplicirt mit dem Quadrate des innern Dreiecks constant. Der Beweis ergiebt sich leicht nach obiger Anleitung.

Der folgende Satz ergiebt sich ebenfalls ganz leicht: „Ist dem Dreiecke *abc* (Taf. II. Fig. 3.) ein anderes *bdf* eingeschrieben, diesem ein drittes *ghi*, zieht man alsdann durch die Eckpunkte der einzelnen Dreiecke die neun Strahlen, durchschneidet dieselben durch eine beliebige Ebene und construirt die den gegebenen Dreiecken entsprechenden Dreiecke, so ist der Quotient

$$\frac{\Delta abf . \Delta bcd . \Delta efd . (\Delta ghi)^2}{\Delta bgh . \Delta gif . \Delta dhi . \Delta ace . \Delta bfd}$$

für alle entsprechenden Dreiecke constant."

Dieser Satz lässt sich noch erweitern. Zu bemerken ist, dass wenn man in obigen Quotienten die Buchstaben *a*, *b*, *c* u. s. w., welche zur Bezeichnung der Ecken der Dreiecke dienen, als Zahlen betrachtet, *abf* u. s. w. als Producte, dieser Quotient $= 1$ wird. Auf diesen Umstand achtend, wird man leicht auch für zusammengesetztere Figuren die constanten Quotienten aufstellen können.

---

## IV.

## Erweiterung der Sätze über harmonische und anharmonische Proportionen.

Von

Herrn Professor Dr. *Heis*

zu Münster.

---

Zwei beliebige gerade Linien *BG* und *bg* (Taf. II. Fig. 4.) mögen von sechs, von *A* ausgehenden Strahlen in den Punkten *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*; *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* getroffen werden. Die auf

einander folgenden Winkel der Strahlen seien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$. Alsdann ist:

$$\frac{BC.DE.FG}{CD.EF.BG} = \frac{\Delta ABC.\Delta ADE.\Delta AFG}{\Delta ACD.\Delta AEF.\Delta ABG}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha.\frac{1}{2}AD.AE.\sin\gamma.\frac{1}{2}AF.AG.\sin\varepsilon}{\frac{1}{2}AC.AD.\sin\beta.\frac{1}{2}AE.AF.\sin\delta.\frac{1}{2}AG.AB.\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\sin\gamma.\sin\varepsilon}{\sin\beta.\sin\delta.\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}.$$

Es folgt also hieraus, dass

$$\frac{BC.DE.FG}{CD.EF.BG} = \frac{bc.de.fg}{cd.ef.bg},$$

so wie

$$\frac{\Delta ABC.\Delta ADE.\Delta AFG}{\Delta CDA.\Delta EFA.\Delta BGA} = \frac{\Delta abc.\Delta ade.\Delta afg}{\Delta cda.\Delta efa.\Delta bga}.$$

Ist also:

$$BD.EC.FG = CG.DF.EF,$$

so ist auch

$$bd.ec.fg = cg.df.eb.$$

Leicht ist einzusehen, dass der Satz auch für 8, 10 u. s. w. Strahlen gelte.

Werden also $2n$ Strahlen von zwei beliebigen Geraden geschnitten, so ist das Product der $n$ abwechselnd liegenden Stücke der Linien dividirt durch das Product der übrigen $n-1$ abwechselnd liegenden Stücke und der ganzen Linie constant.

Für fünf Strahlen, welche zwei beliebige Linien in den Punkten $BCDEF$, $bcdef$ treffen, findet, wie sich leicht beweisen lässt, folgender Satz Statt:

$$\frac{BC.DE.FD}{CD.EF.DB} = \frac{bc.de.fd}{cd.ef.db}.$$

Ein ähnlicher Satz lässt sich für 7 überhaupt $2n-1$ Strahlen aufstellen.

# V.

## Sätze über das irreguläre Tetraeder *).

Von

Herrn Professor Dr. *Heis*,

zu Münster.

---

1. **Satz.** Stehen in einem beliebigen Tetraeder zwei Paar gegenüberstehender Kanten auf einander senkrecht, so steht auch das dritte Paar gegenüberstehender Kanten auf einander senkrecht.

**Beweis.** Es sei $AB \top DC$, $AC \top BD$. (Taf. II. Fig. 5.) Um zu beweisen, dass $AD \top BC$ sei, fälle man von $A$ und $B$ auf $DC$ und von $A$ und $C$ auf $BD$ Senkrechte. Aus der Eigenschaft, dass $AB \top DC$, ergibt sich, dass die ersteren Senkrechten in einem Punkte $E$ der Linie $DC$ zusammentreffen, und ebenso ergibt sich, dass die andern Senkrechten in einem Punkte $G$ auf der Linie $BD$ zusammenstossen. Verbindet man $A$ mit dem Durchschnitte $O$ der Linien $BE$, $CG$, so ist $AO$ der Durchschnitt der beiden auf $BDC$ senkrecht stehenden Ebenen $AGC$ und $AEB$, mithin steht $AO$ auf der Ebene $BDC$ senkrecht. Verlängert man nun noch die Linie $DO$ bis zum Durchschnitte $H$ mit $BC$, so ist, da $DH \top BC$, auch $AH \top BC$. Die Linie $BC$ steht also auf der Ebene des Dreiecks $ADH$ senkrecht, somit $BC \top AD$.

2. **Satz.** Stehen in einem Tetraeder $ABCD$ zwei gegenüberstehende Kanten auf einander senkrecht, so schneiden sich jedesmal die von den beiden Endpunkten einer der Kanten auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällten Senkrechten in einem Punkte.

---

*) Aus der in Kürze erscheinenden „Stereometrie von Heis und Eschweiler."

Steht $AC$ (Taf. II. Fig. 5.) auf $BD$ senkrecht, so werden die Perpendikel von $A$ und $C$ auf $BD$ diese $BD$ in einem Punkte $G$ treffen. Leicht ist hiernach einzusehen, dass die Ebene des Dreiecks $AGC$, welche auf $BD$ senkrecht steht, sowohl das Perpendikel von $A$ auf $DBC$, als von $C$ auf $ADB$ enthalten müsse, dass also die beiden Perpendikel sich nothwendig schneiden müssen. Ebenso werden sich die beiden andern von $B$ auf $ADC$ und von $D$ auf $ABC$ gefällten Perpendikel für sich schneiden.

3. Satz. Durchschneiden sich die von den Endpunkten einer Kante auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällten Perpendikel in einem Punkte, so steht jene Kante auf der gegenüberliegenden Kante senkrecht.

4. Satz. Durchschneiden sich in einem Tetraeder zwei Höhenperpendikel, so schneiden sich auch die beiden übrigen. — Leichte Umkehrung des vorhergehenden Satzes.

5. Satz. In einem Tetraeder, dessen gegenüberstehende Kanten paarweise auf einander senkrecht stehen, durchschneiden sich sämmtliche Höhenperpendikel in einem Punkte.

6. Satz. Durchschneiden sich in einem Tetraeder drei Höhenperpendikel in einem Punkte, so geht das vierte Höhenperpendikel durch denselben Punkt *).

Beweis mit Hülfe der vorhergehenden Sätze leicht.

7. Satz. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte $E$ und $F$ (Taf. II. Fig. 6.) zweier gegenüber stehender Kanten $AB$, $CD$ eines Tetraeders halbirt jede durch dieselbe und durch zwei andere gegenüber stehende Kanten gehende Gerade.

Beweis. Die Linie $HG$ treffe die Verbindungslinie $EF$ der Mittelpunkte $E$, $F$ der Seiten $AB$, $DC$ in $O$, die gegenüberstehenden Kanten in $G$ und $H$. Zum Beweise, dass $GO = OH$ sei, denke man sich durch die beiden windschiefen Kanten $AC$, $BD$ Parallelebenen construirt. Legt man nun durch einen der Halbirungspunkte, etwa $E$, eine parallele Ebene mit jenen beiden,

*) Im zweiten Bande des Crelle'schen Journals findet sich auf Seite 97. der von Steiner aufgestellte Satz: „Fället man aus den Ecken eines beliebigen Tetraeders auf die gegenüberliegenden Seitenebenen Lothe, so schneiden diese vier Lothe einander im Allgemeinen nicht. Schneiden sich aber, in einem besonderen Falle, irgend zwei derselben, so schneiden alle vier einander in einem und demselben Punkte." Dieser allgemein aufgestellte Satz ist offenbar unrichtig.

so muss dieselbe offenbar auch durch den andern Halbirungspunkt $F$ gehen. Es geht somit diese Ebene sowohl durch die Linie $EF$, als auch durch den Punkt $O$ und halbirt also auch die $GH$ in $O$.

**Zusatz.** Legt man durch die Verbindungslinie $EF$ eine beliebige Ebene, so halbirt jene Linie das durch den Durchschnitt mit den Seiten entstehende Viereck. — Der Beweis leicht.

**Bemerkung.** Der obige Satz lässt sich auch so ausdrücken: Durchschneidet in einem windschiefen Vierecke eine gerade Linie die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberstehender Seiten und zugleich die beiden andern gegenüberstehenden Seiten des Vierecks, so wird dieselbe von jener Verbindungslinie halbirt.

8. **Satz.** Jede durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte $E$ und $F$ (Taf. II Fig. 7.) zweier gegenüber stehender Kanten eines Tetraeders gelegte Ebene $GEHF$ halbirt das Tetraeder.

**Beweis.** Man verbinde $B$ und $C$ mit $E$, $A$ und $D$ mit $F$. Da die von den Endpunkten der in $E$ halbirten Linie $AD$ auf die durch $E$ gehende Ebene $GEHF$ gefällten Perpendikel einander gleich sind, so haben die beiden Pyramiden $AEHF$ und $DGEF$ gleiche Höhen, und da sie nach dem vorhergehenden Satze auch noch gleiche Grundflächen $EHF$ und $GEF$ haben, so ist:

(1) $$\text{Pyramide } AEHF = GDEF,$$

ebenso ist:

(2) $$\text{Pyramide } BEFG = ECHF.$$

Es ist aber Pyramide $AFDB = \frac{1}{2}ACDB = BDCE$, folglich, wenn man von der ersten und dritten das gemeinschaftliche Stück $BEFD$ wegnimmt:

(3) $$\text{Pyramide } AEFB = DEFC.$$

Durch Addition von (1), (2), (3) erhält man:

$$ABGEFH = CDGEFH.$$

Oder einfacher:

$$\tfrac{1}{2}ABCD = ABDF = ABEFG + EFDG = ABEFG + EFHA$$
$$= AHFGB,$$

also:

$$AHFGB = \tfrac{1}{2}ABCD.$$

---

# VI.

# Zur Integration der linearen Differentialgleichung

$$a^m \frac{d^m z}{dt^m} = x^{2m} \frac{d^m z}{dx^m}.$$

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

---

Im dreissigsten Theile dieses Journals (S. 335.) hat Herr Spitzer das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$a^m \frac{d^m z}{dt^m} = x^{2m} \frac{d^m z}{dx^m}$$

entwickelt. Dies Integral zeigt sich in der Form

$$z = x^{m-1}(\varphi_1(t - \frac{a\mu}{x}) + (\varphi_2(t - \frac{a\mu^2}{x}) + \dots + \varphi_m(t - \frac{a\mu^m}{x})),$$

wo $\mu$ aus der Gleichung $\mu^m = 1$ zu bestimmen ist. Ich möchte hier ein anderes Verfahren in Erinnerung bringen, was vielleicht noch schneller die angegebene Integralform liefert und doch auch in unzähligen anderen Fällen eine Anwendung zulässt, wo der von Herrn Spitzer eingeschlagene Weg nicht mehr zum Ziele führen würde.

Ich setze zunächst $z = x^{m-1}.z_1$, wo $z_1$ eine Function von $t$ und $x_1 = \frac{-1}{x}$ sein soll. Daraus findet man:

$$a^m \frac{d^m z}{dt^m} = x^{2m} \frac{d^m z}{dx^m}.$$

$$\frac{dz}{dx} = x^{m-3} \frac{dz_1}{dx_1} + (m-1)\, x^{m-2} z_1,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = x^{m-5} \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} + 2(m-2)\, x^{m-4} \frac{dz_1}{dx_1} + (m-1)(m-2)\, x^{m-3} z_1,$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = x^{m-7} \frac{d^3 z_1}{dx_1^3} + 3(m-3)\, x^{m-6} \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} + 3(m-2)(m-3)\, x^{m-5} \frac{dz_1}{dx_1}$$
$$+ (m-1)(m-2)(m-3)\, x^{m-4} z_1,$$

und, wenn man so fortfährt, endlich auch:

$$\frac{d^m z}{dx^m} = x^{-m-1} \frac{d^m z_1}{dx_1^m}.$$

Die angegebene Transformation verwandelt demnach die vorliegende lineare Differentialgleichung in eine andere, deren Coefficienten beständig sind. Man erhält nämlich:

$$a^m \frac{d^m z_1}{dt^m} = \frac{d^m z_1}{dx_1^m}.$$

Das Polynom $a^m t^m - x_1^m = 0$ lässt sich in $m$ verschiedene Faktoren von der Form $a\mu t - x_1$ zerlegen. Daraus folgt bekanntlich, dass man, um die transformirte Gleichung zu integriren, die Summe aller Integrale zu nehmen habe, welche der linearen Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$a\mu \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_1}{dx_1}$$

entsprechen, wenn die $m$ Wurzeln der Gleichung $\mu^m = 1$ nach und nach an die Stelle von $\mu$ treten. Als Integral hat man hier:

$$z_1 = \varphi(t + a\mu x_1) \quad \text{oder} \quad z = x^{m-1}.\varphi\left(t - \frac{a\mu}{x}\right),$$

und so gelangt man dann wieder zu der obigen Integralform:

$$z = x^{m-1}.\left(\varphi_1\left(t - \frac{a\mu}{x}\right) + \varphi_2\left(t - \frac{a\mu^2}{x}\right) + \ldots + \varphi_m\left(t - \frac{a\mu^m}{x}\right)\right).$$

# VII.

## Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von
Herrn Doctor *Paul Escher*,
Privatdocenten der Mathematik am schweizerischen Polytechnikum zu Zürich.

---

*Aufgabe.*

Durch eine Ecke $C$ eines gegebenen Dreiecks $ABC$ (Taf. II. Fig. 8.) eine Gerade so zu legen, dass die auf sie von den beiden andern Ecken $A$ und $B$ gefällten Perpendikel mit ihr und mit den in der ersten Ecke zusammenstossenden Seiten $AC$ und $BC$ beziehungsweise gleichgrosse Dreiecke einschliessen.

Vorbemerkung. Im Februarhefte 1858 der „Nouvelles annales de mathématiques" findet sich diese Aufgabe mit der folgenden, von Herrn Legrandais aufgestellten Lösung:

„Man ziehe in die Mitte $D$ der Seite $AB$ die Transversale $CD$, mache $DE = DF = DC$ und ziehe endlich $CE$ und $CF$, so stellt jede der beiden letzteren Linien eine Lage der gesuchten Geraden vor."

Diese Lösung, welche in dem Fall, wo der Winkel $ACB$ ein rechter ist, kein eigentliches Resultat liefert, führt sonst nur auf zwei der gesuchten Geraden entsprechende Linien, und zwar auf zwei, die auf einander senkrecht stehen, und die beide zugleich ausserhalb oder innerhalb des Winkels $ACB$ fallen, je nachdem letzterer ein spitzer oder stumpfer ist.

Dass ausser den so gefundenen Geraden aber noch zwei der Aufgabe entsprechende existiren können, welche auch senkrecht

auf einander stehen, wovon jedoch die eine ausserhalb, die andere innerhalb des Winkels $ACB$ zu liegen kommt, — davon überzeugt man sich leicht, indem man zwei dem Inhalte nach gleiche Rechtecke $ADCJ$ und $CEBG$ so an einander fügt, wie es in Taf. II. Fig. 9. geschehen, und nun noch die Geraden $AB$, $AC$ und $BC$ zieht, wodurch das Dreieck $ABC$ entsteht, für welches die durch die Spitze $C$ gehenden und auf einander senkrechten Geraden $JC$ und $DG$ ebenfalls die in unserer Aufgabe ausgedrückte Eigenschaft besitzen.

Allem Anscheine nach lässt sich aber dieses zweite System von Geraden nicht so leicht auffinden, wie das erste. Auch zeugt hievon die im Januarhefte 1858 der „Nouvelles annales de Mathématiques" von Herrn Challiot gegebene Construction, welche, auf eine trigonometrische Betrachtung gegründet, eine Linie des zweiten Systems liefert. — Leider ist diese Construction nicht richtig vollendet worden, indem sich schliesslich in dieselbe ein kleiner Fehler eingeschlichen hat; gleichwohl bietet sie, richtig vollendet, — wodurch sie in wenig complicirterer Form erscheint — einen abermaligen Beleg dafür, dass selbst die Lehren der Trigonometrie in der geometrischen Analysis eine schöne Anwendung finden können.

Auf eine andere trigonometrische Betrachtung gestützt, habe ich die nämliche Aufgabe zu lösen versucht und eine Construction erhalten, welche beide Systeme von Geraden zugleich gibt.

Bevor wir aber zu dieser Construction übergehen, wollen wir zunächst annehmen, dass der Winkel $ACB$ unseres gegebenen Dreiecks ein Rechter sei. Fällen wir alsdann (Taf. II. Fig. 10. und Fig. 11.) auf eine beliebig durch $C$ innerhalb oder ausserhalb des Winkels $ACB$ gezogene Gerade von $A$ und $B$ aus die Senkrechten $AD$ und $BE$, und bezeichnen die spitzen Winkel, welche die Seiten $AC$ und $BC$ des Dreiecks $ABC$ mit jener Geraden bilden, durch $\alpha$ und $\beta$, so finden wir, weil

$$\alpha+\beta=90^0, \text{ also } 2\alpha+2\beta=180^0,$$

dass

$$\sin 2\alpha=\sin 2\beta$$

ist. Da ferner

$$\text{der Inhalt vom Dreieck } ACD=\tfrac{1}{4}AC^2.\sin 2\alpha$$
$$\text{und } \text{,, ,, ,, ,, } BCE=\tfrac{1}{4}BC^2.\sin 2\beta$$

so folgt hieraus, dass nur, wenn $AC=BC$, d. h. das Dreieck $ABC$ zugleich gleichschenklig ist, — dann aber stets — die Drei-

ecke $ACD$ und $BCE$ einander gleich sind. Somit wird, wenn Winkel $ACB$ ein Rechter ist, die Aufgabe im Allgemeinen keine Lösung zulassen, in dem besonderen Falle jedoch, als das Dreieck $ABC$ zugleich gleichschenkelig ist, jede durch $C$ gelegte Gerade unserer Aufgabe genügen.

Ebenso leicht lässt sich beweisen, dass wenn Winkel $ACB \gtrless 90^0$ und ausserdem $AC = BC$ ist, die vier durch $C$ gehenden Geraden $DE$, $FG$, $HJ$ und $KL$ (Taf. II. Fig. 12.), welche den vollen (d. h. aus vier Rechten bestehenden) Winkel bei $C$ in acht gleiche Theile zerlegen und wovon eine zugleich den Winkel $ACB$ halbirt, unsere gesuchten Linien sind. Es braucht somit unsere Aufgabe nur noch unter der Voraussetzung gelöst zu werden, wonach weder Seite $AC = BC$, noch Winkel $ACB = 90^0$ ist. Unter dieser Voraussetzung bedienen wir uns aber folgender

Construction. (Taf. III. Fig. 1.) Beschreibe um die grössere der Seiten $AC$ und $BC$ (hier $AC$) als Durchmesser einen Kreis, verlängere — wenn's nöthig ist — die kleinere Seite (hier $BC$) so weit, bis sie die Kreislinie in einem weiteren Punkte $E$ *) trifft, ziehe Halbmesser $DE$ und mit ihm durch $C$ eine Parallele $FG$, beschreibe ferner aus $C$ mit Halbmesser $BC$ einen Kreisbogen, welcher die vorhin gezeichnete Kreislinie in den Punkten $H$ und $J$ schneidet, ziehe sodann die Gerade $HJ$, welche die $AC$ in einem Punkte $K$ schneidet, beschreibe hernach mit Halbmesser $CK$ einen Kreisbogen, welcher die Gerade $FG$ in den Punkten $L$ und $M$ schneidet, ziehe $AL$ und $AM$ und parallel mit letzteren beiden Geraden die Durchmesser $NO$ und $PQ$ und lege endlich durch $C$ die vier Geraden $NR$, $OS$, $PT$ und $QU$ so, dass sie ausserdem noch beziehungsweise durch die Punkte $N$, $O$, $P$ und $Q$ gehen, so wird jede dieser vier Geraden unserer Aufgabe genügen.

Beweis. I. Um darzuthun, dass die Linie $NR$ unserer gesuchten Geraden entspricht, dürfen wir nur die Geraden $JC$ und $AN$ ziehen und $BV$ parallel zu $AN$ machen, wodurch die rechtwinkligen Dreiecke $ACN$ und $BCV$ entstehen, deren bei $C$ liegende Winkel wir der Kürze wegen durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnen wollen. Alsdann verhält sich:

---

*) Wäre in unserer Figur der Winkel $ACB$ stumpf, so müsste die Seite $BC$ über $C$ hinaus verlängert werden, um die Kreislinie noch in einem weiteren Punkte schneiden zu können.

$$AC^2 : BC^2 = AC^2 : CJ^2 = AC : CK = AC : CL$$
$$= \sin\angle ALC : \sin\angle CAL = \sin\angle NDE : \sin\angle ADN$$
$$= \sin 2\beta : \sin 2\alpha;$$

folglich ist

$$AC^2 . \sin 2\alpha = BC^2 . \sin 2\beta,$$

also auch

$$\tfrac{1}{4}AC^2 . \sin 2\alpha = \tfrac{1}{4}BC^2 . \sin 2\beta$$

oder

$$\Delta ACN = \Delta BCV,$$

w. z. b. w.

II. Um zu zeigen, dass die Linie $PT$ die in unserer Aufgabe ausgedrückte Eigenschaft besitzt, ziehen wir ferner $AP$ und machen $BX$ parallel zu $AP$, wodurch wir die rechtwinkligen Dreiecke $ACP$ und $BCX$ erhalten, deren bei $C$ liegende Winkel wir durch $\gamma$ und $\delta$ bezeichnen wollen. Alsdann verhält sich wiederum:

$$AC^2 : BC^2 = AC^2 : CJ^2 = AC : CK = AC : CM$$
$$= \sin\angle AMC : \sin\angle CAM = \sin\angle PDE : \sin\angle ADP\text{*)}$$
$$= \sin 2\delta : \sin 2\gamma,$$

folglich ist

$$AC^2 . \sin 2\gamma = BC^2 . \sin 2\delta,$$

also auch

$$\tfrac{1}{4}AC^2 . \sin 2\gamma = \tfrac{1}{4}BC^2 . \sin 2\delta$$

oder

$$\Delta ACP = \Delta BCX.$$

III. und IV. Dass endlich $OS$ und $UQ$ zwei unserer gesuchten Geraden entsprechende Linien sind, können wir entweder ähnlich den in Nr. I. und II. geführten Beweisen darthun oder einfacher dadurch, dass wir uns auf diese bereits geführten Beweise stützen.

Ziehen wir nämlich die Geraden $AO$ und $AQ$ und diesen parallel die Linien $BW$ und $BY$, so sind die dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke $ACO$ und $BCW$ einander gleich, weil sie beziehungsweise den nach Nr. I. einander gleichen Dreiecken $ACN$ und $BCV$ congruent sind. Ebenso sind die weiter dadurch

---

*) Es ist nämlich $\sin\angle PDE = \sin\angle AMC$, weil $\angle PDE + AMC = 180°$.

entstehenden rechtwinkligen Dreiecke $ACQ$ und $BCY$ einander gleich, weil sie beziehungsweise den nach Nr. II. einander gleichen Dreiecken $ACP$ und $BCX$ congruent sind.

---

# VIII.

## Berichtigungen.

Von

Herrn Professor *Stephan von Krusper*

zu Ofen.

---

I. Im 24sten Theile dieses Archivs hat Herr Professor Breymann ein Verfahren bekannt gemacht, die Lage eines Punktes auf dem Felde gegen zwei andere gegebene, aber unzugängliche Punkte zu bestimmen. Der Verfasser beweist zuförderst folgende zwei Sätze:

1) Wenn man in einem $\triangle ABC$ (Taf. IV. Fig. 1.) eine Transversale $DE$ zieht, nicht parallel zu $AB$, dann die Linie $DE$ halbirt in $F$, und die Linien $AE$, $DB$ und $CF$ zieht, so schneiden sich diese nicht in einem Punkte.

2) Wenn man in einem $\triangle ABC$ (Taf. IV. Fig. 2.) eine Transversale $DE$ zieht, parallel zu $AB$, die Linie $DE$ halbirt in $F$, und die Linien $AE$, $BD$ und $CF$ zieht, so schneiden sich diese in einem einzigen Punkte.

Dann macht der Verfasser von diesen Sätzen für die Aufnahme mit dem Messtische folgende Anwendung:

Wenn $AB$ irgend eine unzugängliche Linie auf dem Felde, $DE$ das verjüngte Bild derselben auf dem Messtische und $C$ irgend einen Punkt auf dem Felde bedeutet, dessen Position auf dem

Messtische bestimmt werden soll, so stelle man den Messtisch in $C$ auf, so, dass $DE$ nach Augenmaasse mit $AB$ parallel sei, halbire $DE$ in $F$, visire über $D$ nach $A$, über $E$ nach $B$, ziehe die Strahlen in beiden Richtungen rückwärts, bis sie sich in irgend einem Punkte des Messtisches durchschneiden, verbinde diesen Durchschnittspunkt mit dem Punkte $F$ mittelst einer Geraden und ziehe die Visirlinien über $D$ nach $B$ und über $E$ nach $A$ auf dem Papiere; dann entsteht in der Regel ein Fehlerdreieck, welches anzeigt, dass die Linie $DE$ auf dem Papiere mit der correspondirenden Linie $AB$ auf dem Felde nicht parallel, folglich der Tisch nicht richtig orientirt ist. Um den Fehler zu entfernen, drehe man den Messtisch nach der geeigneten Richtung und wiederhole die angegebene Construktion so lange, bis das Fehlerdreieck ganz verschwunden ist. Nach ein Paar Versuchen wird dies in hohem Grade gelingen, die richtige Orientirung wird hergestellt und der zuletzt erhaltene Durchschnittspunkt der Visirlinien $DA$ und $EB$ auf dem Papiere ist das verjüngte Bild des Standpunktes $C$ auf dem Felde.

So richtig auch jene Sätze in der Theorie sind, so unstatthaft ist in der Praxis die Anwendung derselben auf die Aufnahme mit dem Messtische aus folgender Ursache:

In der Praxis wird bei Aufnahme ganzer Gemeinden mit dem Messtische, — bei welcher Arbeit die vorliegende Aufgabe, das Pothenot'sche Problem, überhaupt die complicirteren Aufgaben der Intersektionsmethode zur Anwendung kommen, — stets eine starke Verjüngung gebraucht. Beim österreichischen Kataster repräsentirt 1 dd Zoll am Papier 40 Klafter auf dem Felde, was eine Verjüngung von $\frac{1}{2880}$ ausmacht. Es sind zwar Fälle bei Aufnahmen von Städten, in welchen 1″ zu 10° gerechnet wurde, was einer Verjüngung von $\frac{1}{720}$ gleichkömmt; aber bei Vermessungen von Städten kann von der Intersektionsmethode kein Gebrauch gemacht werden, indem eine freie Aussicht, das wesentlichste Element dieser Methode, nicht vorhanden ist. Auch einzelne Baugründe und einzelne Grundstücke werden zu besonderen Zwecken in einem grösseren Maasstabe aufgenommen; allein bei einer solchen Aufnahme von geringer Ausdehnung reicht man mit dem Vorwärtsabschneiden aus ein Paar Standpunkten immer aus, so dass man nie in die Lage kommt, von den complicirteren Standbestimmungen, die jedenfalls mehr Zeit und Mühe in Anspruch nehmen, Gebrauch machen zu müssen. Wenn aber $DE$ gegen $AB$ sehr klein angenommen wird, dann wird auch $CD$ gegen $CA$

und $CE$ gegen $CB$ sehr klein, folglich wird $DB$ mit $CB$, und $EA$ mit $CA$ nahe parallel, und $CDOE$ von einem Parallelogramme sehr wenig verschieden; demnach geht die Linie $CF$ verlängert sehr nahe bei $O$ vorbei, und das Fehlerdreieck wird sehr klein, selbst dann, wenn der Winkel zwischen $DE$ und $AB$ viele Grade beträgt. Ist die Verjüngung so gross, wie man sie in der Praxis gewöhnlich anwendet, so schrumpft das Fehlerdreieck vollends zu einem Punkte zusammen; folglich ist es durchaus nicht geeignet, den Fehler in der Orientirung des Messtisches zu erkennen zu geben.

Um die Wahrheit dieser Behauptung zu beweisen, wollen wir aus $O$ (Taf. IV. Fig. 3.) auf die verlängerte $CF$ ein Loth $OP$ ziehen und die Länge desselben berechnen. Es seien $a, b, c, A, B, C$ Seiten und Winkel des $\Delta ABC$, ebenso $a', b', c', A', B', C$ die gleichliegenden Bestandtheile des $\Delta CDE$, wobei zu bemerken ist, dass $C$ in beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist; ausserdem seien $z, \alpha, \beta, m, n, u, v$ die in der Zeichnung bezeichneten Winkel, endlich $DO = M$, $CO = r$, und wenn $DO' \parallel CE$ gemacht wird, $CO' = r'$, so hat man aus dem $\Delta ABC$:

$$a = c\frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}, \quad b = c\frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C},$$

ferner ist

$$A' = A + z, \quad B' = B - z,$$

und aus dem $\Delta CDE$:

$$a' = c'\frac{\operatorname{Sin} A'}{\operatorname{Sin} C}, \quad b' = c'\frac{\operatorname{Sin} B'}{\operatorname{Sin} C};$$

ferner ist aus dem $\Delta ACE$ und $\Delta BCD$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a' \operatorname{Sin} C}{b - a' \operatorname{Cos} C}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b' \operatorname{Sin} C}{a - b' \operatorname{Cos} C},$$

dann ist

$$m = A' - \alpha, \quad n = B' - \beta,$$

und aus dem $\Delta DEO$:

$$M = c'\frac{\operatorname{Sin} m}{\operatorname{Sin}(m+n)};$$

ferner ist aus dem $\Delta CDO$ und $\Delta CDO'$:

$$\operatorname{tg} u = \frac{M \operatorname{Sin}(A'+n)}{b' - M \operatorname{Cos}(A'+n)}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{a' \operatorname{Sin} C}{b' + a' \operatorname{Cos} C}, \quad r = \frac{M \operatorname{Sin}(A'+n)}{\operatorname{Sin} u};$$

endlich aus dem $\Delta\, COP$:

$$OP = r \operatorname{Sin}(u - v).$$

Durch diese Reihe von Gleichungen kann $OP$ für beliebige Werthe von $A, B, c, c', z$, welche nach der Natur der Sache innerhalb gewisser Grenzen willkührlich gewählt werden können, stets berechnet werden. Unter der Voraussetzung, dass $c'$ gegen $c$ sehr klein ist, kann man anstatt dieser ganz strengen Ausdrücke Näherungsformeln einführen, welche unbeschadet der Genauigkeit des Resultates eine grössere Uebersicht gewähren. Man erhält nämlich mit hinreichender Genauigkeit:

$$\alpha = \frac{a'}{b} \operatorname{Sin} C, \quad \beta = \frac{b'}{a} \operatorname{Sin} C;$$

$$M = c' \frac{\operatorname{Sin}(A' - \alpha)}{\operatorname{Sin}(C + \alpha + \beta)} = c' \frac{\operatorname{Sin} A' - \alpha \operatorname{Cos} A'}{\operatorname{Sin} C + (\alpha + \beta) \operatorname{Cos} C}$$

$$= c' \frac{\operatorname{Sin} A'}{\operatorname{Sin} C} \cdot \frac{1 - \alpha \operatorname{Cotg} A'}{1 + (\alpha + \beta) \operatorname{Cotg} C};$$

und wenn man die Division verrichtet und bei der ersten Potenz von $\alpha$ und $\beta$ stehen bleibt, wird nach einer leichten Reduktion:

$$M = a'\left[1 - \alpha \frac{\operatorname{Sin} B'}{\operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} C} - \beta \frac{\operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C}\right].$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{M \operatorname{Sin}(C + \beta)}{b' + M \operatorname{Cos}(C + \beta)} - \frac{a' \operatorname{Sin} C}{b' + a' \operatorname{Cos} C}$$

$$= \frac{M(b' + a' \operatorname{Cos} C)(\operatorname{Sin} C + \beta \operatorname{Cos} C) - a' \operatorname{Sin} C(b' + M \operatorname{Cos} C - M\beta \operatorname{Sin} C)}{(b' + M \operatorname{Cos}(C + \beta))(b' + a' \operatorname{Cos} C)}$$

$$= \frac{Ma'\beta + Mb'\beta \operatorname{Cos} C + (M - a') b' \operatorname{Sin} C}{(b' + M \operatorname{Cos}(C + \beta))(b' + a' \operatorname{Cos} C)}.$$

Setzt man im Zähler dieses Ausdruckes anstatt $M$ den oben gefundenen Werth, behält aber in der Entwickelung nur die erste Potenz von $\alpha$ und $\beta$ bei, so ergibt sich nach einer leichten Reduktion:

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{a'^2\beta - a'b'\alpha \dfrac{\operatorname{Sin} B'}{\operatorname{Sin} A'}}{(b' + M \operatorname{Cos}(C + \beta))(b' + a' \operatorname{Cos} C)}.$$

Berücksichtigt man ferner, dass aus dem $\Delta\, CDE$ ... $\dfrac{\operatorname{Sin} B'}{\operatorname{Sin} A'} = \dfrac{b'}{a'}$

ist, ferner aus dem $\triangle\, CDO$ und $CDO'$ .... $r \operatorname{Cos} u = b' + a' \operatorname{Cos}(C+\beta)$, $r' \operatorname{Cos} v = b' + a' \operatorname{Cos} C$, und setzt anstatt $\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v$ das gleiche $\frac{\operatorname{Sin}(u-v)}{\operatorname{Cos} u \operatorname{Cos} v}$, so ergibt sich nach einer leichten Reduktion:

$$\operatorname{Sin}(u-v) = \frac{a'^2\beta - b'^2\alpha}{rr'},$$

und hieraus

$$r \operatorname{Sin}(u-v) = \frac{a'^2\beta - b'^2\alpha}{r} = OP.$$

Substituirt man in dieser Formel anstatt $\alpha$, $\beta$, $r'$ ihre Werthe, so wird

$$OP = \frac{a'b' \operatorname{Sin} C (a'b - b'a)}{ab\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \operatorname{Cos} C}}$$

$$= \frac{c'^2 \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B' (\operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B - \operatorname{Sin} B' \operatorname{Sin} A)}{c \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \sqrt{\operatorname{Sin} A'^2 + \operatorname{Sin} B'^2 + 2 \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B' \operatorname{Cos} C}}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B - \operatorname{Sin} B' \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin}(A+z) \operatorname{Sin} B - \operatorname{Sin}(B-z) \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} z,$$

demnach wird endlich

$$OP = \frac{c'}{c} \cdot \frac{c' \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B' \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \sqrt{\operatorname{Sin} A'^2 + \operatorname{Sin} B'^2 + 2 \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B' \operatorname{Cos} C}}.$$

Der Durchschnittspunkt der Visirlinien wird am Sichersten bestimmt, wenn $C = 90^0$ beträgt; unter dieser Voraussetzung wird $B = 90^0 - A$, $B' = 90^0 - A'$, und

$$QP = \frac{c'}{c} \cdot \frac{c' \operatorname{Sin} 2A' \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} 2A}.$$

Aus diesen Formeln sieht man, dass die Höhe des Fehlerdreieckes, also das Fehlerdreieck selbst, desto kleiner ausfällt, je kleiner das Verjüngungsverhältniss $\frac{c'}{c}$ angenommen wird, z. B. für $\frac{c'}{c} = \frac{1}{2880}$, $c' = 10$ Zoll, $A = 45^0$, $z = 30^0$ wird $OP = \frac{1}{1152}$ Zoll, also mit freiem Auge noch nicht sichtbar. Die strenge Rechnung gibt 0·00087 Zoll, was mit dem Vorhergehenden sehr gut übereinstimmt.

II. In dem „Handbuche der niederen Geodäsie“ von Prof. Hartner, Seite 366. Nr. 297. liest man für den Fall, dass

auf dem Messtische ursprünglich nur drei unzugängliche Netzpunkte aufgetragen sind, folgendes Verfahren zur Prüfung der gegenseitigen Lage der gegebenen Punkte: Es seien diese Punkte $A$, $B$, $C$. Man sucht einen vierten Punkt $D$, von welchem aus $A$, $B$, $C$ sichtbar sind, stellt den Tisch in diesem Punkte auf und bestimmt ihn durch Rückwärtseinschneiden. Ergibt sich dieser Punkt scharf durch das genaue Zusammentreffen der drei Visirlinien aus $A$, $B$, $C$, so sind diese Punkte richtig; können aber die drei Visirlinien nicht zu einem gemeinschaftlichen Schnitte vereinigt werden, so ist die gegenseitige Lage der drei Punkte auf dem Tische nicht in der Ordnung.

Diese Ansicht ist falsch, weil die drei Visirlinien stets nur einen einzigen Durchschnittspunkt geben, wenn man die Regeln des Rückwärtseinschneidens beobachtet, mag das $\triangle abc$ auf dem Papiere dem $\triangle ABC$ auf dem Felde ähnlich sein oder nicht.

Um dies zu beweisen, seien $a$, $b$, $c$ (Taf. IV. Fig. 4.) drei Punkte auf dem Messtische, deren gegenseitige Lage wir als richtig annehmen wollen. In dem Standpunkte $D$ können die Winkel $ADB$ und $BDC$ gemessen werden, ihre Grösse sei in der Figur durch die Winkel $m$ und $n$ dargestellt. Soll nun der correspondirende Punkt $d$ auf dem Papiere gefunden werden, so trägt man bekanntlich den Winkel $m$ aus dem Scheitel $c$, den Winkel $n$ aus dem Scheitel $a$ über $ac$ auf, und zieht die Schenkel, bis sie sich in $f$ durchschneiden; legt durch $a$, $f$, $c$ einen Kreis, und zieht die Linie $fb$, bis sie den Kreis schneidet; dieser Durchschnittspunkt ist der gesuchte Punkt $d$, weil $\angle adb = acf = m$ und $\angle bdc = fac = n$. Orientirt man demnach den Tisch nach $fb$ und zieht die Visirlinien über $a$, $b$, $c$ nach $A$, $B$, $C$, so schneiden sich diese in $d$. Gesetzt nun, der Punkt $b$ wäre aus Irrthum nach $b'$ versetzt worden, so würde man den Messtisch nach $fb'$ orientiren, jedoch die drei Visirlinien würden sich noch immer in einem einzigen Punkte durchschneiden, und zwar in $d'$, weil auch von diesem Punkte gilt, was vom Punkte $d$ gezeigt wurde, nämlich dass $\angle ad'b' = acf = m$ und $\angle b'd'c = fac = n$.

Drei Strahlen sind beim Rückwärtseinschneiden zur Bestimmung eines Punktes unbedingt nothwendig; diese Bestimmung aber erfolgt unter allen Umständen, obschon das sich ergebende Viereck $abcd$ auf dem Papiere dem correspondirenden Vierecke $ABCD$ auf dem Felde nur dann ähnlich wird, wenn $\triangle abc$ und $\triangle ABC$ ähnlich waren. Das genaue Zusammentreffen dreier Strahlen beim Rückwärtseinschneiden ist demnach eine nothwendige Sache, keineswegs ein Criterium der Richtigkeit der gegebenen drei Punkte. Ein solches Criterium bietet nur das genaue Zu-

sammentreffen von wenigstens vier Strahlen. Das vom Verfasser angegebene Verfahren muss demnach dahin geändert werden, dass man aus den gegebenen drei Punkten mittelst des Rückwärtseinschneidens noch zwei andere bestimmt; schneiden sich in dem letzteren alle vier Strahlen in einem Punkte, so ist alles in der Ordnung; geht aber der vierte Strahl neben dem Schnitte der drei ersteren vorbei, so ist die gegenseitige Lage der drei ersteren Punkte unrichtig. Dass aber der vierte Strahl neben dem Durchschnitte der drei ersteren vorbeigehen müsse, ersieht man aus dem Folgenden:

Es seien *a*, *b*, *c* (Taf. IV. Fig. 5.) die drei richtig aufgetragenen Punkte, aus welchen *d* und dann *e* bestimmt worden sind, so, dass die drei Winkel *aeb*, *bed*, *dec* auf dem Papiere den correspondirenden Winkeln *AEB*, *BED*, *DEC* auf dem Felde gleich sind. Trägt man die *adb* und *bdc* an der Linie *ac* auf, den ersteren aus dem Punkte *c*, den letzteren aus *a* als Scheitel, so entsteht ein Punkt *f*, der bekanntlich zur Orientirung des Messtisches dient. Dieser Punkt liegt stets auf der Linie *bd*. Auf ähnliche Weise erhält man durch Auftragen der Winkel *aeb*, *bec*, dann *aed* und *dec* die Punkte *g* und *h*, deren ersterer auf der Linie *eb*, der letztere auf *ed* liegt. Denkt man sich nun *b* nach *b'* versetzt, so kommt auch *d* nach *d'*, und *e* nach *e'* oder *e''*, je nachdem dieser Punkt aus den drei Punkten *A*, *B*, *C* oder *A*, *D*, *C* bestimmt wurde. In *e'* werden sich nun, nach der früheren Erklärung, die drei Visirlinien über *A*, *B*, *C* scharf durchschneiden, die vierte aus *e'* nach *D* gerichtete Visirlinie geht jedoch nicht durch *d'*, sondern durch *h*, welcher in der Regel von *d'* verschieden ist, folglich eine über *d'* nach *D* gezogene Visur geht, wegen ihrer zur Linie *e'h* nahe parallelen Lage, neben *e'* vorbei. Dasselbe gilt, mit den nöthigen Modificationen, vom Punkte *e''*. Ausser diesen Bestimmungen kann der Punkt *E* noch auf zwei verschiedene Arten auf's Papier gebracht werden, nämlich mittelst der drei Punkte *A*, *D*, *B* und *C*, *D*, *B*, aber auch bei diesen Bestimmungen geht der vierte Strahl neben dem Durchschnitte der drei ersteren vorbei, weil die gegebene Beweisführung nicht an eine besondere Form des aufgetragenen Dreieckes gebunden, demnach allgemein gültig ist.

Noch anderen irrigen Ansichten begegnet man hier und da in den Lehrbüchern der praktischen Geometrie; wir werden später Gelegenheit finden, sie zur Sprache zu bringen, um so mehr, weil sie mitunter ziemlich verbreitet sind.

---

# IX.

## Bestimmung des Faden-Intervalles an einem astronomischen Winkel-Instrumente.

Von

Herrn *Josef Wastler*,

Lehrer an der k. k. Ober-Realschule in Ofen.

---

Es gibt bekanntlich zwei Methoden, das Faden-Intervall eines Winkel-Instrumentes zu bestimmen. Die eine derselben beruht auf einer astronomischen Beobachtung, indem man die Durchgangszeiten eines Sternes durch die Vertikalfäden beobachtet; durch die andere von Gauss herrührende Methode wird der fragliche Winkel mit Hilfe eines zweiten Instrumentes (eines Theodoliten) gemessen. Die Gauss'sche Methode hat vor der ersteren den Vorzug, dass man nicht vom heiteren Himmel abhängt, die Bestimmung daher bei jeder Witterung und zu jeder Zeit machen kann, setzt aber nothwendig das Vorhandensein eines zweiten Instrumentes voraus, welches, damit das Resultat den Anforderungen auf Genauigkeit entspricht, dem zu untersuchenden Instrumente an Leistungsfähigkeit möglichst nahe kommen soll.

Da man in vielen Fällen, namentlich auf Reisen, oft nicht in der Lage ist, ein zweites geeignetes Instrument zu besitzen, so dürfte die hier anzugebende Methode, mittelst welcher man das Faden-Intervall mit dem zu untersuchenden Instrumente selbst misst, nicht ohne praktischen Nutzen sein.

Es sei $F$ (Taf. IV. Fig. 6.) der im Brennpunkte der Objektiv-Linse befindliche Mittelfaden, $f$ ein Seitenfaden, $C$ der Drehungsmittelpunkt

des Horizontalkreises *) und $O$ der Mittelpunkt der Objektiv-Linse **). Verbindet man den Punkt $f$ mit $O$, so ist bekanntlich der Winkel $fOF = x$ das Faden-Intervall. Stellt man den Mittelfaden $F$ auf ein nahe im Horizont des Instrumentes befindliches Objekt $A$ ein, so wird die optische Axe $FO$ in ihrer Verlängerung den Punkt $A$ treffen und die durch den Seitenfaden $f$ und den Objektiv-Mittelpunkt $O$ bedingte Visur $fO$ seitwärts von $A$ vorüber gehen.

Liest man den Stand der Nonien am Horizontalkreise ab und dreht das Fernrohr, bis der Seitenfaden $f$ mit $A$ coincidirt, so gelangt der Faden $f$ nach $f'$, der Punkt $O$ nach $O'$, und es ist der Winkel $fCf' = OCO' = \alpha$ der am Horizontalkreise abgelesene Drehungswinkel. Da die Linie $fO$ gegen den Drehungs-Mittelpunkt des Kreises stets eine constante Lage beibehält, so wird der senkrechte Abstand $Cp$ des Punktes $C$ von $fO$ gleich dem Abstande $Cp'$ desselben Punktes von der Geraden $f'O$ sein müssen.

Nennt man $AC = D$, $OC = b$, ferner $Cp = Cp' = r$, so hat man in den beiden rechtwinkligen Dreiecken $CpO$ und $Cp'A$:

$$Cp = r = b \sin x$$

und

$$Cp' = r = D.\sin A$$

oder

$$b \sin x = D.\sin A,$$

daher

$$\sin x = \frac{D}{b}.\sin A \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Nun folgt aber aus Dreieck $ACO'$:

$$\sin A = \frac{CO'.\sin\alpha}{AO'},$$

oder, da man statt $AO'$ ohne Fehler $OA = D - b$ setzen kann,

---

*) Eigentlich ist $C$ der Durchschnittspunkt der vertikalen Umdrehungsaxe des Instrumentes mit der Ebene, in welcher unsere Zeichnung gedacht ist, nämlich der durch den Horizontalfaden und die optische Axe $OF$ des Rohres bestimmten Ebene. Dieser Punkt fällt bekanntlich bei einem vollkommen rectificirten Instrumente mit dem Schnittpunkte der optischen und der horizontalen Drehungsaxe des Rohres zusammen.

**) Die Verhältnisse der beigefügten Zeichnung sind absichtlich verzerrt, um eine deutliche Figur zu erhalten.

$$\sin A = \frac{b}{D-b} \cdot \sin \alpha.$$

Diesen Werth in Gleichung (1) substituirt gibt

$$\sin x = \frac{D}{D-b} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{1-\frac{b}{D}} \cdot \sin \alpha,$$

oder, da $\frac{b}{D}$ ein sehr kleiner Bruch ist, mit vollkommener Genauigkeit:

$$\sin x = (1 + \frac{b}{D}) \sin \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hat man keinen nahe am Horizonte des Instrumentes liegenden günstigen Zielpunkt zu Gebote, so kann auch ein Höhenpunkt anvisirt werden. In diesem Falle hat die Ebene unserer Figur eine unter dem Winkel $h$ geneigte Lage, welcher Winkel am Höhenkreise abgelesen werden kann. Wir erhalten dann durch Ablesung am Horizontalkreise nicht mehr den Winkel $\alpha$, sondern dessen horizontale Projektion $\alpha'$, und können, da $h$ nie gross sein wird, mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\alpha = \alpha' . \cos h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

setzen und aus dieser Gleichung vorerst $\alpha$ bestimmen.

Man sieht, dass das zweite Glied $\frac{b}{D} . \sin \alpha$ der Gleichung (2) die Reduktion der excentrisch gelegenen Visirlinie des Seitenfadens $f$ bedeutet. Ihr Einfluss auf $x$ beträgt bei einer Distanz $D = 100^0$ nie viel mehr als $1''$, und es ist hieraus schon ersichtlich, dass die Vernachlässigung der höheren Potenzen, da sie den Werth von $x$ höchstens um eine Einheit der zweiten Decimalstelle ändern würden, vollkommen gestattet ist.

Die Grösse $b$ kann am Instrumente mit hinreichender Genauigkeit mitteist eines Zollstabes und $D$ mit einem Distanzmesser oder auf andere Weise gemessen werden. Um den Einfluss zu berechnen, den etwaige Unsicherheiten der Grössen $b$ und $D$ auf $x$ ausüben, hat man, wenn man Gleichung (2) in Bezug auf $x$, $b$ und $D$ differenzirt,

$$\cos x . dx = \frac{D . db - b . dD}{D^2} . \sin \alpha,$$

oder, da $\alpha$ und $x$ sehr nahe gleich gross sind,

$$dx = \frac{D . db - b . dD}{D^2} . \operatorname{tg} \alpha,$$

oder endlich

$$dx'' = 206265 . \text{tg}\,\alpha . \frac{D.db - b.dD}{D^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Der Fehler $dx$ wächst also mit dem Winkel $\alpha$ und steht (ohne Rücksicht des Zählers $D.db - b.dD$, der immer klein sein wird) mit $D$ im umgekehrten quadratischen Verhältnisse, aus welchem Grunde man $D$ möglichst gross annehmen wird. Nimmt man $b = 0{\cdot}6$ Fuss und, um gleich einen in der Praxis nie überschrittenen Grenzwerth des Fehlers zu bestimmen, den ungünstigsten Fall, also $D = 600$ Fuss, $\alpha = 16'$ *), $db = 0'{\cdot}02$ und $dD = 6'$, ferner das Zeichen von $dD$ negativ, so findet man $dx = 0''{\cdot}04$.

Selbst für $D = 50^0$ wird der Fehler $dx$ erst $0''{\cdot}07$, also in jedem Falle so gering, dass er selbst bei den vorzüglichsten Instrumenten nicht in Betracht kömmt, bei welchen der Ablesefehler kaum unter $0''{\cdot}5$ gebracht werden kann.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass durch Vervielfältigung der Beobachtung oder Multiplikation das Faden-Intervall mit derselben Schärfe ermittelt werden kann, mit welcher man überhaupt mit dem betreffenden Instrumente zu arbeiten im Stande ist, und ein Mehr ist ja nicht nothwendig. Ausserdem hat man den Vortheil eines günstigen Zielpunktes, den man selbst wählen kann, und es dürfte die Arbeit einfacher sein, als bei der Gauss'schen Methode, wo die stets etwas mühsame Aufstellung des zweiten Instrumentes, um dessen optische Axe in die Richtung der des anderen Instrumentes zu bringen, jedenfalls mehr Zeit beansprucht.

---

*) Ein so grosses Faden-Intervall von 16′ findet nur bei den äussersten Fäden eines grossen Instrumentes statt, wo rechts und links vom Mittefaden drei, also im Ganzen sieben Fäden angebracht sind.

# X.

# Verallgemeinerung des Fermat'schen geometrischen Satzes.

(Vergl. Archiv. T. XXVII. 1., T. XXX. 1. 3.)

Von

Herrn *A. Krüger*,

Director der Realschule zu Fraustadt.

---

Der genannte Satz gilt nicht bloss vom Kreise (statt vom Halbkreise, wie bisher vorausgesetzt wurde), sondern auch mit einiger Abänderung von der Ellipse, wenn man über der grossen Achse derselben ein Rechteck mit der Höhe $=b.\sqrt{2}$ errichtet, wo $b$ die halbe kleine Achse bezeichnet. Dies lässt sich auf folgende Art beweisen.

Dreht man die Figur (Taf. IV. Fig. 7.) um den Durchmesser $AB=2r$ um einen Winkel $\varphi$ und projicirt die ganze Figur auf die ursprüngliche Ebene, so ist die Projection des Kreises bekanntlich eine Ellipse, deren grosse Achse $2a=2r$ und deren kleine Achse $2b=2r.\cos\varphi=2a.\cos\varphi$, während die Projection des Rechtecks $ABCD$ ein Rechteck $ABC'D'$ ist, dessen Grundlinie $AB=2r=2a$ und dessen Höhe $AC'=AC.\cos\varphi$, oder, da nach Vorauss. $AC=r\sqrt{2}=a.\sqrt{2}$ und $b=a.\cos\varphi$, dessen Höhe $AC'=a.\sqrt{2}.\cos\varphi=b.\sqrt{2}$ ist. Die Lage der Durchschnittspunkte $F$ und $G$ auf $AB$ bleibt aber bei der Drehung unverändert; mithin ist auch für die Ellipse $AG^2+BF^2=AB^2=4a^2$.

Umgekehrt lässt sich dieser Satz von der Ellipse auch direct beweisen, so dass dann der vom Kreise eine blosse Folgerung daraus ist.

Ist nämlich über $AB=2a$ (s. dieselbe Figur) eine Ellipse mit der kleinen Achse $2b$ beschrieben und über $AB$ ein Rechteck

*ABCD* mit der Höhe $AC = b\sqrt{2}$ errichtet; so ist, wenn man einen beliebigen Punkt $E$ in der Ellipse mit den Ecken $C$ und $D$ des genannten Rechtecks durch die Geraden $CE$ und $DE$ verbindet, welche (nöthigen Falls verlängert) $AB$ in $F$ und $G$ treffen, immer $AG^2 + BF^2 = AB^2 = 4a^2$.

Beweis. Man nehme den Mittelpunkt der Ellipse als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und $AB$ als Abscissenachse, so sind, wenn $x'$, $y'$ die Coordinaten des Punktes $E$ sind, die Gleichungen der Geraden

$$CE \quad \ldots\ldots \quad \text{I.} \quad y - y' = \frac{x - x'}{x' + a}\cdot(y' + b\sqrt{2}),$$

$$DE \quad \ldots\ldots \quad \text{II.} \quad y - y' = \frac{x - x'}{x' - a}\cdot(y' + b\sqrt{2});$$

folglich, wenn man hier $y = 0$ setzt, die Abscissen der Punkte

$$F \quad \ldots\ldots \quad \text{III.} \quad x = \frac{x'b\sqrt{2} - ay'}{y' + b\sqrt{2}},$$

$$G \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.} \quad x = \frac{x'b\sqrt{2} + ay'}{y' + b\sqrt{2}}.$$

Also ist:

$$\text{V.} \quad AG = a + \frac{x'b\sqrt{2} + ay'}{y' + b\sqrt{2}} = \frac{2ay' + (a + x')b\sqrt{2}}{y' + b\sqrt{2}},$$

$$\text{VI.} \quad BF = a - \frac{x'b\sqrt{2} - ay'}{y' + b\sqrt{2}} = \frac{2ay' + (a - x')b\sqrt{2}}{y' + b\sqrt{2}},$$

$$\text{VII.} \quad AG^2 + BF^2 = \frac{[2ay' + (a + x')b\sqrt{2}]^2 + [2ay' + (a - x')b\sqrt{2}]^2}{(y' + b\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{8a^2y'^2 + 4b^2(a^2 + x'^2) + 8a^2.y'.b\sqrt{2}}{(y' + b\sqrt{2})^2}.$$

Aber man hat:

$$\text{VIII.} \quad b^2x'^2 = a^2b^2 - a^2y'^2,$$

folglich

$$\text{IX.} \quad AG^2 + BF^2 = \frac{8a^2y'^2 + 8a^2b^2 - 4a^2y'^2 + 8a^2y'.b\sqrt{2}}{(y' + b\sqrt{2})^2}$$

$$= 4a^2.\frac{y'^2 - 2b^2 + 2y'.b\sqrt{2}}{y'^2 - 2b^2 + 2y'.b\sqrt{2}} = 4a^2.$$

Zusatz I. Ist $AB$ die kleine Achse, so ergiebt sich leicht, dass der Satz auch gilt, wenn man über der kleinen Achse ein

Rechteck mit der Höhe $= a.\sqrt{2}$ errichtet; nur ist die in Rede stehende Quadratsumme dann $= 4b^2$.

Zusatz II. Derselbe Satz gilt auch, wenn man statt der beiden Achsen der Ellipse zwei beliebige conjugirte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ nimmt und statt des Rechtecks ein Parallelogramm (über $2a'$ mit der anliegenden Seite $= b'\sqrt{2}$ parallel mit $2b'$ oder über $2b'$ mit der anl. Seite $= a'\sqrt{2}$ parallel mit $2a'$) construirt.

---

# XI.

# Multiplicationstafeln zur leichteren und sicherern Berechnung der Proportionaltheile bei logarithmisch-trigonometrischen Rechnungen mit den 7stelligen Tafeln von Vega.

Von

Herrn Doctor *Julius Hartmann*,

Lehrer am Gymnasium zu Rinteln.

---

Der ermüdendste Theil der logarithmisch trigonometrischen Rechnungen sind die Interpolationen. Während Vega für die Logarithmen der Zahlen durch seine Proportionaltäfelchen so gesorgt hat, dass nichts zu wünschen bleibt, ist für die noch weitläufigeren trigonometrischen Rechnungen nichts geschehen. Für geübtere Rechner bietet Bremiker's „Tafel der Proportionaltheile" grosse Vortheile. Doch ist vielleicht für den weniger Geübten eine weniger voluminöse Tafel angemessener, welche ganz ähnliche Täfelchen enthält, wie die Vegaischen für Logarithmen der Zahlen, so dass der Rechner die vorn schon erlernte Methode, nur etwas erweitert, auch hier anwenden kann.

Alle hier vorkommenden Multiplicationen lassen sich auf die Form: $(\alpha\beta, \gamma\delta) \times (ab, cd)$, worin die Buchstaben Ziffern vorstellen, bringen. Von $12\frac{1}{2}°$ bis $77\frac{1}{2}°$ nämlich ist die Differenz für $1''$ höchstens eine zweiziffrige Zahl mit 2 Decimalen, ebenso die

Anzahl der Secunden höchstens zweiziffrig mit 2 Decimalen *). Von 6° bis 12½° resp. 77½° bis 84° kommen Differenzen mit 3 Ziffern (von 100 bis 200) und 2 Decimalen vor. Hier kann man die Hälfte der Differenz, welche zweiziffrig ist (mit sehr wenigen Ausnahmen), nehmen und nach verrichteter Multiplication das Product verdoppeln. Von 1°20′ bis 6° resp. von 84° bis 88°40′ haben die Multiplicationen die Form $(abc, d) \times (\alpha, \beta\gamma)$, statt deren man sogleich $(ab, cd) \times (\alpha\beta, \gamma)$ nimmt. Für die Divisionen entsprechend. Von Anfang bis 1°20′ resp. von 88°40′ bis Ende sind die Differenzen grösser, doch wird man da, wo es auf Genauigkeit ankommt, den bekannten Satz benutzen, dass die Differenz zweier Logarithmen trigonometrischer Functionen gleich der Differenz der Logarithmen ihrer Secundensumme ist.

Die Täfelchen schreiten nun von 10,00 bis 99,80 von 20 zu 20 Hunderteln fort; in jedem finden sich die 10-, 20-, 30- etc. fachen der Kopfzahlen unmittelbar, und somit auch die 1-, 2-, 3.... 9fachen, die 0,1-, 0,2- etc. fachen derselben. Die Interpolationen, oder wenn man will, Correctionen, die man anbringen muss, um die Zahlen eines nicht vorhandenen Täfelchens aus dem nächsten sich vorfindenden abzuleiten, sind, wie man leicht sieht, einfach folgende: Ist $ab, cd$ die Kopfzahl des Täfelchens, welches eigentlich benutzt werden sollte (der Multiplicand), und $\alpha\beta, \gamma\delta$ der Multiplicator, $u$ der Unterschied des Multiplicanden und der nächsten sich vorfindenden Kopfzahl, als ganze Zahlen betrachtet, so bilde man $\frac{u \times \alpha}{10}$ und $\frac{u \times \beta}{100}$, d. h. $u \times \alpha$ mit Hinweglassung der letzten, und $u \times \beta$ mit Abwerfung der 2 letzten Ziffern, und addire diese Correctionen, wenn man vom kleinern, subtrahire, wenn man vom grössern Täfelchen ausging. Für die Decimalstellen des Multiplicators ist keine Correction nöthig, selbst $u \times \beta$ fällt in den meisten Fällen weg und beträgt höchstens eine 1. Zur Vermeidung eines Irrthums wird man auch wohl die Vielfachen in beiden Täfelchen, zwischen welche die corrigirte Zahl fällt, vergleichen.

### Beispiel.

I) Multiplication: Man habe $37{,}31 \times 59{,}82$ zu bilden. Täfelchen 37,40; Unterschied $u = 9$; $\alpha = 5$; $\beta = 9$.

1) $50 \times 37{,}40 = 1870$, weniger $(9 \times 5) : 10$ gibt 1865,
2) $9 \times 37{,}40 = 337$, „ $(9 \times 9) : 100$ „ 336,
3) $0{,}8 \times 37{,}40 =$ „ 30,
4) $0{,}02 \times 37{,}40$ „ 1,
2232.

*) Ist dabei eine oder andere Ziffer $= 0$, so erleichtert das blos die Rechnung.

Nach einer kleinen Uebung wird man auch, wie vorn bei den Logarithmen der Zahlen 2, hier die 4 Zahlen successive im Kopfe zusammenzählen, ohne etwas niederschreiben zu müssen. Da übrigens der Rechner selbst abrundet, hat er die Genauigkeit in seiner Gewalt und kann nöthigenfalls noch eine Stelle weiter in Rechnung nehmen. (Dies würde hier $1865.5 + 335.8 + 29.9 + 0,7 = 2231,9$ geben.)

II) Division: Man habe $2232 : 37,31$ zu bilden.

Täfelchen 37,40; $u = 9$

1) 1870, nächst kleineres Vielfache unter 2232, gibt $\alpha = 5$,
 1870 weniger $(9 \times 5) : 10$ gibt 1865, von 2232 bleibt Rest 367;
2) 337, nächst kleineres Vielfache unter 367, gibt $\beta = 9$,
 337 weniger $(9 \times 9) : 100$ gibt 336, von 367 bleibt Rest 31;
3) 30, nächst kleineres Vielfache unter 31, gibt $\gamma = 8$, Rest 1;
4) 0,7 oder 1,1 oder 1,4 . . . . . . . $\delta = 2$ od. $= 3$ od. $= 4$;

Resultat 59,82 oder 59,83
oder 59,84.

Letztere Unsicherheit der 2ten Decimalstelle liegt in der Natur der Abrundung *).

Beide Verfahrungsarten sind eigentlich abgekürzte Multiplication und Division. Man erspart aber dabei die eigentlichen Multiplicationen mehrziffriger Zahlen, ermüdet also nicht so sehr und erreicht grössere Sicherheit, da man bei den Multiplicationen keinen Fehlern ausgesetzt ist. Auch kommt man unbestritten rascher zum Ziele, als durch gewöhnliche, selbst abgekürzte Multiplication und Division. Will man dabei schreiben, so wird wohl die gewöhnliche Form der Multiplication und Division am zweckmässigsten sein, wobei man das $u$ sich besonders markiren wird.

---

*) Zieht man eine Stelle mehr in Rechnung, so hätte man
1865.5 von 2232, bleibt Rest 366.5,
336.6 — 0,8 gibt 335,8, „ „ 30.7,
29.9, „ „ 0.8
und darum
$\delta = 2.$

Uebrigens ist auch $\delta = 2$ nicht absolut genau; es ist nur besser der mittlere einiger möglichen Werthe; denn 2232 wird man sowohl als Resultat der Multiplication von 37,31 mit 59,81, als mit 59,82, als mit 59,83 zu halten berechtigt sein; und da alle Werthe von 2231,5 bis 2232.4 auf 2232 abgerundet werden, so ergibt auch die vollständige Division von 37,31 in einigen dieser Werthe 59,81, in andern 59,82, in andern 59,83. Noch grösser fällt die Unsicherheit aus, wenn man auch statt 37,31 Werthe zwischen 37,305 und 37,314 statuirt.

# XII.

## Beweis des in Theil XXX. Heft III. S. 355. mitgetheilten geometrischen Lehrsatzes.

Von
Herrn *A. Krüger*,
Director der Realschule zu Fraustadt.

**Lehrsatz.** Wenn in dem Dreiecke $ABC$ (Taf. IV. Fig. 8.) die Linie $AD$ beliebig gezogen ist, so ist immer

$$AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.BD.CD.$$

(Vergl. Grunert im Archiv. XXX. 3. p. 355.)

**Beweis.** Setzt man $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = d$, $BD = m$, $CD = n$, so ist zu beweisen, dass

$$c^2n + b^2m - d^2a = amn.$$

Bezeichnet man einen der Winkel, welchen $AD$ mit $BC$ bildet, etwa den Winkel $ADB$, mit $\varphi$, so ist bekanntlich:

$$\text{I.}\quad c^2 = d^2 + m^2 - 2dm\cos\varphi,$$

$$\text{II.}\quad b^2 = d^2 + n^2 + 2dn\cos\varphi.$$

Multiplicirt man I. und II. respective mit $n$ und $m$, so ist:

$$\text{III.}\quad c^2n = d^2n + m^2n - 2dmn\cos\varphi,$$

$$\text{IV.}\quad b^2m = d^2m + mn^2 + 2dmn\cos\varphi;$$

addendo: $$\text{V.}\quad c^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n)$$

oder: $$c^2n + b^2m - d^2a = amn.$$

**Zusatz.** In etwas veränderter Form gilt der Satz auch für den Fall, dass die Linie $AD$ die Verlängerung von $BC$ trifft. Man findet in ähnlicher Weise:

$$c^2n - b^2m \pm d^2a = \mp amn,$$

wo die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen sind, jenachdem $AD$ die Verlängerung der $BC$ über $C$ oder $B$ hinaus trifft.

# XIII.

# Theorie der Kegelschnitte nach einer neuen Methode analytisch entwickelt.

Von
dem Herausgeber.

## I.

### Erklärung der Kegelschnitte.

§. 1.

Alle unsere folgenden Untersuchungen werden sich, mit einer einzigen Ausnahme, auf die späterhin besonders aufmerksam gemacht werden wird, nur auf eine Ebene beschränken, in welcher alle Constructionen ausgeführt werden. Mit Rücksicht hierauf lassen sich die Kegelschnitte im Allgemeinen auf folgende Art erklären:

Eine Linie, welche nach einem solchen Gesetze gekrümmt ist, dass die beiden Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte und einer der Lage nach gegebenen Geraden ein constantes Verhältniss zu einander haben, heisst ein **Kegelschnitt**;

oder:

Der geometrische Ort aller der Punkte, deren beide Entfernungen von einem gegebenen Punkte und einer der Lage nach gegebenen Geraden ein constantes Verhältniss zu einander haben, heisst ein **Kegelschnitt**.

Der gegebene Punkt wird der **Brennpunkt** des Kegelschnitts, und die der Lage nach gegebene Gerade wird die **Leitlinie**

oder die **Directrix** desselben genannt. Die durch den Brennpunkt gehende, senkrecht auf der Directrix stehende Gerade heisst die **Axe** des Kegelschnitts, und die constante Zahl, mit welcher man die Entfernung eines jeden Punktes des Kegelschnitts von der Directrix multipliciren muss, um die Entfernung dieses Punktes des Kegelschnitts von dem Brennpunkte zu erhalten, wird die **Charakteristik** des Kegelschnitts genannt.

Bevor wir zur Entwickelung der auf die obige Erklärung gegründeten ganz allgemeinen analytischen Theorie der Kegelschnitte übergehen, ist es zweckmässig, uns durch eine möglichst einfache Betrachtung vorläufig eine allgemeine Vorstellung von der Natur und den verschiedenen Arten dieser Curven zu verschaffen, was der Zweck des folgenden Paragraphen ist.

## §. 2.

Die Axe und die Directrix des Kegelschnitts wollen wir respective als die Axen der $x$ und $y$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xy$ annehmen, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten des Brennpunkts des Kegelschnitts durch $a, 0$. Bezeichnet dann hier und im Folgenden immer $n$ die Charakteristik des Kegelschnitts, so ist dessen Gleichung nach der in §. 1. gegebenen allgemeinen Erklärung und bekannten Formeln der analytischen Geometrie offenbar:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad (x-a)^2 + y^2 = n^2x^2.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte des durch diese Gleichung charakterisirten Kegelschnitts mit seiner Axe, welche bekanntlich zugleich die Axe der $x$ ist, durch $u, 0$; so haben wir nach der vorstehenden Gleichung zur Bestimmung von $u$ die Gleichung

$$(u-a)^2 = n^2u^2, \quad u-a = \pm nu;$$

woraus

$$2) \quad \ldots\ldots \quad u = \frac{a}{1 \mp n} \text{ oder } u = \mp \frac{a}{n \mp 1}$$

folgt, so dass also $u$ im Allgemeinen zwei Werthe hat und es folglich auch im Allgemeinen zwei Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der Axe giebt, was aber nun die folgende weitere Discussion erfordert.

Wenn $n=1$ ist, so liefert das obere Zeichen in den vorstehenden Formeln für $u$ das Symbol des Unendlichen, und nur das

untere Zeichen liefert für $u$ einen endlichen völlig bestimmten Werth. Wenn dagegen $n \lessgtr 1$ ist, so liefern in den vorstehenden Formeln beide Zeichen für $u$ endliche völlig bestimmte Werthe. Hieraus sehen wir, dass die Kegelschnitte, deren Charakteristik gleich der Einheit ist, die Axe nur in einem Punkte, dass dagegen die Kegelschnitte, deren Charakteristik kleiner oder grösser als die Einheit ist, die Axe in zwei Punkten schneiden; und werden hierdurch von selbst genöthigt, zuvörderst zwei Klassen der Kegelschnitte zu unterscheiden, jenachdem ihre Charakteristik gleich der Einheit, oder kleiner oder grösser als die Einheit ist.

Die Punkte, in denen ein Kegelschnitt die Axe schneidet, werden seine Scheitel genannt.

Wenn $n = 1$ ist, so hat der entsprechende Kegelschnitt nur einen Scheitel, dessen erste Coordinate $u$ nach dem Obigen durch die Formel

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = \tfrac{1}{2}a$$

bestimmt wird, woraus sich ergiebt, dass der Scheitel in der Mitte des von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällten Perpendikels liegt.

Die Gleichung des Kegelschnitts ist nach 1) in diesem Falle:

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2, \quad \text{also} \quad y^2 = a(2x-a);$$

woraus sich

$$4) \quad \ldots\ldots \quad y = \pm\sqrt{a(2x-a)}$$

ergiebt. Für $2x - a = 0$, also $x = \frac{1}{2}a$, verschwindet $y$, d. h. die Axe wird von dem Kegelschnitte in dem Scheitel geschnitten, wie uns schon bekannt ist. Wenn aber $2x-a$ nicht verschwindet, so ist $y$ reell oder imaginär, jenachdem $a$ und $2x-a$, oder $a$ und $x-\frac{1}{2}a$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Ist also $a$ positiv, so ist $y$ reell oder imaginär, jenachdem $x > \frac{1}{2}a$ oder $x < \frac{1}{2}a$ ist; ist dagegen $a$ negativ, so ist $y$ reell oder imaginär, jenachdem $x < \frac{1}{2}a$ oder $x > \frac{1}{2}a$ ist. Hieraus ergiebt sich unmittelbar mittelst einer ganz einfachen Betrachtung, dass im vorliegenden Falle der Kegelschnitt ganz auf einer und derselben Seite eines durch den Scheitel auf die Axe errichteten Perpendikels liegt, und zwar immer auf der Seite dieses Perpendikels, auf welcher auch der Brennpunkt liegt. Natürlich liegt der Kegelschnitt auch ganz auf einer und derselben Seite der Directrix,

und zwar auf der Seite derselben, auf welcher auch der Brennpunkt liegt.

Wenn $y$ reell ist, so hat $y$ nach 4) wegen der doppelten Zeichen immer zwei absolut gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe, und der Kegelschnitt liegt folglich auf beiden Seiten der Axe ganz auf gleiche Art.

Wenn der absolute Werth von $x$ von dem absoluten Werthe von $\frac{1}{2}a$ an in's Unendliche wächst, so wachsen offenbar auch die entsprechenden absoluten Werthe von $y$ von Null an in's Unendliche, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle der Kegelschnitt sich auf beiden Seiten der Axe von derselben in's Unendliche entfernt.

Nehmen wir den Scheitel als den Anfang eines dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1$ an, so ist

$$x=\tfrac{1}{2}a+x_1,\quad y=y_1;$$

also

$$2x-a=2x_1,\quad y=y_1;$$

folglich nach 4) die Gleichung des Kegelschnitts in Bezug auf dieses Coordinatensystem:

$$5)\qquad y_1^2=2ax_1.$$

Das Bisherige reicht hin, die Kegelschnitte, deren Charakteristik gleich der Einheit ist, im Allgemeinen zu charakterisiren.

Wenn $n \lessgtr 1$ ist, so hat der Kegelschnitt zwei Scheitel, deren erste Coordinaten durch die Formel

$$6)\qquad u=\frac{a}{1\mp n}\quad \text{oder}\quad u=\mp\frac{a}{n\mp 1}$$

bestimmt werden, welches uns von selbst darauf führt, wieder zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $n<1$ oder $n>1$ ist, indem schon die äussere Form der beiden obigen Ausdrücke von $u$ uns darauf hinweiset, dass die beiden Werthe von $u$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem $n<1$ oder $n>1$ ist, was schon allein hinreichen würde, diese neue Unterscheidung zweier Fälle zu rechtfertigen.

Wenn $n<1$ ist, so haben die beiden durch die Formel

$$u=\frac{a}{1\mp n}$$

gelieferten Werthe von $u$ gleiche Vorzeichen, und zwar immer ein und dasselbe Vorzeichen mit $a$. Ferner ist offenbar

$$\text{val. abs. } \frac{a}{1+n} < \text{val. abs. } a,$$

$$\text{val. abs. } \frac{a}{1-n} > \text{val. abs. } a;$$

woraus sich ergiebt, dass der eine Scheitel zwischen der Directrix und dem Brennpunkte, der andere auf der entgegengesetzten Seite des Brennpunkts in der Axe liegt.

Die Gleichung des Kegelschnitts ist in diesem Falle nach dem Obigen:

$$(x-a)^2+y^2=n^2x^2,$$

woraus

$$7) \quad \ldots\ldots \quad y=\pm\sqrt{n^2x^2-(x-a)^2}$$

folgt. Also ist $y$ nur dann reell, wenn

$$n^2x^2-(x-a)^2 \overset{=}{>} 0,$$

wenn also

$$\{(n-1)x+a\}\{(n+1)x-a\} \overset{=}{>} 0$$

oder

$$\{a-(1-n)x\}\{a-(1+n)x\} \overset{=}{<} 0$$

ist. Verschwindet dieses Product, so muss einer seiner beiden Factoren verschwinden, also

$$a-(1-n)x=0 \text{ oder } a-(1+n)x=0$$

sein, was

$$x=\frac{a}{1-n} \text{ oder } x=\frac{a}{1+n}$$

giebt, und uns also auf die beiden Scheitel des Kegelschnitts führt, wie sich auch von selbst versteht. Verschwindet dagegen das obige Product nicht, so muss mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$a-(1-n)x \gtrless 0, \quad a-(1+n)x \lessgtr 0;$$

also

$$x \gtrless \frac{a}{1-n}, \quad x \lessgtr \frac{a}{1+n}$$

sein, wo offenbar die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem $a$ positiv oder negativ ist. In beiden Fällen ist aber $x$ eine Mittelgrösse zwischen

$$\frac{a}{1-n} \text{ und } \frac{a}{1+n},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass in diesem Falle der ganze Kegelschnitt zwischen den beiden durch die Scheitel auf die Axe errichteten Perpendikeln liegt. In Verbindung mit dem Obigen geht hieraus auch ganz von selbst hervor, dass der ganze Kegelschnitt auf einer und derselben Seite der Directrix liegt, und zwar immer auf der Seite derselben, auf welcher auch der Brennpunkt liegt.

Da $x$ sich nur zwischen den Grenzen

$$\frac{a}{1-n} \text{ und } \frac{a}{1+n}$$

ändern kann, wenn $y$ reell sein soll, so kann auch $y$ nie unendlich werden, sondern behält immer einen endlichen, völlig bestimmten reellen Werth, insofern es überhaupt reell ist, und wegen der doppelten Zeichen in der Gleichung 7) gehören zu jedem Werthe von $x$, für welchen $y$ überhaupt reell ist, zwei endliche völlig bestimmte Werthe von $y$, die absolut gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sind, woraus sich ergiebt, dass der Kegelschnitt, welcher in diesem Falle nach dem Obigen offenbar eine geschlossene, in sich selbst zurücklaufende Curve ist, auf beiden Seiten der Axe auf völlig gleiche Art liegt.

Nimmt man den Mittelpunkt der Entfernung der beiden Scheitel von einander, dessen Coordinaten nach dem Obigen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-n}+\frac{a}{1+n}\right)=\frac{a}{1-n^2} \text{ und } 0$$

sind, als den Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1$ an, so ist

$$x=\frac{a}{1-n^2}+x_1, \quad y=y_1;$$

folglich

$$x-a=\frac{n^2a}{1-n^2}+x_1,$$

also nach 7) die Gleichung des Kegelschnitts:

$$y_1^2 = n^2\left(\frac{a}{1-n^2}+x_1\right)^2 - \left(\frac{n^2a}{1-n^2}+x_1\right)^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$y_1^2 = \frac{n^2a^2}{1-n^2} - (1-n^2)x_1^2,$$

folglich

$$8) \quad \ldots \quad y_1 = \pm\sqrt{\frac{n^2a^2}{1-n^2} - (1-n^2)x_1^2}$$

ergiebt. Hieraus sieht man, dass $y_1$ und also auch $y$ seinen grössten absoluten Werth für $x_1 = 0$, also nach dem Obigen für

$$x = \frac{a}{1-n^2},$$

erreicht, und dass nach der vorstehenden Gleichung des Kegelschnitts dieser grösste Werth von $y$

$$\frac{n\,.\,\text{val. abs.}\,a}{\sqrt{1-n^2}}$$

ist.

Wenn $n>1$ ist, so haben die beiden durch die Formel

$$u = \mp\frac{a}{n\mp1}$$

gelieferten Werthe von $u$ entgegengesetzte Vorzeichen, und die beiden Scheitel liegen also auf entgegengesetzten Seiten der Directrix. Der durch die dem absoluten Werthe nach kleinste erste Coordinate

$$+\frac{a}{n+1}$$

bestimmte Scheitel, welcher also der Directrix am nächsten ist, liegt immer zwischen der Directrix und dem Brennpunkte, weil die obige erste Coordinate mit $a$ gleiches Vorzeichen hat und ihr absoluter Werth kleiner als der absolute Werth von $a$ ist. Die Gleichung des Kegelschnitts ist in diesem Falle wieder

$$(x-a)^2 + y^2 = n^2x^2,$$

woraus

$$9) \quad \ldots \quad y = \pm\sqrt{n^2x^2-(x-a)^2}$$

folgt. Also ist $y$ nur dann reell, wenn

$$n^2x^2-(x+a)^2 \overline{\gtrsim} 0,$$

oder wenn

$$\{(n-1)x+a\}\{(n+1)x-a\} \overline{\gtrsim} 0$$

ist. Wenn dieses Product verschwindet, so muss einer seiner Factoren verschwinden, was

$$(n-1)x+a=0 \text{ oder } (n+1)x-a=0,$$

also

$$x=-\frac{a}{n-1} \text{ oder } x=+\frac{a}{n+1}$$

giebt, folglich auf die beiden Scheitel des Kegelschnitts führt, wie es sein muss. Wenn dagegen das obige Product nicht verschwindet, so muss mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$(n-1)x+a \gtrless 0, \quad (n+1)x-a \gtrless 0;$$

also

$$x \gtrless -\frac{a}{n-1}, \quad x \gtrless +\frac{a}{n+1}$$

sein; und wenn daher $y$ reell sein soll, so darf $x$ keine Mittelgrösse zwischen

$$-\frac{a}{n-1} \text{ und } +\frac{a}{n+1}$$

sein, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle der ganze Kegelschnitt ausserhalb der beiden durch die Scheitel auf die Axe errichteten Perpendikel liegt, folglich auch keine geschlossene, in sich selbst zurücklaufende Curve sein kann. Wenn $a$ positiv ist, so sind die beiden Bedingungen

$$x>-\frac{a}{n-1}, \quad x>+\frac{a}{n+1}$$

zugleich erfüllt, wenn nur die zweite erfüllt ist, und die beiden Bedingungen

$$x<-\frac{a}{n-1}, \quad x<+\frac{a}{n+1}$$

sind zugleich erfüllt, wenn nur die erste erfüllt ist. Wenn dagegen $a$ negativ ist, so sind die beiden Bedingungen

$$x > -\frac{a}{n-1}, \quad x > +\frac{a}{n+1}$$

erfüllt, wenn nur die erste erfüllt ist, und die beiden Bedingungen

$$x < -\frac{a}{n-1}, \quad x < +\frac{a}{n+1}$$

sind erfüllt, wenn nur die zweite erfüllt ist. Wenn also $a$ positiv ist, so ist $y$ reell für $x > +\frac{a}{n+1}$ und für $x < -\frac{a}{n-1}$; und wenn $a$ negativ ist, so ist $y$ reell für $x > -\frac{a}{n-1}$ und für $x < +\frac{a}{n+1}$. Stellt man die Gleichung des Kegelschnitts unter der Form

$$y = \pm\sqrt{\{(n-1)x + a\}\{(n+1)x - a\}}$$

dar, so erhellet auf der Stelle, dass, wenn man im Falle eines positiven $a$ die Grösse $x$ von $+\frac{a}{n+1}$ an zunehmen oder von $-\frac{a}{n-1}$ an abnehmen lässt, dagegen im Falle eines negativen $a$ die Grösse $x$ von $-\frac{a}{n-1}$ an zunehmen, von $+\frac{a}{n+1}$ an abnehmen lässt, die Grösse $y$, absolut genommen, in's Unendliche wächst, und für jeden Werth von $x$ immer zwei absolut gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werthe hat. Nimmt man dies mit dem Vorhergehenden zusammen, so sieht man, dass im vorliegenden Falle der Kegelschnitt aus zwei von einander getrennten, ganz ausserhalb der beiden durch die Scheitel auf die Axe errichteten Perpendikel liegenden, in's Unendliche sich erstreckenden Zweigen oder Aesten besteht, von denen jeder auf völlig gleiche Weise auf beiden Seiten der Axe liegt. Jeder dieser beiden Zweige oder Aeste für sich liegt nach dem Vorhergehenden ganz auf einer und derselben Seite der Directrix, die beiden Zweige oder Aeste selbst liegen aber auf entgegengesetzten Seiten der Directrix. Der Brennpunkt und der denselben enthaltende Zweig liegen auf einer und derselben Seite der Directrix, der Brennpunkt und der andere denselben nicht enthaltende Zweig liegen auf entgegengesetzten Seiten der Directrix.

Nimmt man den Mittelpunkt der Entfernung der beiden Scheitel von einander, dessen Coordinaten nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\left(-\frac{a}{n-1} + \frac{a}{n+1}\right) = -\frac{a}{n^2-1} \text{ und } 0$$

sind, als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1$ an; so ist

$$x = -\frac{a}{n^2-1} + x_1, \quad y = y_1$$

und folglich

$$x - a = -\frac{n^2a}{n^2-1} + x_1;$$

also nach dem Obigen die Gleichung des Kegelschnitts:

$$y_1^2 = n^2(x_1 - \frac{a}{n^2-1})^2 - (x_1 - \frac{n^2a}{n^2-1})^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$y_1^2 = (n^2-1)x_1^2 - \frac{n^2a^2}{n^2-1},$$

also

$$10) \quad \ldots \quad y_1 = \pm\sqrt{(n^2-1)x_1^2 - \frac{n^2a^2}{n^2-1}}$$

ergiebt, aus welcher Gleichung man auch in Verbindung mit dem Obigen am leichtesten übersieht, dass die beiden Zweige oder Aeste des Kegelschnitts zwar eine verkehrte Lage gegen einander haben, sonst aber völlig gleich sind, weil nämlich die Werthe von $y_1$ ungeändert bleiben, man mag $x_1$ positiv oder negativ nehmen.

Wollte man in Bezug auf das primitive Coordinatensystem die Coordinaten 0, $v$ der Punkte bestimmen, in denen die Directrix von dem Kegelschnitte geschnitten wird, so würde man aus der allgemeinen Gleichung 1) erhalten:

$$v^2 = -a^2,$$

woraus man sieht, dass $v$ allgemein imaginär ist, und also kein Kegelschnitt seine Directrix schneidet.

Nach diesen Betrachtungen haben wir also drei wesentlich verschiedene Kegelschnitte, jenachdem die Charakteristik

$$n=1, \quad n<1, \quad n>1$$

ist, welche respective

Parabel, Ellipse, Hyperbel

genannt werden. Von den beiden in's Unendliche sich erstreckenden Zweigen oder Aesten der Hyperbel heisst der, welcher den

Brennpunkt enthält, der erste Zweig, und der, welcher den Brennpunkt nicht enthält, der zweite Zweig. Bei der Ellipse und Hyperbel heisst der Mittelpunkt der Entfernung der beiden Scheitel von einander der Mittelpunkt oder das Centrum des betreffenden Kegelschnitts.

Nach 8) ist die Gleichung der Ellipse in dem Systeme der $x_1 y_1$:

$$(1-n^2)x_1^2+y_1^2=\frac{n^2a^2}{1-n^2}$$

oder

$$11)\quad \left(\frac{x_1}{\frac{na}{1-n^2}}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\frac{na}{\sqrt{1-n^2}}}\right)^2=1.$$

Für

$$\frac{na}{1-n^2}=\frac{na}{\sqrt{1-n^2}}$$

wird also die Ellipse ein Kreis. Aus vorstehender Gleichung folgt aber

$$1-n^2=\sqrt{1-n^2},\quad \sqrt{1-n^2}=1,\quad 1-n^2=1,\quad n=0;$$

wodurch die Ausdrücke

$$\frac{na}{1-n^2} \text{ und } \frac{na}{\sqrt{1-n^2}}$$

beide verschwinden, insofern $a$ eine endliche völlig bestimmte Grösse ist. Das Wahre bei der Sache ist aber Folgendes. Wir wollen $n$ sich der Null nähern und den absoluten Werth von $a$ so in's Unendliche wachsen lassen, dass, indem $r$ eine bestimmte endliche reelle positive Grösse bezeichnet, immer

$$\text{val. abs. } \frac{na}{\sqrt{1-n^2}}=r$$

ist; dann wird, weil nun

$$\text{val. abs. } \frac{na}{1-n^2}=\frac{r}{\sqrt{1-n^2}}$$

ist, sich offenbar

$$\text{val. abs. } \frac{na}{1-n^2}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Grösse $r$, nach 11) also die Ellipse immer mehr und mehr und

bis zu jedem beliebigen Grade einem Kreise mit dem Halbmesser $x$ nähern, dessen Gleichung

$$\left(\frac{x_1}{r}\right)^2+\left(\frac{y_1}{r}\right)^2=1 \text{ oder } x_1^2+y_1^2=r^2$$

ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in der Axe und seine mit ihrem gehörigen Zeichen genommene Entfernung von der Directrix wird nach dem Obigen für jeden Werth von $a$ und $n$ durch den Bruch $\frac{a}{1-n^2}$ bestimmt, wächst aber, absolut genommen, offenbar in's Unendliche.

Die Gleichung der Hyperbel in dem Systeme der $x_1y_1$ ist nach 10)

$$(n^2-1)x_1^2-y_1^2=\frac{n^2a^2}{n^2-1}$$

oder

$$12) \quad \left(\frac{x_1}{\frac{na}{n^2-1}}\right)^2-\left(\frac{y_1}{\frac{na}{\sqrt{n^2-1}}}\right)^2=1.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{na}{n^2-1}=\frac{na}{\sqrt{n^2-1}}$$

folgt

$$n^2-1=\sqrt{n^2-1},\quad \sqrt{n^2-1}=1,\quad n^2-1=1,\quad n=\sqrt{2};$$

also

$$\frac{na}{n^2-1}=a\sqrt{2},\quad \frac{na}{\sqrt{n^2-1}}=a\sqrt{2};$$

folglich die Gleichung der Hyperbel in dem Systeme der $x_1y_1$:

$$13) \quad \left(\frac{x_1}{a\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{y_1}{a\sqrt{2}}\right)^2=1 \text{ oder } x_1^2-y_1^2=2a^2.$$

Eine Hyperbel, deren Charakteristik $\sqrt{2}$ ist, wird eine **gleichseitige Hyperbel** genannt.

Die Entfernung des Mittelpunkts einer solchen Hyperbel von der Directrix ist nach dem Obigen offenbar $-a$.

## II.

## Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte.

### §. 3.

Allen unseren Untersuchungen legen wir nun ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der $xy$ zu Grunde und bezeichnen in Bezug auf dieses System die Coordinaten des Brennpunkts des Kegelschnitts durch $(f, g)$, die Gleichung seiner Directrix durch

1) $$Ax + By + C = 0,$$

die Charakteristik aber wie gewöhnlich durch $n$. Ist dann $(xy)$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\frac{(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2}$$

das Quadrat seiner Entfernung von der Directrix, und

$$(x-f)^2 + (y-g)^2$$

ist das Quadrat seiner Entfernung vom Brennpunkte. Folglich ist nach §. 1. die Gleichung des Kegelschnitts:

$$\frac{n^2(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2} = (x-f)^2 + (y-g)^2$$

oder

2) $$n^2(Ax + By + C)^2 = (A^2 + B^2)\{(x-f)^2 + (y-g)^2\}.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man die Gleichung:

3) $$n(Ax + By + C) = \pm\sqrt{(A^2 + B^2)\{(x-f)^2 + (y-g)^2\}},$$

in welcher man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse $Ax + By + C$ positiv oder negativ ist. Um aber eine genauere Bestimmung wegen des Zeichens zu geben, müssen wir zuerst den folgenden Satz beweisen.

### §. 4.

*Lehrsatz.* Die Punkte $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ liegen auf einer und derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem charakterisirten Geraden, jenachdem die Grössen

$$Ax_1+By_1+C \text{ und } Ax_2+By_2+C$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Beweis. Eine der beiden Coordinatenaxen wird von der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Geraden immer geschnitten. Wir wollen annehmen, dass diese Coordinatenaxe die Axe der $x$ sei. Legen wir nun durch die Punkte $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ zwei der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Geraden parallele Gerade, so sind deren Gleichungen bekanntlich:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0, \quad A(x-x_2)+B(y-y_2)=0$$

oder

$$Ax+By+C-(Ax_1+By_1+C)=0,$$
$$Ax+By+C-(Ax_2+By_2+C)=0.$$

Bezeichnen jetzt $X_1$, $X_2$ die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden mit der Axe der $x$, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$AX_1+C-(Ax_1+By_1+C)=0,$$
$$AX_2+C-(Ax_2+By_2+C)=0;$$

oder:

$$AX_1+C=Ax_1+By_1+C,$$
$$AX_2+C=Ax_2+By_2+C;$$

und ist $X$ die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Geraden mit der Axe der $x$, so ist

$$AX+C=0.$$

Zieht man diese Gleichung von den beiden obigen Gleichungen zwischen $X_1$, $X_2$ ab, so erhält man:

$$A(X_1-X)=Ax_1+By_1+C,$$
$$A(X_2-X)=Ax_2+By_2+C;$$

woraus durch Multiplication die Gleichung

$$A^2(X_1-X)(X_2-X)=(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)$$

erhalten wird, welche uns zeigt, dass

$$X_1-X \text{ und } X_2-X$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem

$$Ax_1+By_1+C \text{ und } Ax_2+By_2+C$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten sind aber bekanntlich

$$X_1-X \text{ und } X_2-X$$

die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der durch die Punkte $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ mit der durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Geraden parallel gelegten Geraden mit der Axe der $x$, wenn man den Durchschnittspunkt dieser letzteren Geraden mit der Axe der $x$ als Anfang annimmt; und da nun nach dem Obigen diese Coordinaten gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem die Grössen

$$Ax_1+By_1+C \text{ und } Ax_2+By_2+C$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes auf ganz unzweideutige Weise.

## §. 5.

Mittelst dieses Satzes lässt sich nun die folgende Bestimmung wegen der Zeichen in der Gleichung 3) geben.

Weil nach §. 2. die Parabel, die Ellipse und der erste Zweig der Hyperbel immer ganz auf derselben Seite der Directrix liegen, auf welcher auch der Brennpunkt liegt, so haben für diese Curven nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze die Grössen

$$Af+Bg+C \text{ und } Ax+By+C$$

jederzeit gleiche Vorzeichen. Also muss man in der Gleichung

$$n(Ax+By+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}}$$

für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist. Weil aber nach §. 2. der zweite Zweig der Hyperbel und der Brennpunkt auf entgegengesetzten Seiten der Directrix liegen, so haben für denselben nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze die Grössen

$$Af+Bg+C \quad \text{und} \quad Ax+By+C$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und man muss also in der Gleichung

$$n(Ax+By+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}}$$

für den zweiten Zweig der Hyperbel das untere oder obere Vorzeichen nehmen, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Für mehrere Punkte der Parabel, der Ellipse und eines und desselben Zweiges der Hyperbel, deren Coordinaten $x$, $y$ sein mögen, muss man immer mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander, so dass man nämlich für alle Punkte in der folgenden Gleichung dasselbe Vorzeichen nimmt,

$$n(Ax+By+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}}$$

setzen. Für Punkte in verschiedenen Zweigen der Hyperbel muss man aber mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander für den einen Zweig

$$n(Ax+By+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}},$$

und für den anderen Zweig

$$n(Ax+By+C)=\mp\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}}$$

setzen.

## §. 6.

Um die Frage zu beantworten, ob unter der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte:

$$(x-f)^2+(y-g)^2=\frac{n^2(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

auch die Gleichung des Kreises enthalten ist, bringe man dieselbe auf die Form

$$(x-f)^2+(y-g)^2=\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2.(1+\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y)^2,$$

und lasse nun $n$ sich der Null, den absoluten Werth von $C$ aber sich dem Unendlichen so nähern, dass, wenn $r$ eine gewisse positive Grösse bezeichnet, der absolute Werth von $nC$ immer der Grösse $r\sqrt{A^2+B^2}$ gleich, also immer

$$\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=r^2$$

ist. Dann geht die obige Gleichung in die Gleichung

$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

eines aus dem Brennpunkte $(fg)$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kreises über. Für den Kreis muss man also in der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte immer

$$n=0,\quad C=\pm\infty,\quad \left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=r^2$$

setzen.

## III.

## Innerhalb und ausserhalb der Kegelschnitte liegende Punkte.

### §. 7.

Wir wollen wieder die beiden in §. 2. durch $xy$ und $x_1y_1$ bezeichneten Coordinatensysteme und die darauf bezüglichen Gleichungen betrachten, indem wir die Entfernungen des beliebigen Punktes $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ von der Directrix und vom Brennpunkte respective durch $u$ und $v$ bezeichnen.

### Parabel.

Der Kürze wegen wollen wir annehmen, dass die in §. 2. durch $a$ bezeichnete Grösse positiv sei. Es ist nun offenbar

$$u^2=x^2,\quad v^2=(x-a)^2+y^2;$$

nach §. 2. aber

$$x=\tfrac{1}{2}a+x_1,\quad y=y_1;$$

also:

[illegible] der Brennpunkt [illegible]

$r^2 = [illegible]$, $r^2 = (x_1 - \frac{1}{2}a)^2 + y_1^2$;

[illegible] nach § 1. [illegible] die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2ax.$$

Wenn nun $x_1$ negativ, also

$$ax_1 < 0$$

ist, so liegt nach § 2. der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ offenbar ausserhalb der Parabel. Nach dem Obigen ist aber

$$r^2 = x_1^2 - ax_1 + \tfrac{1}{4}a^2 + y_1^2,$$

also

$$u^2 = x_1^2 + ax_1 + \tfrac{1}{4}a^2;$$

$$r^2 - u^2 = y_1^2 - 2ax_1,$$

und folglich, weil $ax_1$ negativ ist, offenbar

$$r^2 - u^2 > 0, \text{ also } r > u.$$

Wenn ferner $x_1$ positiv, also

$$ax_1 > 0$$

ist, so liegt nach § 2. der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ offenbar ausserhalb oder innerhalb der Parabel, jenachdem

$$y_1^2 > 2ax_1 \text{ oder } y_1^2 < 2ax_1$$

ist. Nun ist nach dem Vorhergehenden

also

$$r^2 - u^2 = y_1^2 - 2ax_1,$$

folglich

$$r^2 - u^2 > 0 \text{ oder } r^2 - u^2 < 0,$$

$$r > u \text{ oder } r < u,$$

jenachdem der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ ausserhalb oder innerhalb der Parabel liegt. Weil endlich der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ nach § 1. für $r = u$ offenbar in der Parabel liegt, so ergiebt sich, wenn wir einen Punkt, dessen Entfernungen von der Directrix und von dem Brennpunkte $u$ und $v$ sind, der Kürze wegen durch $(uv)$ bezeichnen, der folgende Satz:

Jenachdem

$$v < u, \quad v = u, \quad v > u$$

ist, liegt der Punkt $(uv)$ innerhalb, in, ausserhalb der Parabel.

## Ellipse.

Indem wir dieselben Zeichen wie vorher beibehalten, ist auch wieder

$$u^2=x^2,\quad v^2=(x-a)^2+y^2.$$

Nach §. 2. ist aber

$$x=\frac{a}{1-n^2}+x_1,\quad y=y_1;$$

also:

$$u^2=\left(\frac{a}{1-n^2}+x_1\right)^2,\quad v^2=\left(\frac{n^2a}{1-n^2}+x_1\right)^2+y_1^2.$$

Ferner ist nach §. 2. für Punkte in der Ellipse

$$\left(\frac{x_1}{\frac{na}{1-n^2}}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\frac{na}{\sqrt{1-n^2}}}\right)^2=1,$$

woraus

$$y_1^2=\frac{n^2a^2}{1-n^2}-(1-n^2)x_1^2=(1-n^2)\left\{\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2-x_1^2\right\}$$

folgt. Da hiernach offenbar

$$\pm\frac{na}{1-n^2}$$

die ersten Coordinaten der Scheitel der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang sind, so liegt für

$$x_1^2>\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2$$

der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ jedenfalls ausserhalb der Ellipse. Nach dem Obigen ist aber

$$v^2=\left(\frac{n^2a}{1-n^2}\right)^2+\frac{2n^2ax_1}{1-n^2}+x_1^2+y_1^2,$$

$$(nu)^2=\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2+\frac{2n^2ax_1}{1-n^2}+n^2x_1^2;$$

also

$$v^2-(nu)^2=(1-n^2)\left\{x_1^2-\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2\right\}+y_1^2,$$

folglich unter der gemachten Voraussetzung offenbar

$$v^2-(nu)^2>0,\quad v>nu.$$

Wenn ferner

$$x_1^2<\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2$$

ist, so liegt der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ ausserhalb oder innerhalb der Ellipse, jenachdem

$$y_1^2>(1-n^2)\left\{\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2-x_1^2\right\}\text{ oder }y_1^2<(1-n^2)\left\{\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2-x_1^2\right\}$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen

$$v^2-(nu)^2=(1-n^2)\left\{x_1^2-\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2\right\}+y_1^2$$

oder

$$v^2-(nu)^2=y_1^2-(1-n^2)\left\{\left(\frac{na}{1-n^2}\right)^2-x_1^2\right\},$$

folglich

$$v^2-(nu)^2>0\quad\text{oder}\quad v^2-(nu)^2<0,$$

also

$$v>nu\quad\text{oder}\quad v<nu,$$

jenachdem der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ ausserhalb oder innerhalb der Ellipse liegt. Weil nun endlich nach §. 1. für $v=nu$ der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ in der Ellipse liegt, so ergiebt sich der folgende Satz:

Jenachdem

$$v<nu,\quad v=nu,\quad v>nu$$

ist, liegt der Punkt $(uv)$ innerhalb, in, ausserhalb der Ellipse.

## Hyperbel.

Es ist wieder

$$u^2=x^2,\quad v^2=(x-a)^2+y^2.$$

Nach §. 2. ist aber

$$x=x_1+\frac{a}{n^2-1},\quad y=y_1;$$

also:

$$u^2=\left(x_1-\frac{a}{n^2-1}\right)^2,\quad v^2=\left(x_1-\frac{n^2a}{n^2-1}\right)^2+y_1^2.$$

Ferner ist nach §. 2. für Punkte in der Hyperbel

$$\left(\frac{x_1}{\frac{na}{n^2-1}}\right)^2-\left(\frac{y_1}{\frac{na}{\sqrt{n^2-1}}}\right)^2=1,$$

woraus

$$y_1^2=(n^2-1)x_1^2-\frac{n^2a^2}{n^2-1}=(n^2-1)\left\{x_1^2-\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2\right\}$$

folgt. Da hiernach offenbar

$$\pm\frac{na}{n^2-1}$$

die ersten Coordinaten der Scheitel der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang sind, so liegt für

$$x_1^2<\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2$$

der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ jedenfalls ausserhalb der Hyperbel. Nach dem Obigen ist aber

$$v^2=x_1^2-\frac{2n^2ax_1}{n^2-1}+\left(\frac{n^2a}{n^2-1}\right)^2+y_1^2,$$

$$(nu)^2=n^2x_1^2-\frac{2n^2ax_1}{n^2-1}+\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2;$$

also

$$v^2-(nu)^2=(n^2-1)\left\{\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2-x_1^2\right\}+y_1^2,$$

folglich unter der gemachten Voraussetzung offenbar

$$v^2-(nu)^2>0,\quad v>nu.$$

Wenn ferner

$$x_1^2>\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2$$

ist, so liegt der Punkt $(xy)$ oder $(x_1y_1)$ ausserhalb oder innerhalb der Hyperbel, jenachdem

$$y_1^2>(n^2-1)\left\{x_1^2-\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2\right\}\text{ oder }y_1^2<(n^2-1)\left\{x_1^2-\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2\right\}$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen

$$v^2 - (nu)^2 = (n^2 - 1)\left\{\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2 - x_1^2\right\} + y_1^2,$$

oder

$$v^2 - (nu)^2 = y_1^2 - (n^2 - 1)\left\{x_1^2 - \left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2\right\},$$

folglich

$$v^2 - (nu)^2 > 0 \text{ oder } v^2 - (nu)^2 < 0,$$

also

$$v > nu \text{ oder } v < nu,$$

jenachdem der Punkt $(xy)$ oder $(x_1 y_1)$ ausserhalb oder innerhalb der Hyperbel liegt. Weil endlich nach §. 1. für $v = nu$ der Punkt $(xy)$ oder $(x_1 y_1)$ in der Hyperbel liegt, so ergiebt sich folgender Satz:

Jenachdem

$$v < nu, \quad v = nu, \quad v > nu$$

ist, liegt der Punkt $(uv)$ innerhalb, in, ausserhalb der Hyperbel.

Hiernach können wir nun den folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Ein Punkt, dessen Entfernungen von der Directrix und von dem Brennpunkte $u$ und $v$ sind, liegt

**innerhalb** des Kegelschnitts,
**in** dem Kegelschnitte,
**ausserhalb** des Kegelschnitts,

jenachdem

$$v < nu, \quad v = nu, \quad v > nu$$

ist.

## §. 8.

In Bezug auf das in §. 3. betrachtete rechtwinklige Coordinatensystem ist

$$u^2 = \frac{(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2}, \quad v^2 = (x - f)^2 + (y - g)^2,$$

wenn $x$, $y$ die Coordinaten des Punktes $(uv)$ in diesem Coordinatensysteme sind. Daher ergiebt sich nach dem vorhergehenden Paragraphen der folgende allgemeine Satz:

Jeder durch die Coordinaten $x$, $y$ bestimmte Punkt liegt

**innerhalb** des Kegelschnitts,
**in dem** Kegelschnitte,
**ausserhalb** des Kegelschnitts,

jenachdem

$$(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}<n^2(Ax+By+C)^2,$$
$$(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}=n^2(Ax+By+C)^2,$$
$$(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}>n^2(Ax+By+C)^2$$

ist.

Drückt man diese Bedingungen auf folgende Art aus:

$$(x-f)^2+(y-g)^2<\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\left(\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1\right)^2,$$
$$(x-f)^2+(y-g)^2=\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\left(\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1\right)^2,$$
$$(x-f)^2+(y-g)^2>\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\left(\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1\right)^2;$$

so werden dieselben nach §. 6. für den Kreis:

$$(x-f)^2+(y-g)^2<r^2,$$
$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2,$$
$$(x-f)^2+(y-g)^2>r^2;$$

wie auch anderweitig bekannt genug ist.

## IV.

## Zweite Directrix und zweiter Brennpunkt.

### §. 9.

Wir wollen uns jetzt die Frage zur Beantwortung vorlegen, ob es eine der Directrix parallele Gerade und einen zweiten Punkt giebt, zu welcher Geraden als Directrix und zu welchem Punkte als Brennpunkt alle Punkte des Kegelschnitts, unter Voraussetzung derselben Charakteristik, in ganz ähnlichen Beziehungen stehen, wie zu der ursprünglich gegebenen Directrix und dem ursprüng-

lich gegebenen Brennpunkte. Sollte dies der Fall sein, worüber das Folgende Aufschluss geben wird, so würden wir diese Gerade und diesen Punkt die zweite Directrix und den zweiten Brennpunkt, die ursprünglich gegebene Directrix und den ursprünglich gegebenen Brennpunkt aber die erste Directrix und den ersten Brennpunkt nennen.

## §. 10.

Die Charakteristik bezeichnen wir wie gewöhnlich durch $n$. Die Gleichung der ersten Directrix ist

$$Ax + By + C = 0,$$

und die Coordinaten des ersten Brennpunkts sind $f$, $g$. Da die zweite Directrix der ersten Directrix parallel sein soll, so hat ihre Gleichung die Form

$$Ax + By + C_1 = 0,$$

und die Coordinaten des zweiten Brennpunkts wollen wir durch $f_1$, $g_1$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt, sollen also für jeden Punkt des Kegelschnitts nach den Bedingungen der Aufgabe die zwei folgenden Gleichungen Statt finden:

$$n^2(Ax + By + C)^2 = (A^2 + B^2)\{(x-f)^2 + (y-g)^2\},$$

$$n^2(Ax + By + C_1)^2 = (A^2 + B^2)\{(x-f_1)^2 + (y-g_1)^2\}.$$

Die zweite Gleichung kann man auf die Form

$$n^2\{(Ax + By + C) - (C - C_1)\}^2$$
$$= (A^2 + B^2)\{[(x-f) + (f-f_1)]^2 + [(y-g) + (g-g_1)]^2\},$$

also auf die Form

$$n^2(Ax + By + C)^2 - 2n^2(C - C_1)(Ax + By + C) + n^2(C - C_1)^2$$
$$= (A^2 + B^2)\{(x-f)^2 + (y-g)^2\} + (A^2 + B^2)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2\}$$
$$+ 2(A^2 + B^2)\{(f-f_1)(x-f) + (g-g_1)(y-g)\}$$

bringen; und ziehen wir nun von dieser Gleichung die erste der beiden obigen Gleichungen ab, so erhalten wir die Gleichung:

$$n^2(C - C_1)^2 - 2n^2(C - C_1)(Ax + By + C)$$
$$= (A^2 + B^2)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2\} + 2(A^2 + B^2)\{(f-f_1)(x-f) + (g-g_1)(y-g)\}.$$

Da diese Gleichung unabhängig von besonderen Werthen von

$x$ und $y$ gelten muss, so würde man, hierauf gestützt, aus denselben auf bekannte Weise drei Gleichungen zur Bestimmung von $f_1$, $g_1$, $C_1$ abzuleiten suchen müssen. In wie weit diese Bestimmung möglich ist, will ich im Allgemeinen nicht untersuchen, sondern will vielmehr den zweiten Brennpunkt $(f_1 g_1)$ der besonderen Bedingung unterwerfen, dass er eben so wie der erste Brennpunkt $(fg)$ in der Axe des Kegelschnitts liegen soll.

Die Gleichung einer jeden auf der Directrix senkrecht stehenden Geraden hat im Allgemeinen die Form

$$Bx - Ay + C' = 0,$$

und soll nun diese Gerade durch den Brennpunkt $(fg)$ gehen, also die Axe des Kegelschnitts sein, so muss

$$Bf - Ag + C' = 0$$

sein, woraus sich für die Axe des Kegelschnitts die Gleichung

$$1) \quad B(x-f) - A(y-g) = 0$$

ergiebt. Soll also der zweite Brennpunkt $(f_1 g_1)$ in der Axe liegen, so muss

$$B(f_1 - f) - A(g_1 - g) = 0 \text{ oder } B(f - f_1) - A(g - g_1) = 0$$

sein, woraus sich

$$g - g_1 = \frac{B}{A}(f - f_1)$$

ergiebt. Führt man diesen Ausdruck von $g - g_1$ in die obige allgemeine Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$n^2(C - C_1)^2 - 2n^2(C - C_1)(Ax + By + C)$$
$$= \left(\frac{A^2 + B^2}{A}\right)^2 (f - f_1)^2 + 2\frac{A^2 + B^2}{A}(f - f_1)\{A(x - f) + B(y - g)\}$$

oder

$$n^2(C - C_1)^2 - 2n^2(C - C_1)(Ax + By + C)$$
$$= \left(\frac{A^2 + B^2}{A}\right)^2 (f - f_1)^2 + 2\frac{A^2 + B^2}{A}(f - f_1)\{(Ax + By + C) - (Af + Bg + C)\},$$

woraus sich die Gleichung

$$n^2(C - C_1)^2 + (Af + Bg + C)^2 - \left\{\frac{A^2 + B^2}{A}(f - f_1) - (Af + Bg + C)\right\}^2$$
$$= 2\left\{n^2(C - C_1) + \frac{A^2 + B^2}{A}(f - f_1)\right\}(Ax + By + C)$$

ergiebt. Weil diese Gleichung unabhängig von besonderen Werthen von $x$ und $y$, also auch von $Ax+By+C$, Statt finden muss; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$n^2(C-C_1)+\frac{A^2+B^2}{A}(f-f_1)=0,$$

$$n^2(C-C_1)^2+(Af+Bg+C)^2-\left\{\frac{A^2+B^2}{A}(f-f_1)-(Af+Bg+C)\right\}^2=0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt:

$$n^2(C-C_1)=-\frac{A^2+B^2}{A}(f-f_1),$$

also nach der zweiten Gleichung:

$$n^2(C-C_1)^2+(Af+Bg+C)^2-\{n^2(C-C_1)+(Af+Bg+C)\}^2=0,$$

welche Gleichung man leicht auf die Form

$$(C-C_1)\{(1-n^2)(C-C_1)-2(Af+Bg+C)\}=0$$

bringt, woraus sich die beiden Gleichungen

$$C-C_1=0,\quad (1-n^2)(C-C_1)-2(Af+Bg+C)=0$$

ergeben. Da nun aber die erste dieser beiden Gleichungen wieder auf die erste Directrix zurückführen würde, so bleibt nur die zweite Gleichung

$$(1-n^2)(C-C_1)-2(Af+Bg+C)=0,$$

aus welcher sich

$$C-C_1=\frac{2(Af+Bg+C)}{1-n^2}$$

ergiebt, woraus dann nach dem Obigen ferner

$$f-f_1=-\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(1-n^2)(A^2+B^2)},$$

$$g-g_1=-\frac{2n^2B(Af+Bg+C)}{(1-n^2)(A^2+B^2)}$$

folgt, so dass wir also jetzt die folgenden Formeln haben:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} C-C_1&=-\frac{2(Af+Bg+C)}{n^2-1},\\ f-f_1&=\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},\\ g-g_1&=\frac{2n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}.\end{aligned}\right.$$

Da diese Ausdrücke nur dann für $C_1$, $f_1$, $g_1$ endliche völlig bestimmte Werthe liefern, wenn $n \lessgtr 1$ ist, aber nicht für $n=1$, so haben die Ellipse und die Hyperbel zwei einander parallele Directrixen und zwei denselben entsprechende Brennpunkte, welche in einer und derselben auf den beiden Directrixen senkrechten Geraden, nämlich in der Axe des Kegelschnitts liegen; die Parabel hat aber nur eine Directrix und nur einen Brennpunkt.

## §. 11.

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Entfernung der beiden Brennpunkte $(fg)$ und $(f_1g_1)$ der Ellipse oder Hyperbel von einander wollen wir durch $F$, $G$ bezeichnen. Dann ist

$$F=\tfrac{1}{2}(f+f_1),\quad G=\tfrac{1}{2}(g+g_1)$$

oder

$$F=f-\tfrac{1}{2}(f-f_1),\quad G=g-\tfrac{1}{2}(g-g_1);$$

also nach 2):

$$3)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned}F&=f-\frac{n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},\\ G&=g-\frac{n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}.\end{aligned}\right.$$

Aus

$$f_1=f-\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$g_1=g-\frac{2n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

folgt sogleich

$$Af_1+Bg_1+C=-\frac{n^2+1}{n^2-1}(Af+Bg+C)$$

oder

$$4)\quad\ldots\quad\frac{Af+Bg+C}{Af_1+Bg_1+C}=-\frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Also ist nach 2):

$$5)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned}C-C_1&=\frac{2(Af_1+Bg_1+C)}{n^2+1},\\ f-f_1&=-\frac{2n^2A(Af_1+Bg_1+C)}{(n^2+1)(A^2+B^2)},\\ g-g_1&=-\frac{2n^2B(Af_1+Bg_1+C)}{(n^2+1)(A^2+B^2)};\end{aligned}\right.$$

und weil nun auch

$$F = f_1 + \tfrac{1}{2}(f + f_1), \quad G = g_1 + \tfrac{1}{2}(g - g_1)$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$6) \ldots \begin{cases} F = f_1 - \dfrac{n^2 A(Af_1 + Bg_1 + C)}{(n^2+1)(A^2+B^2)}, \\ G = g_1 - \dfrac{n^2 B(Af_1 + Bg_1 + C)}{(n^2+1)(A^2+B^2)}. \end{cases}$$

Aus 3) und 6) folgt leicht:

$$AF + BG + C = -\frac{Af + Bg + C}{n^2 - 1},$$

$$AF + BG + C = \frac{Af_1 + Bg_1 + C}{n^2 + 1};$$

oder

$$7) \ldots \begin{cases} \dfrac{Af + Bg + C}{AF + BG + C} = -(n^2 - 1), \\ \dfrac{Af_1 + Bg_1 + C}{AF + BG + C} = +(n^2 + 1); \end{cases}$$

welche Relationen alle sehr bemerkenswerth sind.

Auch kann man noch die Relation

$$8) \ldots \ldots AF + BG + C = \tfrac{1}{2}(C - C_1)$$

merken.

## §. 12.

Wir wollen jetzt die Coordinaten der Scheitel der Kegelschnitte suchen, welche bekanntlich die Durchschnittspunkte der Axe mit dem Kegelschnitte sind. Bezeichnen wir also die Coordinaten der Scheitel durch $f'$, $g'$ und $f_1'$, $g_1'$; so haben wir zu deren Bestimmung nach dem Obigen die Gleichungen:

$$n^2(Af' + Bg' + C)^2 = (A^2 + B^2)\{(f' - f)^2 + (g' - g)^2\},$$
$$B(f' - f) - A(g' - g) = 0$$

und

$$n^2(Af_1' + Bg_1' + C)^2 = (A^2 + B^2)\{(f_1' - f)^2 + (g_1' - g)^2\},$$
$$B(f_1' - f) - A(g_1' - g) = 0;$$

woraus man sieht, dass die Coordinaten der Scheitel die zwei reellen Wurzelpaare der beiden Gleichungen

$$n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\},$$

$$B(\mathfrak{x}-f)-A(\mathfrak{y}-g)=0$$

sind, wofern es zwei solche reelle Wurzelpaare giebt.

Um diese Gleichungen aufzulösen, bringe man sie auf die Form:

$$n^2\{A(\mathfrak{x}-f)+B(\mathfrak{y}-g)+Af+Bg+C\}^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\},$$

$$\mathfrak{y}-g=\frac{B}{A}(\mathfrak{x}-f);$$

woraus sich zur Bestimmung von $\mathfrak{x}-f$ die Gleichung

$$(n^2-1)\left(\frac{A^2+B^2}{A}\right)^2.(\mathfrak{x}-f)^2+2n^2(Af+Bg+C)\frac{A^2+B^2}{A}(\mathfrak{x}-f)$$

$$=-n^2(Af+Bg+C)^2$$

ergiebt.

Für die Parabel ist $n=1$, und die vorstehende Gleichung wird also in diesem Falle:

$$2\frac{A^2+B^2}{A}(\mathfrak{x}-f)=-(Af+Bg+C),$$

woraus sich

$$9)\quad\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\mathfrak{x}-f&=-\frac{A(Af+Bg+C)}{2(A^2+B^2)},\\ \mathfrak{y}-g&=-\frac{B(Af+Bg+C)}{2(A^2+B^2)}\end{aligned}\right.$$

ergiebt, so dass also die Parabel, wie wir auch schon wissen, nur einen Scheitel hat, dessen Coordinaten $f'$, $g'$ durch die Formeln

$$10)\quad\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}f'-f&=-\frac{A(Af+Bg+C)}{2(A^2+B^2)},\\ g'-g&=-\frac{B(Af+Bg+C)}{2(A^2+B^2)}\end{aligned}\right.$$

bestimmt werden.

Für die Ellipse oder Hyperbel ist $n \lessgtr 1$, und $\mathfrak{x}-f$ muss durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$(\mathfrak{x}-f)^2+\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}(\mathfrak{x}-f)=-\frac{n^2A^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)(A^2+B^2)^2}$$

bestimmt werden. Es ist aber nach 2) und 3):

$$f_1-f=-\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$F-f=-\frac{n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)};$$

also:

$$(\mathfrak{x}-f)^2-(f_1-f)(\mathfrak{x}-f)=-\frac{n^2-1}{4n^2}(f_1-f)^2,$$

$$(\mathfrak{x}-f)^2-2(F-f)(\mathfrak{x}-f)=-\frac{n^2-1}{n^2}(F-f)^2.$$

Durch Auflösung der ersten dieser beiden Gleichungen, in Verbindung mit der Gleichung

$$B(\mathfrak{x}-f)-A(\mathfrak{y}-g)=0$$

erhält man:

$$\mathfrak{x}-f=\frac{n\pm1}{2n}(f_1-f),$$

$$\mathfrak{y}-g=\frac{n\pm1}{2n}\cdot\frac{B}{A}(f_1-f);$$

also, weil offenbar

$$\frac{B}{A}=\frac{g_1-g}{f_1-f}$$

ist:

$$11)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}-f=\dfrac{n\pm1}{2n}(f_1-f),\\[2ex]\mathfrak{y}-g=\dfrac{n\pm1}{2n}(g_1-g);\end{cases}$$

also:

$$12)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}=\dfrac{n\mp1}{2n}f+\dfrac{n\pm1}{2n}f_1,\\[2ex]\mathfrak{y}=\dfrac{n\mp1}{2n}g+\dfrac{n\pm1}{2n}g_1.\end{cases}$$

Weil nach 11)

$$(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2=\left(\frac{n\pm1}{2n}\right)^2\{(f_1-f)^2+(g_1-g)^2\}$$

ist, so sieht man, dass, wenn jetzt $(f'g')$ der dem Brennpunkte $(fg)$ nächste Scheitel, also $(f_1'g_1')$ der am weitesten von dem Brennpunkte $(fg)$ entfernte Scheitel ist, offenbar

$$13) \ldots \begin{cases} f'-f=\frac{n-1}{2n}(f_1-f), & g'-g=\frac{n-1}{2n}(g_1-g); \\ f_1'-f=\frac{n+1}{2n}(f_1-f), & g_1'-g=\frac{n+1}{2n}(g_1-g); \end{cases}$$

also

$$14) \ldots \begin{cases} f'=\frac{n+1}{2n}f+\frac{n-1}{2n}f_1, & g'=\frac{n+1}{2n}g+\frac{n-1}{2n}g_1; \\ f_1'=\frac{n-1}{2n}f+\frac{n+1}{2n}f_1, & g_1'=\frac{n-1}{2n}g+\frac{n+1}{2n}g_1 \end{cases}$$

gesetzt werden muss.

Aus 13) und 2) erhält man leicht:

$$14^*) \ldots \begin{cases} f'-f=-\frac{nA(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)}, \\ g'-g=-\frac{nB(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)}; \\ f_1'-f=-\frac{nA(Af+Bg+C)}{(n-1)(A^2+B^2)}, \\ g_1'-g=-\frac{nB(Af+Bg+C)}{(n-1)(A^2+B^2)}; \end{cases}$$

und da aus den beiden ersten dieser Formeln die Formeln 10) für die Parabel offenbar hervorgehen, wenn man $n=1$ setzt, so sieht man, dass die den, dem Brennpunkte $(fg)$ nächsten Scheitel $(f'g')$ bestimmenden Formeln ganz allgemein für alle drei Kegelschnitte gelten.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts der Entfernung der beiden Scheitel von einander durch $F'$, $G'$; so ist

$$F'=\tfrac{1}{2}(f'+f_1'), \quad G'=\tfrac{1}{2}(g'+g_1');$$

also nach 14):

$$F'=\tfrac{1}{2}(f+f_1), \quad G'=\tfrac{1}{2}(g+g_1);$$

folglich nach dem Obigen:

$$F'=F, \quad G'=G;$$

so dass also die Punkte $(FG)$ und $(F'G')$, von denen wir den letzteren in §. 2. den Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel genannt haben, mit einander zusammenfallen.

Bezeichnen wir die Entfernung der beiden Brennpunkte von einander durch $2e$, die Entfernung der beiden Scheitel von einander durch $2a$, so ist:

$$4e^2=(f-f_1)^2+(g-g_1)^2,$$

$$4a^2=(f'-f_1')^2+(g'-g_1')^2.$$

Nach 13) oder 14) ist aber:

$$f'-f_1'=\frac{1}{n}(f-f_1),$$

$$g'-g_1'=\frac{1}{n}(g-g_1);$$

also:

$$4e^2=(f-f_1)^2+(g-g_1)^2,$$

$$4a^2=\frac{1}{n^2}\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2\};$$

und folglich nach 2):

$$15)\quad\ldots\quad\begin{cases} e^2=\dfrac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)}, \\ a^2=\dfrac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)}. \end{cases}$$

Weil hiernach

$$16)\quad\ldots\quad e^2=n^2a^2,\quad e=na$$

ist, so ist

$$a^2-e^2=(1-n^2)a^2,\quad e^2-a^2=(n^2-1)a^2,$$

und folglich für die Ellipse $a^2-e^2$, für die Hyperbel $e^2-a^2$ positiv. Daher kann man für die Ellipse und die Hyperbel respective

$$b^2=a^2-e^2 \text{ und } b^2=e^2-a^2,$$

also respective

$$e^2=a^2-b^2 \text{ und } e^2=a^2+b^2,$$

folglich allgemein

17) . . . . . . . . $e^2 = a^2 \mp b^2$

setzen, wenn man für die Ellipse das obere, für die Hyperbel das untere Zeichen nimmt. Weil nach dem Obigen für die Ellipse und die Hyperbel respective

$$b^2 = (1-n^2)a^2 \text{ und } b^2 = (n^2-1)a^2$$

ist, so hat man nach 15) für die Ellipse die Formeln:

$$18) \quad \left\{\begin{aligned} a^2 &= \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)}, \\ b^2 &= \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)(A^2+B^2)}, \\ e^2 &= \frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)}; \end{aligned}\right.$$

und für die Hyperbel die Formeln:

$$19) \quad \left\{\begin{aligned} a^2 &= \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)}, \\ b^2 &= \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)(A^2+B^2)}, \\ e^2 &= \frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)}. \end{aligned}\right.$$

Auch ist für die Ellipse:

$$20) \quad \left\{\begin{aligned} & b = a\sqrt{1-n^2}, \quad e = na = \frac{nb}{\sqrt{1-n^2}}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1-n^2}; \\ & \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = n; \end{aligned}\right.$$

und für die Hyperbel:

$$21) \quad \left\{\begin{aligned} & b = a\sqrt{n^2-1}, \quad e = na = \frac{nb}{\sqrt{n^2-1}}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{n^2-1}; \\ & \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = n. \end{aligned}\right.$$

Die so häufig bei den vielen Anwendungen, die sich von der Ellipse und Hyperbel machen lassen, vorkommenden Grössen

$$\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ und } \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

sind also nichts weiter als die Charakteristiken dieser Curven.

Soll bei der Ellipse $a=b$ sein, so muss nach 20)

$$1-n^2=1,\quad n=0$$

sein, welcher Fall schon früher, mit Nachweisung seiner eigentlichen Bedeutung, besprochen worden ist.

Soll bei der Hyperbel $a=b$ sein, so muss nach 21)

$$n^2-1=1,\quad n=\sqrt{2}$$

sein, welchen Fall wir gleichfalls schon früher besprochen haben.

Die Entfernung des Brennpunkts $(fg)$ von der entsprechenden Directrix ist nach den Lehren der analytischen Geometrie der absolute Werth von

$$\frac{Af+Bg+C}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

also nach dem Obigen ist diese Entfernung für die Ellipse:

$$\frac{1-n^2}{n}a=\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}b=\frac{1-n^2}{n^2}e,$$

und für die Hyperbel:

$$\frac{n^2-1}{n}a=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}b=\frac{n^2-1}{n^2}e.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist diese Entfernung also:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}e,$$

folglich immer der Hälfte der Excentricität gleich, da die Grösse $e$ die Excentricität der Ellipse oder der Hyperbel genannt zu werden pflegt.

## §. 13.

Des Folgenden wegen sind rücksichtlich der Ellipse und Hyperbel noch die folgenden Bemerkungen nöthig.

Nach §. 10. wird jede dieser Curven durch die beiden Gleichungen

$$n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\},$$
$$n^2(Ax+By+C_1)^2=(A^2+B^2)\{(x-f_1)^2+(y-g_1)^2\}$$

charakterisirt. Der erste und zweite Brennpunkt sind $(fg)$ und $(f_1g_1)$, und die Gleichungen der ersten und zweiten Directrix sind respective

$$Ax+By+C=0,\quad Ax+By+C_1=0.$$

Für die Ellipse ist nach §. 5.

$$n(Ax+By+C_1)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f_1)^2+(y-g_1)^2\}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af_1+Bg_1+C_1$ positiv oder negativ ist. Was aber die Hyperbel betrifft, so erhellet aus den beiden obigen Gleichungen, wenn man sich die Curve aus denselben construirt denkt, auf der Stelle, dass in Bezug auf den zweiten Brennpunkt und die zweite Directrix der zweite Zweig der erste und der erste Zweig der zweite ist, so dass also nach §. 5.:

$$n(Ax+By+C_1)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f_1)^2+(y-g_1)^2\}}$$

ist, wenn man für den ersten Zweig das untere oder obere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af_1+Bg_1+C_1$ positiv oder negativ ist, dagegen für den zweiten Zweig das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af_1+Bg_1+C_1$ positiv oder negativ ist. Nun ist aber nach 2):

$$f_1=f-\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$g_1=g-\frac{2n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$C_1=C+\frac{2(Af+Bg+C)}{n^2-1};$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$Af_1+Bg_1+C_1=Af+Bg+C-2(Af+Bg+C)$$

oder

$$22)\quad \ldots \quad Af_1+Bg_1+C_1=-(Af+Bg+C),$$

so dass folglich die Grössen $Af+Bg+C$ und $Af_1+Bg_1+C_1$ absolut gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Daher kann man das Obige auch auf folgende Art ausdrücken:

Für die Ellipse ist

$$n(Ax+By+C_1)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f_1)^2+(y-g_1)^2\}}$$

wenn man das untere oder obere Vorzeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist, und für die Hyperbel ist

$$n(Ax+By+C_1)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f_1)^2+(y-g_1)^2\}},$$

wenn man für den ersten Zweig das obere oder untere Vorzeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist, für den zweiten Zweig dagegen das untere oder obere Vorzeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Vergleicht man diese Resultate mit §. 5., so ergiebt sich Folgendes:

Für die Ellipse haben die Grössen

$$Ax+By+C \text{ und } Ax+By+C_1$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und die erste dieser beiden Grössen ist positiv oder negativ, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Für den ersten Zweig der Hyperbel haben die Grössen

$$Ax+By+C \text{ und } Ax+By+C_1$$

gleiche Vorzeichen, und sind positiv oder negativ, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Für den zweiten Zweig der Hyperbel haben die Grössen

$$Ax+By+C \text{ und } Ax+By+C_1$$

gleiche Vorzeichen, und sind negativ oder positiv, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

## V.

## Vectoren.

### §. 14.

Jede von einem Punkte eines Kegelschnitts nach einem seiner Brennpunkte gezogene Gerade heisst ein Vector. Da die Parabel nur einen Brennpunkt hat, so entspricht jedem ihrer Punkte nur ein Vector; die Ellipse und Hyperbel haben aber zwei Brennpunkte, und jedem ihrer Punkte entsprechen daher zwei Vectoren. Wenn $(xy)$ ein beliebiger Punkt eines Kegelschnitts ist, so sollen im Folgenden die von demselben nach den Brennpunkten $(fg)$ und $(f_1g_1)$ gezogenen Vectoren respective durch $V$ und $V_1$ bezeichnet werden.

Weil

$$V^2=(x-f)^2+(y-g)^2,\quad V_1^2=(x-f_1)^2+(y-g_1)^2$$

ist, so ist nach den beiden aus §. 10. bekannten schon im vorigen Paragraphen angewandten Gleichungen:

$$n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)V^2,$$
$$n^2(Ax+By+C_1)^2=(A^2+B^2)V_1^2;$$

also:

$$1) \ldots V^2 = \frac{n^2(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}, \quad V_1^2 = \frac{n^2(Ax+By+C_1)^2}{A^2+B^2}.$$

Für die Parabel gilt bloss die erste Gleichung; nur für die Ellipse und die Hyperbel gelten beide Gleichungen.

§. 15.

Für die Parabel ist $n=1$, und nach §. 5. ist die Grösse $Ax+By+C$ positiv oder negativ, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist; also ist nach der ersten der beiden Gleichungen 1):

$$2) \ldots \ldots \quad V = \pm \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

§. 16.

Für die Ellipse haben nach §. 13. die Grössen

$$Ax+By+C \text{ und } Ax+By+C_1$$

entgegengesetze Vorzeichen, und die erste dieser beiden Grössen ist positiv oder negativ, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist. Also ist nach 1):

$$3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} V = \pm \dfrac{n(Ax+By+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\[2ex] V_1 = \mp \dfrac{n(Ax+By+C_1)}{\sqrt{A^2+B^2}}; \end{array} \right.$$

wenn mann die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen erhält man immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen:

$$V + V_1 = \pm \frac{n(C-C_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

also nach IV. 2):

$$V+V_1=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{(1-n^2)\sqrt{A^2+B^2}},$$

und folglich, weil nach IV. 18) mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen offenbar

$$2a=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{(1-n^2)\sqrt{A^2+B^2}}$$

ist:

4) $$V+V_1=2a.$$

Für $V_1$ erhält man hieraus leicht den folgenden Ausdruck:

5)... $$V_1=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{(1-n^2)\sqrt{A^2+B^2}}\left\{1+\frac{1-n^2}{2}\cdot\frac{Ax+By+C}{Af+Bg+C}\right\}$$

oder

6)... $$V_1=\mp\frac{2n(Af+Bg+C)}{(n^2-1)\sqrt{A^2+B^2}}\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax+By+C}{Af+Bg+C}\right\},$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem die Grösse $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

## §. 17.

Für den ersten Zweig der Hyperbel haben nach §. 13. die Grössen

$$Ax+By+C \text{ und } Ax+By+C_1$$

mit der Grösse $Af+Bg+C$ beide gleiche Vorzeichen. Also ist nach 1):

7) $$\left\{\begin{aligned}V&=\pm\frac{n(Ax+By+C)}{\sqrt{A^2+B^2}},\\ V_1&=\pm\frac{n(Ax+By+C_1)}{\sqrt{A^2+B^2}};\end{aligned}\right.$$

wenn man die oberen oder unteren Vorzeichen nimmt, jenachdem $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Also ist, immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen:

$$V - V_1 = \pm \frac{n(C - C_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

also nach IV. 2):

$$V - V_1 = \mp \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}},$$

oder

$$V_1 - V = \pm \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Nach IV. 19) ist aber:

$$2a = \pm \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}},$$

also:

8) . . . . . . . . $V_1 - V = \pm 2a.$

Für $V_1$ erhält man hieraus den folgenden Ausdruck:

9)... $V_1 = \pm \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}}\left\{1 + \frac{n^2 - 1}{2} \cdot \frac{Ax + By + C}{Af + Bg + C}\right\},$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $Af + Bg + C$ positiv oder negativ ist.

Für den zweiten Zweig der Hyperbel haben nach §. 13. die Grössen

$$Ax + By + C \text{ und } Ax + By + C_1$$

mit der Grösse $Af + Bg + C$ entgegengesetze Vorzeichen. Also ist nach 1):

$$10) \quad \begin{cases} V = \pm \dfrac{n(Ax + By + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ V_1 = \pm \dfrac{n(Ax + By + C_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \end{cases}$$

die unteren oder oberen Vorzeichen genommen, jenachdem $Af + Bg + C$ positiv oder negativ ist.

Also ist, immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen:

$$V - V_1 = \pm \frac{n(C - C_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

also nach IV. 2):

$$V - V_1 = \mp \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Nach IV. 19) ist aber

$$2a = \mp \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}},$$

also:

$$11) \quad \ldots \ldots \quad V - V_1 = 2a.$$

Für $V_1$ erhält man hieraus den folgenden Ausdruck:

$$12) \ldots V_1 = \pm \frac{2n(Af + Bg + C)}{(n^2 - 1)\sqrt{A^2 + B^2}} \left\{ 1 + \frac{n^2 - 1}{2} \cdot \frac{Ax + By + C}{Af + Bg + C} \right\},$$

das untere oder obere Zeichen genommen, jenachdem $Af + Bg + C$ positiv oder negativ ist.

Nach 6), 9) 12) ist für die Ellipse und Hyperbel allgemein:

$$13) \quad V_1^2 = \frac{4n^2}{(n^2 - 1)^2} \left\{ \frac{Af + Bg + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{n^2 - 1}{2} \cdot \frac{Ax + By + C}{Af + Bg + C} \right\}^2.$$

## VI.

## Parameter.

### §. 18.

Unter dem Parameter eines Kegelschnitts versteht man die durch den Brennpunkt $(fg)$, welchen es für alle Kegelschnitte giebt, parallel mit der Directrix gezogene Sehne desselben.

Die Gleichung der Directrix ist

$$Ax + By + C = 0,$$

und die Gleichung der durch den Brennpunkt $(fg)$ parallel mit der Directrix gezogenen Geraden ist folglich:

$$A(x - f) + B(y - g) = 0.$$

Bezeichnen nun $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte der durch den Brennpunkt $(fg)$ parallel mit der Directrix gezogenen Geraden mit dem Kegelschnitte, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$A(\mathfrak{x}-f)+B(\mathfrak{y}-g)=0,$$

$$n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\}$$

oder

$$A(\mathfrak{x}-f)+B(\mathfrak{y}-g)=0,$$

$$n^2\{A(\mathfrak{x}-f)+B(\mathfrak{y}-g)+Af+Bg+C\}^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\}$$

oder

$$A(\mathfrak{x}-f)+B(\mathfrak{y}-g)=0,$$

$$n^2(Af+Bg+C)^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\};$$

woraus man leicht mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander erhält:

$$1)\quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}-f=\pm\dfrac{nB(Af+Bg+C)}{A^2+B^2}, \\ \mathfrak{y}-g=\mp\dfrac{nA(Af+Bg+C)}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun den Parameter mit $p$, so ist offenbar

$$\tfrac{1}{4}p^2=(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$p^2=\frac{4n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2},$$

also:

$$2)\quad \ldots \quad p=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

und nach IV. 22):

$$3)\quad \ldots \quad p=\mp\frac{2n(Af_1+Bg_1+C_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $Af+Bg+C$ positiv oder negativ ist.

Aus 2) und IV. 18), 19) findet man leicht für die Ellipse und Hyperbel:

4) $$p=\frac{2b^2}{a}.$$

Die Entfernung des Brennpunkts $(fg)$ von der entsprechenden Directrix ist nach den Lehren der analytischen Geometrie der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{Af+Bg+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

so dass also nach 2) die Entfernung jedes Brennpunkts von der entsprechenden Directrix $\frac{p}{2n}$ ist; für die Parabel, wo $n=1$ ist, also $\frac{1}{2}p$.

Nach IV. 14*) ist das Quadrat der Entfernung des dem Brennpunkte $(fg)$ nächsten Scheitels $(f'g')$ von dem Brennpunkte $(fg)$:

$$(f'-f)^2+(g'-g)^2=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2},$$

und das Quadrat der Entfernung des am weitesten von dem Brennpunkte $(fg)$ entfernten Scheitels $(f_1'g_1')$ von dem Brennpunkte $(fg)$ ist:

$$(f_1'-f)^2+(g_1'-g)^2=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Also sind nach 2) die Entfernungen der beiden Scheitel von den Brennpunkten bei der Ellipse:

$$\frac{p}{2(1+n)} \text{ und } \frac{p}{2(1-n)},$$

und bei der Hyperbel:

$$\frac{p}{2(n+1)} \text{ und } \frac{p}{2(n-1)}.$$

Für die Parabel gelten nur die ersten Ausdrücke, und es ist also bei dieser Curve $\frac{1}{4}p$ die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte.

## VII.

## Sehnen, Durchmesser und Asymptoten.

### §. 19.

Die Coordinaten des Mittelpunkts einer zwei Punkte $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ eines Kegelschnitts verbindenden Sehne desselben seien $u$, $v$; so ist

$$u=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\quad v=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Weil $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ Punkte des Kegelschnitts sind, so finden zwischen deren Coordinaten die folgenden Gleichungen Statt:

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2=(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\},$$

$$n^2(Ax_2+By_2+C)^2=(A^2+B^2)\{(x_2-f)^2+(y_2-g)^2\};$$

durch deren Subtraction von einander man die folgende Gleichung erhält:

$$n^2\{(Ax_1+By_1+C)^2-(Ax_2+By_2+C)^2\}$$

$$=(A^2+B^2)\{[(x_1-f)^2-(x_2-f)^2]+[(y_1-g)^2-(y_2-g)^2]\},$$

welche man leicht auf die Form

$$n^2\{A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)\}\{A(x_1+x_2)+B(y_1+y_2)+2C\}$$

$$=(A^2+B^2)\{(x_1-x_2)(x_1+x_2-2f)+(y_1-y_2)(y_1+y_2-2g)\},$$

also auf die Form

$$1)\ \ldots\ n^2\{A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)\}(Au+Bv+C)$$

$$=(A^2+B^2)\{(x_1-x_2)(u-f)+(y_1-y_2)(v-g)\}$$

bringt; und aus dieser Gleichung erhält man leicht:

$$2)\ldots\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{n^2A(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(u-f)}{n^2B(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(v-g)},$$

oder

$$3)\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{\{(n^2-1)A^2-B^2\}u+n^2ABv+n^2AC+(A^2+B^2)f}{\{(n^2-1)B^2-A^2\}v+n^2ABu+n^2BC+(A^2+B^2)g},$$

oder

4)

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{\{(n^2-1)A^2-B^2\}(u-f)+n^2AB(v-g)+n^2A(Af+Bg+C)}{\{(n^2-1)B^2-A^2\}(v-g)+n^2AB(u-f)+n^2B(Af+Bg+C)},$$

Betrachten wir nun eine Schaar paralleler Sehnen von beliebiger, aber bestimmter Lage, so ist für dieselben $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ offenbar eine constante Grösse, die wir im Allgemeinen durch $K$ bezeichnen, und also

5) . . . . . . . . $K=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

setzen wollen. Dann erhalten wir nach dem Vorgehenden für die Mittelpunkte $(uv)$ dieser Schaar paralleler Sehnen die folgende Gleichung:

$$6) \quad K=-\frac{n^2A(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(u-f)}{n^2B(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(v-g)},$$

oder

$$7) \quad K=-\frac{\{(n^2-1)A^2-B^2\}u+n^2ABv+n^2AC+(A^2+B^2)f}{\{(n^2-1)B^2-A^2\}v+n^2ABu+n^2BC+(A^2+B^2)g},$$

oder

$$8) \quad K=-\frac{\{(n^2-1)A^2-B^2\}(u-f)+n^2AB(v-g)+n^2A(Af+Bg+C)}{\{(n^2-1)B^2-A^2\}(v-g)+n^2AB(u-f)+n^2B(Af+Bg+C)}.$$

Leicht bringt man die Gleichungen 7) und 8) aber auch auf die folgenden Formen:

$$9) \quad \left.\begin{array}{l}\{n^2ABK+[(n^2-1)A^2-B^2]\}u\\ +\{[(n^2-1)B^2-A^2]K+n^2AB\}v\\ +\{n^2BC+(A^2+B^2)g\}K+\{n^2AC+(A^2+B^2)f\}\end{array}\right\}=0$$

und

$$10) \quad \left.\begin{array}{l}\{n^2ABK+[(n^2-1)A^2-B^2]\}(u-f)\\ +\{[(n^2-1)B^2-A^2]K+n^2AB\}(v-g)\\ +n^2(BK+A)(Af+Bg+C)\end{array}\right\}=0.$$

Weil diese Gleichungen in Bezug auf $u$, $v$ vom ersten Grade sind, so ergiebt sich folgender wichtige und merkwürdige Satz:

**Die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen eines Kegelschnitts liegen in einer Geraden, oder der geometrische Ort der Mittelpunkte aller parallelen Sehnen eines Kegelschnitts ist eine Gerade.**

## §. 20.

Betrachten wir zwei beliebige Schaaren paralleler Sehnen, und bezeichnen die Coordinaten der Durchschnittspunkte der

geometrischen Oerter ihrer Mittelpunkte durch $U$, $V$; so haben wir zu deren Bestimmung nach 10) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(U-f) \\ +\{[(n^2-1)B^2 - A^2]K + n^2AB\}(V-g) \\ +n^2(BK+A)(Af+Bg+C)\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{n^2ABK' + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(U-f) \\ +\{[(n^2-1)B^2 - A^2]K' + n^2AB\}(V-g) \\ +n^2(BK'+A)(Af+Bg+C)\end{array}\right\} = 0.$$

Die Bestimmung von $U-f$, $V-g$ aus diesen beiden Gleichungen gründen wir auf den folgenden allgemeinen arithmetischen Lehrsatz, der überhaupt oft zur Abkürzung der Rechnung die vortrefflichsten Dienste leistet:

*Lehrsatz.*

**Wenn zwischen zwei Grössen $x$, $y$ zwei Gleichungen von der allgemeinen Form**

$$(ap+a_1)x + (bp+b_1)y + cp + c_1 = 0,$$

$$(ap'+a_1)x + (bp'+b_1)y + cp' + c_1 = 0$$

**Statt finden, so ist unter der Voraussetzung, dass $p-p'$ nicht verschwindet:**

$$x = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1},\quad y = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1}.$$

**Beweis.**

Eliminirt man aus den beiden gegebenen Gleichungen zuerst $y$, dann $x$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\{(ap+a_1)(bp'+b_1) - (bp+b_1)(ap'+a_1)\}x \\ +\{(cp+c_1)(bp'+b_1) - (bp+b_1)(cp'+c_1)\}\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(ap+a_1)(bp'+b_1) - (bp+b_1)(ap'+a_1)\}y \\ -\{(cp+c_1)(ap'+a_1) - (ap+a_1)(cp'+c_1)\}\end{array}\right\} = 0.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(ap+a_1)(bp'+b_1) - (bp+b_1)(ap'+a_1) = (ab_1 - ba_1)(p-p')$$

und ganz eben so:

$$(cp+c_1)(ap'+a_1)-(ap+a_1)(cp'+c_1)=(ca_1-ac_1)(p-p'),$$

$$(cp+c_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(cp'+c_1)=(cb_1-bc_1)(p-p');$$

folglich unter der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$\begin{aligned}(ab_1-ba_1)x+(cb_1-bc_1)&=0,\\(ab_1-ba_1)y-(ca_1-ac_1)&=0;\end{aligned}$$

also:

$$x=\frac{bc_1-cb_1}{ab_1-ba_1},\quad y=\frac{ca_1-ac_1}{ab_1-ba_1};$$

wie bewiesen werden sollte.

Wenden wir nun diesen Satz zur Auflösung der beiden obigen Gleichungen zwischen $U-f$, $V-g$ an, so erhalten wir mittelst sehr leichter Rechnung:

$$11)\ \ldots\quad \left\{\begin{aligned}U&=f-\frac{n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},\\V&=g-\frac{n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}.\end{aligned}\right.$$

Nur für $n \lessgtr 1$, also nur für die Ellipse und die Hyperbel, sind diese Werthe von $U$, $V$ endliche völlig bestimmte Grössen, und nach IV. 3) ist

$$U=F,\quad V=G;$$

woraus sich der folgende merkwürdige Satz ergiebt:

Die geometrischen Oerter der Mittelpunkte aller Schaaren paralleler Sehnen der Ellipse und Hyperbel gehen durch den Mittelpunkt der Curve.

Für $n=1$, also für die Parabel, werden die obigen Werthe von $U$, $V$ unendlich, und wir müssen daher diesen Fall besonders betrachten.

Nach 9) und 10) ist die Gleichung des geometrischen Orts der Mittelpunkte einer Schaar paralleler Sehnen in diesem Falle:

$$12)\ldots\quad \left.\begin{aligned}&(AK-B)(Bu-Av)\\&+\{BC+(A^2+B^2)g\}K+\{AC+(A^2+B^2)f\}\end{aligned}\right\}=0.$$

oder:

$$13) \quad \ldots \quad \left. \begin{array}{l} (AK-B)\{B(u-f)-A(v-g)\} \\ +(BK+A)(Af+Bg+C) \end{array} \right\} = 0,$$

also:

$$14) \quad Bu - Av + \frac{\{BC+(A^2+B^2)g\}K+\{AC+(A^2+B^2)f\}}{AK-B} = 0$$

oder

$$15) \quad B(u-f) - A(v-g) + \frac{BK+A}{AK-B}(Af+Bg+C) = 0.$$

Die Gleichung des die Schaar paralleler Sehnen der Parabel, deren Gleichung für ein constantes $K$ und ein veränderliches $L$

$$y = Kx + L$$

ist, halbirenden Durchmessers der Parabel ist hiernach:

$$14^*) \quad Bx - Ay + \frac{\{BC+(A^2+B^2)g\}K+\{AC+(A^2+B^2)f\}}{AK-B} = 0$$

oder

$$15^*) \quad B(x-f) - A(y-g) - \frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C) = 0.$$

Nach IV. 1) ist die Gleichung der Axe

$$B(x-f) - A(y-g) = 0$$

oder

$$Bx - Ay - (Bf - Ag) = 0,$$

welches, mit dem Obigen verglichen, zu dem folgenden merkwürdigen Satze führt:

**Die geometrischen Oerter der Mittelpunkte aller Schaaren paralleler Sehnen der Parabel sind der Axe der Curve parallel.**

Jede durch den Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel gehende und jede der Axe der Parabel parallele Gerade heisst ein **Durchmesser** der Curve.

## §. 21.

Die Gleichung des die Schaar paralleler Sehnen, deren Gleichung für ein constantes $K$ und ein veränderliches $L$

$$y = Kx + L$$

ist, halbirenden Durchmessers ist nach 10):

$$\left.\begin{array}{l} \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(x-f) \\ +\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}(y-g) \\ +n^2(A+BK)(Af+Bg+C) \end{array}\right\} = 0,$$

und da für die Ellipse und die Hyperbel dieser Durchmesser durch den Mittelpunkt $(FG)$ der Curve geht, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(F-f) \\ +\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}(G-g) \\ +n^2(A+BK)(Af+Bg+C) \end{array}\right\} = 0,$$

woraus man, wenn man diese Gleichung von der Obigen abzieht, für den in Rede stehenden Durchmesser die Gleichung

$$16) \quad \ldots \quad \left.\begin{array}{l} \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(x-F) \\ +\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}(y-G) \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$17) \quad \ldots \quad y - G = -\frac{n^2ABK + \{(n^2-1)A^2 - B^2\}}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K}(x-F)$$

erhält.

Die Gleichung einer Schaar dem durch die vorstehende Gleichung charakterisirten Durchmesser paralleler Sehnen ist für ein veränderliches $L_1$:

$$y = -\frac{n^2ABK + \{(n^2-1)A^2 - B^2\}}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K}x + L_1,$$

und entwickelt man nun nach der in der Gleichung 17) ausgesprochenen Regel die Gleichung des, diese Sehnen halbirenden Durchmessers, so erhält man, weil

$$\begin{array}{c} n^2AB\{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\} \\ -\{(n^2-1)A^2 - B^2\}\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\} \\ = \{n^4A^2B^2 - [(n^2-1)A^2 - B^2][(n^2-1)B^2 - A^2]\}K, \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n^2AB\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\} \\ -\{(n^2-1)B^2 - A^2\}\{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\} \\ = n^4A^2B^2 - [(n^2-1)A^2 - B^2][(n^2-1)B^2 - A^2] \end{array}$$

ist, die folgende Gleichung:

18) . . . . . . . $y-G=K(x-F)$.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

**Wenn ein Durchmesser der Ellipse oder Hyperbel eine Schaar paralleler Sehnen halbirt, so werden die diesem Durchmesser parallelen Sehnen von dem der ersteren Schaar paralleler Sehnen parallelen Durchmesser halbirt.**

## §. 22.

Wir wollen nun allgemein eine durch den Mittelpunkt $(FG)$ der Ellipse oder Hyperbel gehende Gerade, also einen beliebigen Durchmesser dieser Curven, betrachten, dessen Gleichung

19) . . . . . . . $y-G=J(x-F)$

sein mag. Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse oder Hyperbel durch $X$, $Y$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$Y-G=J(X-F),$$

$$n^2(AX+BY+C)^2=(A^2+B^2)\{(X-f)^2+(Y-g)^2\};$$

von denen man die zweite auch unter der folgenden Form darstellen kann, um sie leichter mit der ersten verbinden zu können:

$$n^2\{A(X-F)+B(Y-G)+AF+BG+C\}^2$$
$$=(A^2+B^2)\{[(X-F)-(f-F)]^2+[(Y-G)-(g-G)]^2\}.$$

Durch gehörige Entwickelung dieser letzteren Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned}0= &\{n^2A^2-(A^2+B^2)\}(X-F)^2\\ &+\{n^2B^2-(A^2+B^2)\}(Y-G)^2\\ &+2n^2AB(X-F)(Y-G)\\ &+2\{n^2A(AF+BG+C)+(A^2+B^2)(f-F)\}(X-F)\\ &+2\{n^2B(AF+BG+C)+(A^2+B^2)(g-G)\}(Y-G)\\ &+n^2(AF+BG+C)^2-(A^2+B^2)\{(f-F)^2+(g-G)^2\}.\end{aligned}$$

Nun ist aber nach IV. 3), wie man leicht findet:

$$AF+BG+C=-\frac{Af+Bg+C}{n^2-1},$$

$$(f-F)^2+(g-G)^2=\frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)}$$

$$n^2A(AF+BG+C)+(A^2+B^2)(f-F)=0,$$

$$n^2B(AF+BG+C)+(A^2+B^2)(g-G)=0,$$

$$n^2(AF+BG+C)^2-(A^2+B^2)\{(f-F)^2+(g-G)^2\}=-\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1};$$

wodurch die obige Gleichung die folgende einfache Form erhält:

$$\left.\begin{array}{l}\{n^2A^2-(A^2+B^2)\}(X-F)^2+\{n^2B^2-(A^2+B^2)\}(Y-G)^2\\ +2n^2AB(X-F)(Y-G)-\dfrac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1}\end{array}\right\}=0$$

oder

$$n^2\{A(X-F)+B(Y-G)\}^2-(A^2+B^2)\{(X-F)^2+(Y-G)^2\}$$
$$=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1};$$

und wegen der Gleichung

$$Y-G=J(X-F)$$

hat man also zur Bestimmung von $X-F$ die Gleichung:

$$\{n^2(A+BJ)^2-(A^2+B^2)(1+J^2)\}(X-F)^2=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1},$$

woraus man, in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander erhält:

$$20)\quad\left\{\begin{array}{l}X-F=\pm\dfrac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)\{n^2(A+BJ)^2-(A^2+B^2)(1+J^2)\}}},\\ Y-G=\pm\dfrac{nJ(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)\{n^2(A+BJ)^2-(A^2+B^2)(1+J^2)\}}};\end{array}\right.$$

oder, wie man leicht findet:

$$21)\left\{\begin{aligned}X-F&=\pm\frac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)\{(n^2-1)(A+BJ)^2-(B-AJ)^2\}}},\\Y-G&=\pm\frac{nJ(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)\{(n^2-1)(A+BJ)^2-(B-AJ)^2\}}};\end{aligned}\right.$$

oder auch:

$$22)\left\{\begin{aligned}X-F&=\pm\frac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(1-n^2)\{(1-n^2)(A+BJ)^2+(B-AJ)^2\}}},\\Y-G&=\pm\frac{nJ(Af+Bg+C)}{\sqrt{(1-n^2)\{(1-n^2)(A+BJ)^2+(B-AJ)^2\}}};\end{aligned}\right.$$

wo die zweite Form für die Ellipse, die erste Form für die Hyperbel die meiste Bequemlichkeit darbietet.

Im Falle der Ellipse, wenn nämlich $n<1$ ist, liefern die Formeln 22) für $X$, $Y$ immer zwei reelle Werthe, woraus sich ergiebt, dass die Ellipse von jedem ihrer Durchmesser in zwei Punkten geschnitten wird, welche offenbar von dem Mittelpunkte der Ellipse gleich weit entfernt sind. Denn bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom Mittelpunkte im Allgemeinen durch $R$, so erhalten wir aus 22) für die oberen und für die unteren Zeichen in gleicher Weise:

$$23)\ldots\quad R^2=\frac{n^2(1+J^2)(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)\{(1-n^2)(A+BJ)^2+(B-AJ)^2\}}.$$

Im Falle der Hyperbel, wenn nämlich $n>1$ ist, liefern die Formeln 21) für $X$, $Y$ nur so lange reelle Werthe, als

$$(n^2-1)(A+BJ)^2-(B-AJ)^2 \overset{=}{>} 0,$$

d. h. so lange als

$$(n^2-1)(A+BJ)^2 \overset{=}{>} (B-AJ)^2,$$

oder so lange als

$$\left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 \overset{=}{>} \frac{1}{n^2-1}$$

ist. Wenn dagegen

$$\left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 < \frac{1}{n^2-1}$$

ist, werden $X$, $Y$ imaginär.

Wenn also

$$\left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 < \frac{1}{n^2-1}$$

ist, so schneidet der durch die Gleichung 19) charakterisirte Durchmesser die Hyperbel gar nicht. Wenn dagegen

$$\left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 > \frac{1}{n^2-1}$$

ist, so giebt es nach dem Obigen für $X$, $Y$ zwei endliche völlig bestimmte reelle Werthe, und der durch die Gleichung 19) charakterisirte Durchmesser schneidet also die Hyperbel in zwei Punkten, die offenbar von dem Mittelpunkte der Hyperbel gleich weit entfernt sind, weil man, wenn man die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom Mittelpunkte wieder im Allgemeinen durch $R$ bezeichnet, aus 21), man mag die oberen oder die unteren Zeichen nehmen,

$$24)\qquad R^2 = \frac{n^2(1+J^2)(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)\{(n^2-1)(A+BJ)^2-(B-AJ)^2\}}$$

erhält.

Gewissermassen in der Mitte zwischen den beiden vorhergehenden Fällen, auf der Gränze zwischen dem Schneiden und Nichtschneiden, liegt der Fall, wenn

$$\left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 = \frac{1}{n^2-1}$$

ist, wo $X$, $Y$ unendlich werden, welchen Fall, der offenbar bei der Ellipse gar nicht vorkommen kann, wir daher jetzt besonders betrachten müssen.

§. 23.

Wenn wir aus der Gleichung

$$25)\ \ldots\ldots \left(\frac{A+BJ}{B-AJ}\right)^2 = \frac{1}{n^2-1}$$

oder

$$26)\ \ldots\ B-AJ = \pm(A+BJ)\sqrt{n^2-1}$$

die Grösse $J$ bestimmen, so erhalten wir:

$$27)\ \ldots\ldots J = \frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}},$$

und die Gleichungen zweier durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehenden Geraden, welche gewissermassen auf der Gränze zwischen den die Curve schneidenden und nicht schneidenden Durchmessern liegen, sind also:

$$28) \quad . \quad . \quad . \quad y-G=\frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}}(x-F).$$

Aus einem Grunde, der weiter unten näher erläutert werden wird, nennt man die beiden durch diese Gleichungen charakterisirten, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden die Asymptoten der Hyperbel.

Nach IV. 1) ist

$$B(x-f)-A(y-g)=0$$

oder

$$B(x-F)-A(y-G)+B(F-f)-A(G-g)=0,$$

und folglich, weil nach IV. 3)

$$B(F-f)-A(G-g)=0$$

ist,

$$B(x-F)-A(y-G)=0$$

die Gleichung der Axe der Hyperbel. Ist nun $(XY)$ ein beliebiger Punkt in den Asymptoten und $P$ das von demselben auf die Axe gefällte Perpendikel, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$P^2=\frac{\{B(X-F)-A(Y-G)\}^2}{A^2+B^2},$$

und nach 28):

$$Y-G=\frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}}(X-F).$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$B(X-F)-A(Y-G)=\pm\frac{(A^2+B^2)(X-F)\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}},$$

also nach dem Obigen:

$$P^2=\frac{(n^2-1)(A^2+B^2)(X-F)^2}{(A\pm B\sqrt{n^2-1})^2}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(XY)$ von dem Mittelpunkte $(FG)$ der Hyperbel durch $E$, so ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$E^2 = (X-F)^2 + (Y-G)^2 = \frac{n^2(A^2+B^2)(X-F)^2}{(A \pm B\sqrt{n^2-1})^2}.$$

Folglich ist

$$P^2 = \frac{n^2-1}{n^2}E^2,$$

also

$$29) \quad \ldots \quad P = E\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = E\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Hieraus sieht man, dass, so lange $E$ sich nicht ändert, auch $P$ ungeändert bleibt, so dass also die von allen gleich weit von dem Mittelpunkte der Hyperbel entfernten Punkte der beiden Asymptoten auf die Axe gefällten Perpendikel sämmtlich einander gleich sind, woraus sich ganz unzweideutig ergiebt, dass die Axe die den Scheiteln der Hyperbel zugekehrten, 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die beiden Asymptoten mit einander einschliessen, halbirt; und bezeichnen wir also den von der Axe mit den beiden Asymptoten eingeschlossenen spitzen Winkel durch $\omega$, so ist offenbar

$$\sin\omega = \frac{P}{E},$$

also nach 29):

$$30) \quad \ldots \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2},$$

woraus sich

$$31) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos\omega = \frac{1}{n},$$

und folglich:

$$32) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tang\omega = \sqrt{n^2-1}$$

ergiebt.

Der von den beiden Asymptoten eingeschlossene, 180° nicht übersteigende, den Scheiteln der Hyperbel zugekehrte Winkel ist $2\omega$, und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich leicht:

$$33)$$

$$\sin 2\omega = \frac{2\sqrt{n^2-1}}{n^2}, \quad \operatorname{tang} 2\omega = -\frac{2\sqrt{n^2-1}}{n^2-2}, \quad \cos 2\omega = -\frac{n^2-2}{n^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, also nach §. 2. für $n=\sqrt{2}$, wird

$$\sin 2\omega = 1, \quad \cos 2\omega = 0;$$

woraus sich ergiebt, dass die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel auf einander senkrecht stehen.

§. 24.

Wenn $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ein beliebiger Punkt ist, und wir durch diesen Punkt eine mit der einen Asymptote parallele Gerade legen, so ist nach 28) die Gleichung dieser Geraden:

$$y-\mathfrak{y} = \frac{B \mp A\sqrt{n^2-1}}{A \pm B\sqrt{n^2-1}}(x-\mathfrak{x});$$

und bezeichnen wir nun im Allgemeinen die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Hyperbel durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$(B \mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) = (A \pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}),$$

$$n^2(A\mathfrak{X}+B\mathfrak{Y}+C)^2 = (A^2+B^2)\{(\mathfrak{X}-f)^2+(\mathfrak{Y}-g)^2\}$$

oder:

$$(B \mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) = (A \pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}),$$

$$n^2\{A(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})+B(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})+A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\}^2$$
$$=(A^2+B^2)\{[(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})+(\mathfrak{x}-f)]^2+[(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{y}-g)]^2\}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen bringt man nach gehöriger Entwickelung leicht auf die folgende Form:

$$\begin{aligned}
0 = \; & \{n^2A^2-(A^2+B^2)\}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})^2 \\
& +\{n^2B^2-(A^2+B^2)\}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})^2 \\
& +2n^2AB(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) \\
& +2\{n^2A(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-f)\}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) \\
& +2\{n^2B(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-g)\}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) \\
& +n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2-(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\}.
\end{aligned}$$

Wegen der ersten der beiden obigen Gleichungen kann man aber, wenn $\mathfrak{G}$ einen gewissen Factor bezeichnet,

$$\mathfrak{X}-\mathfrak{x}=\mathfrak{G}(A\pm B\sqrt{n^2-1}),$$

$$\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}=\mathfrak{G}(B\mp A\sqrt{n^2-1})$$

setzen, und die Grösse

$$\{n^2A^2-(A^2+B^2)\}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})^2+\{n^2B^2-(A^2+B^2)\}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})^2 \\ +2n^2AB(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})$$

ist also das Product von $\mathfrak{G}^2$ in die Grösse

$$\{n^2A^2-(A^2+B^2)\}(A\pm B\sqrt{n^2-1})^2+\{n^2B^2-(A^2+B^2)\}(B\mp A\sqrt{n^2-1})^2 \\ +2n^2AB(A\pm B\sqrt{n^2-1})(B\mp A\sqrt{n^2-1}) \\ = n^2\{A(A\pm B\sqrt{n^2-1})+B(B\mp A\sqrt{n^2-1})\}^2 \\ -(A^2+B^2)\{(A\pm B\sqrt{n^2-1})^2+(B\mp A\sqrt{n^2-1})^2\},$$

welche sich sogleich auf die Form

$$n^2(A^2+B^2)^2-n^2(A^2+B^2)^2$$

bringen lässt, und folglich verschwindet. Daher verschwindet auch die Summe der drei ersten Glieder in unserer obigen Gleichung, und zur Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$(B\mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=(A\pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}),$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\{n^2A(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-f)\}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) \\ +2\{n^2B(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-g)\}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) \\ +n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2-(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\} \end{array}\right\}=0,$$

durch deren Auflösung man

34)

$$\mathfrak{X}-\mathfrak{x}=-\frac{A\pm B\sqrt{n^2-1}}{2(A^2+B^2)}$$

$$\times\frac{n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2-(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\}}{n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-\{(A\pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{x}-f)+(B\mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{y}-g)\}},$$

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{y}=-\frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{2(A^2+B^2)}$$

$$\times\frac{n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2-(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\}}{n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-\{(A\pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{x}-f)+(B\mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{y}-g)\}}$$

erhält.

**Hieraus sieht man, dass jede mit der einen der beiden Asymptoten parallel gezogene Gerade die Hyperbel nur in einem Punkte schneidet.**

§. 25.

Nach 28) sind die Gleichungen der beiden Asymptoten mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$y-G=\frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}}(x-F),$$

$$y-G=\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F).$$

Diese beiden Asymptoten wollen wir nun als die Axen der $x_1$ und $y_1$ eines neuen durch den Mittelpunkt der Hyperbel als Anfang gelegten Coordinatensystems der $x_1y_1$ annehmen, und wollen die von den positiven Theilen dieser Axen mit dem positiven Theile der Axe der $x$ eingeschlossenen Winkel, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der $x$ an durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch von 0 bis 360° zählen, respective durch $\xi$ und $\eta$ bezeichnen. Dann ist nach den Lehren der analytischen Geometrie, mögen diese Winkel nun zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegen:

$$\tan\xi=\frac{B\mp A\sqrt{n^2-1}}{A\pm B\sqrt{n^2-1}},$$

$$\tan\eta=\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}};$$

woraus man mittelst der Formeln:

$$\sin\xi^2=\frac{\tan\xi^2}{1+\tan\xi^2},\quad \sin\eta^2=\frac{\tan\eta^2}{1+\tan\eta^2}$$

leicht erhält:

$$\sin \xi^2 = \frac{(B \mp A\sqrt{n^2-1})^2}{n^2(A^2+B^2)},$$

$$\sin \eta^2 = \frac{(B \pm A\sqrt{n^2-1})^2}{n^2(A^2+B^2)}.$$

Weil man aber die positiven Theile der Axen der $x_1$ und $y_1$ beliebig annehmen kann, und die Winkel $\xi$ und $\eta$ zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegen können, so wird es offenbar immer verstattet sein,

$$\sin \xi = \frac{B \mp A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\sin \eta = \frac{B \pm A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}$$

zu setzen, woraus dann mittelst der obigen Formeln für die Tangenten ferner

$$\cos \xi = \frac{A \pm B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\cos \eta = \frac{A \mp B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}$$

folgt, so dass wir nach den bekannten allgemeinen Formeln für die Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen erhalten:

$$35)\quad \begin{cases} x = F + \dfrac{A \pm B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}x_1 + \dfrac{A \mp B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}y_1, \\[2ex] y = G + \dfrac{B \mp A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}x_1 + \dfrac{B \pm A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}y_1; \end{cases}$$

oder:

$$36)\quad \begin{cases} x - F = \dfrac{A \pm B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}x_1 + \dfrac{A \mp B\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}y_1, \\[2ex] y - G = \dfrac{B \mp A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}x_1 + \dfrac{B \pm A\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{A^2+B^2}}y_1; \end{cases}$$

woraus sich, wenn man diese Gleichungen nach $x_1$ und $y_1$ auflöst, ferner leicht ergiebt:

37)

$$x_1 = \pm \frac{n\{(B \pm A\sqrt{n^2-1})(x-F) - (A \mp B\sqrt{n^2-1})(y-G)\}}{2\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}},$$

$$y_1 = \mp \frac{n\{(B \mp A\sqrt{n^2-1})(x-F) - (A \pm B\sqrt{n^2-1})(y-G)\}}{2\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}};$$

oder:

38)

$$x_1 = \pm \frac{n\{[B(x-F)-A(y-G)] \pm [A(x-F)+B(y-G)]\sqrt{n^2-1}\}}{2\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}},$$

$$y_1 = \mp \frac{n\{[B(x-F)-A(y-G)] \mp [A(x-F)+B(y-G)]\sqrt{n^2-1}\}}{2\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Multiplication auf der Stelle:

39)

$$x_1y_1 = -\frac{n^2\{[B(x-F)-A(y-G)]^2-(n^2-1)[A(x-F)+B(y-G)]^2\}}{4(n^2-1)(A^2+B^2)}$$

oder

40)

$$x_1y_1 = -\frac{n^2\{(A^2+B^2)[(x-F)^2+(y-G)^2]-n^2[A(x-F)+B(y-G)]^2\}}{4(n^2-1)(A^2+B^2)}.$$

Nach IV. 3) ist nun:

$$x-F = x-f+\frac{n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$y-G = y-g+\frac{n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)};$$

also:

$$(A^2+B^2)\{(x-F)^2+(y-G)^2\}$$

$$=(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$

$$+\frac{2n^2(Af+By+C)(Ax+By+C)}{n^2-1}-\frac{n^2(n^2-2)(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2};$$

und

$$A(x-F)+B(y-G)=Ax+By+C+\frac{Af+Ag+C}{n^2-1},$$

also

$$n^2\{A(x-F)+B(y-G)\}^2$$
$$=n^2(Ax+By+C)^2$$
$$+\frac{2n^2(Af+Bg+C)(Ax+By+C)}{n^2-1}+\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2}.$$

Ist aber $(xy)$, und folglich auch $(x_1y_1)$, ein Punkt der Hyperbel, so ist nach II. 2)

$$(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}-n^2(Ax+By+C)^2=0,$$

also nach dem Obigen:

$$(A^2+B^2)[(x-F)^2+(y-G)^2]-n^2[A(x-F)+B(y-G)]^2$$
$$=-\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1},$$

und folglich:

$$41) \quad \ldots \quad x_1y_1=\frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)}.$$

Nach IV. 15), 17) ist also:

$$41^*) \quad \ldots \quad x_1y_1=\tfrac{1}{4}e^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Hiernach ist das Product $x_1y_1$ eine constante Grösse, und wenn also $x_1$, absolut genommen, in's Unendliche wächst, so nimmt $y_1$, absolut genommen, in's Unendliche ab, ohne jemals zu verschwinden, woraus erhellet, dass die Asymptoten sich der Hyperbel immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man sich in ihnen immer weiter und weiter von dem Mittelpunkte der Hyperbel entfernt, eine Eigenschaft dieser Geraden, die zu ihrer obigen Benennung Veranlassung gegeben hat.

## §. 26.

Zu der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen merkwürdigen Gleichung wollen wir noch auf eine andere Weise zu gelangen suchen, weil uns dies Gelegenheit zur Entwickelung noch einiger bemerkenswerthen allgemeinen Relationen geben wird.

Wir kehren deshalb wieder zu den beiden in §. 24. gefundenen Gleichungen

$$(B \mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) = (A \pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}),$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\{n^2A(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-f)\}(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) \\ +2\{n^2B(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-g)\}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) \\ +n^2(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)^2-(A^2+B^2)\{(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2\} \end{array}\right\} = 0$$

zurück, in denen bekanntlich $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ein beliebiger Punkt ist, und $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ den Durchschnittspunkt einer durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ parallel mit der durch die Gleichung

$$y-G = \frac{B \mp A\sqrt{n^2-1}}{A \pm B\sqrt{n^2-1}}(x-F)$$

charakterisirten Asymptote gelegten Geraden mit der Hyperbel bezeichnet.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen kann man auf einen anderen bemerkenswerthen Ausdruck bringen. Denn es ist

$$\begin{aligned} & n^2A(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-f) \\ = & \; n^2A\{A(\mathfrak{x}-F)+B(\mathfrak{y}-G)\}-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-F) \\ & + n^2A(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(F-f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & n^2B(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-g) \\ = & \; n^2B\{A(\mathfrak{x}-F)+B(\mathfrak{y}-G)\}-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-G) \\ & + n^2B(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(G-g); \end{aligned}$$

und nach IV. 3), 7) ist:

$$n^2A(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(F-f)=0,$$

$$n^2B(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(G-g)=0;$$

also:

$$\begin{aligned} & n^2A(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-f) \\ = & \; n^2A\{A(\mathfrak{x}-F)+B(\mathfrak{y}-G)\}-(A^2+B^2)(\mathfrak{x}-F), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & n^2B(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-g) \\ = & \; n^2B\{A(\mathfrak{x}-F)+B(\mathfrak{y}-G)\}-(A^2+B^2)(\mathfrak{y}-G). \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$n^2(Ax+By+C)^2-(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$
$$=n^2\{A(x-F)+B(y-G)+AF+BG+C\}^2$$
$$-(A^2+B^2)\{[(x-F)+(F-f)]^2+[(y-G)+(G-g)]^2\}$$
$$=n^2\{A(x-F)+B(y-G)\}^2-(A^2+B^2)\{(x-F)^2+(y-G)^2\}$$
$$+2\{n^2A(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(F-f)\}(x-F)$$
$$+2\{n^2B(AF+BG+C)-(A^2+B^2)(G-g)\}(y-G)$$
$$+n^2(AF+BG+C)^2-(A^2+B^2)\{(F-f)^2+(G-g)^2\},$$

also nach dem vorher Bewiesenen, und weil, wie man aus IV. 3), 7) leicht findet,

$$n^2(AF+BG+C)^2-(A^2+B^2)\{(F-f)^2+(G-g)^2\}=-\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1}$$

ist:

$$n^2(Ax+By+C)^2-(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$
$$=n^2\{A(x-F)+B(y-G)\}^2-(A^2+B^2)\{(x-F)^2+(y-G)^2\}$$
$$-\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1}.$$

Folglich ist die zweite der beiden obigen Gleichungen, von denen wir ausgingen:

$$2\{n^2A[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(x-F)\}(\mathfrak{x}-x)$$
$$+2\{n^2B[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(y-G)(\mathfrak{y}-y)\}$$
$$+n^2\{A(x-F)+B(y-G)\}^2-(A^2+B^2)\{(x-F)^2+(y-G)^2\}$$
$$=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{n^2-1}.$$

Legt man nun den bis jetzt willkührlich angenommenen Punkt $(xy)$ in die durch die Gleichung

$$y-G=\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F)$$

charakterisirte Asymptote, so ist

$$y-G=\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F),$$

$$x-F=\frac{A\mp B\sqrt{n^2-1}}{B\pm A\sqrt{n^2-1}}(y-G);$$

also, wie man leicht findet:

$$A(x-F)+B(y-G)=\frac{A^2+B^2}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F),$$

$$A(x-F)+B(y-G)=\frac{A^2+B^2}{B\pm A\sqrt{n^2-1}}(y-G)$$

und

$$(x-F)^2+(y-G)^2=\frac{n^2(A^2+B^2)}{(A\mp B\sqrt{n^2-1})^2}(x-F)^2,$$

$$(x-F)^2+(y-G)^2=\frac{n^2(A^2+B^2)}{(B\pm A\sqrt{n^2-1})^2}(y-G)^2.$$

Folglich ist unter der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$n^2\{A(x-F)+B(y-G)\}^2-(A^2+B^2)\{(x-F)^2+(y-G)^2\}=0,$$

und daher unsere obige Gleichung:

$$\begin{aligned}&\{n^2A[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(x-F)\}(\mathfrak{x}-x)\\&+\{n^2B[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(y-G)\}(\mathfrak{y}-y)\\&=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{2(n^2-1)}.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}&n^2A[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(x-F)\\&=(A^2+B^2)\frac{(n^2-1)A\pm B\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F)\\&=\pm(A^2+B^2)\sqrt{n^2-1}\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(x-F),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n^2B[A(x-F)+B(y-G)]-(A^2+B^2)(y-G)\\&=(A^2+B^2)\frac{(n^2-1)B\mp A\sqrt{n^2-1}}{B\pm A\sqrt{n^2-1}}(y-G)\\&=\mp(A^2+B^2)\sqrt{n^2-1}\frac{A\mp B\sqrt{n^2-1}}{B\pm A\sqrt{n^2-1}}(y-G);\end{aligned}$$

folglich

$$\frac{B\pm A\sqrt{n^2-1}}{A\mp B\sqrt{n^2-1}}(\mathfrak{x}-F)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})-\frac{A\mp B\sqrt{n^2-1}}{B\pm A\sqrt{n^2-1}}(\mathfrak{y}-G)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})$$
$$=\pm\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{2(n^2-1)\sqrt{n^2-1}\,.\,(A^2+B^2)}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$(B\mp A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=(A\pm B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}),$$
$$(B\pm A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{x}-F)=(A\mp B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{y}-G);$$

also:

$$(B\mp A\sqrt{n^2-1})(B\pm A\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{x}-F)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})$$
$$=(A\pm B\sqrt{n^2-1})(A\mp B\sqrt{n^2-1})(\mathfrak{y}-G)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})$$

und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

42)

$$(\mathfrak{x}-F)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2(A\pm B\sqrt{n^2-1})(A\mp B\sqrt{n^2-1})}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2},$$

$$(\mathfrak{y}-G)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2(B\pm A\sqrt{n^2-1})(B\mp A\sqrt{n^2-1})}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2}$$

oder

43)

$$(\mathfrak{x}-F)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2\{A^2-(n^2-1)B^2\}}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2},$$

$$(\mathfrak{y}-G)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2\{B^2-(n^2-1)A^2\}}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2}.$$

Ferner ist:

44)

$$(\mathfrak{x}-F)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2(A\mp B\sqrt{n^2-1})(B\mp A\sqrt{n^2-1})}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2},$$

$$(\mathfrak{y}-G)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2(A\pm B\sqrt{n^2-1})(B\pm A\sqrt{n^2-1})}{4(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2}.$$

Alle diese Producte sind also constante Grössen.

Weil nun

$$(A \pm B\sqrt{n^2-1})^2 + (B \mp A\sqrt{n^2-1})^2 = n^2(A^2+B^2)$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen 42) und 44), wenn man dieselben quadrirt und addirt:

$$(\mathfrak{x}-F)^2\{(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})^2+(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})^2\} = \frac{n^6(Af+Bg+C)^2(A \mp B\sqrt{n^2-1})^2}{16(n^2-1)^4(A^2+B^2)^3},$$

$$(\mathfrak{y}-G)^2\{(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})^2+(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})^2\} = \frac{n^6(Af+Bg+C)^2(B \pm A\sqrt{n^2-1})^2}{16(n^2-1)^4(A^2+B^2)^3};$$

also, wenn man diese Gleichungen zu einander addirt:

45)

$$\{(\mathfrak{x}-F)^2+(\mathfrak{y}-G)^2\}\{(\mathfrak{X}-\mathfrak{x})^2+(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y})^2\} = \frac{n^8(Af+Bg+C)^2}{16(n^2-1)^4(A^2+B^2)^2},$$

eine Gleichung, welche offenbar mit der auf ganz anderem Wege gefundenen Gleichung 41), wenn man dieselbe auf das Quadrat erhebt, vollkommen übereinstimmt.

## VIII.

### Berührende Linien.

§. 27.

Ein beliebiger Punkt eines Kegelschnitts sei $(x_1y_1)$. Denkt man sich nun einen zweiten Punkt $(x_2y_2)$ des Kegelschnitts, und legt durch die beiden Punkte $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ eine Gerade, so ist deren Gleichung

$$y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1).$$

Weil aber $(x_1y_1)$ und $(x_2y_2)$ Punkte des Kegelschnitts sind, so ist nach VII. 2), wenn wir

$$u = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \quad v = \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)$$

setzen:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{n^2A(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(u-f)}{n^2B(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(v-g)},$$

und folglich

$$y-y_1=-\frac{n^2A(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(u-f)}{n^2B(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(v-g)}(x-x_1)$$

die Gleichung unserer Geraden.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$x_2-x_1=\Delta x_1,\quad y_2-y_1=\Delta y_1;$$

so ist

$$u=x_1+\tfrac{1}{2}\Delta x_1,\quad v=y_1+\tfrac{1}{2}\Delta y_1$$

und folglich

$$Au+Bv+C=A(x_1+\tfrac{1}{2}\Delta x_1)+B(y_1+\tfrac{1}{2}\Delta y_1)+C,$$

$$u-f=x_1-f+\tfrac{1}{2}\Delta x_1,$$

$$v-g=y_1-g+\tfrac{1}{2}\Delta y_1.$$

Lassen wir aber dem als bestimmt und unveränderlich gedachten Punkte $(x_1y_1)$ den Punkt $(x_2y_2)$ immer näher und näher rücken, so dass derselbe immer genauer und genauer mit dem Punkte $(x_1y_1)$ zusammenfällt, so werden $\Delta x_1$ und $\Delta y_1$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern, und die Grössen

$$Au+Bv+C,\quad u-f,\quad v-g$$

werden sich also nach dem Obigen immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade respective den Gränzen

$$Ax_1+By_1+C,\quad x_1-f,\quad y_1-g$$

nähern. Also wird sich die Gleichung

$$y-y_1=-\frac{n^2A(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(u-f)}{n^2B(Au+Bv+C)-(A^2+B^2)(v-g)}(x-x_1)$$

unter der gemachten Voraussetzung immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränzgleichung

1)

$$y-y_1=-\frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}(x-x_1)$$

nähern, durch welche also eine durch den Punkt $(x_1y_1)$ gehende, der Lage nach völlig bestimmte Gerade charakterisirt wird, welcher sich die durch den Punkt $(x_1y_1)$ des Kegelschnitts und irgend einen anderen Punkt desselben gezogenen Sekanten als einer völlig bestimmten Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man den letzteren Punkt in dem Kegelschnitte dem Punkte $(x_1y_1)$ immer näher und näher rücken lässt.

Die durch die Gleichung 1) charakterisirte, durch den Punkt $(x_1y_1)$ gehende, der Lage nach völlig bestimmte Gerade heisst die Berührende des Kegelschnitts in dem Punkte $(x_1y_1)$, und dieser Punkt selbst wird ihr Berührungspunkt mit dem Kegelschnitte genannt.

Die in dem Punkte $(x_1y_1)$ auf der diesem Punkte als Berührungspunkt entsprechenden Berührenden des Kegelschnitts senkrecht stehende Gerade heisst die Normale des Kegelschnitts in dem Punkte $(x_1y_1)$, und wird nach 1) und den allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie durch die Gleichung

2)

$$y-y_1=\frac{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}(x-x_1)$$

charakterisirt.

Die Gleichung 1) der Berührenden kann auch auf die folgende Form gebracht werden:

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(x-x_1)+B(y-y_1)\}$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-x_1)+(y_1-g)(y-y_1)\},$$

oder, wie sogleich erhellet, auf die Form:

$$n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax+By+C)-n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}$$
$$-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}.$$

Weil nun aber $(x_1y_1)$ ein Punkt des Kegelschnitts ist, so ist nach II. 2)

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2=(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\};$$

folglich nach dem Obigen die Gleichung der Berührenden:

$$3) \quad \ldots \quad n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax+By+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\},$$

welche Gleichung bei vielen Untersuchungen grosse Bequemlichkeit darbietet.

Wollte man die Gleichung der Berührenden des Kreises haben, so müsste man in Folge der in §. 6. gemachten Bemerkung die Gleichung 1) auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$y-y_1=-\frac{\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\cdot\frac{A}{C}\left(\frac{A}{C}x_1+\frac{B}{C}y_1+1\right)-(x_1-f)}{\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\cdot\frac{B}{C}\left(\frac{A}{C}x_1+\frac{B}{C}y_1+1\right)-(y_1-g)}(x-x_1),$$

woraus sich dann nach den in dem angeführten Paragraphen gegebenen Regeln als Gleichung der den Kreis in dem Punkte $(x_1y_1)$ Berührenden die Gleichung

$$y-y_1=-\frac{x_1-f}{y_1-g}(x-x_1)$$

oder

$$(x_1-f)(x-x_1)+(y_1-g)(y-y_1)=0$$

ergiebt. Wollte man die Gleichung 3) benutzen, so müsste man dieselbe auf die Form

$$\left(\frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\left(\frac{A}{C}x_1+\frac{B}{C}y_1+1\right)\left(\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1\right)$$
$$=(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)$$

bringen, woraus sich dann nach denselben Regeln wie vorher für die Berührende die Gleichung

$$(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)=r^2$$

ergiebt, deren völlige Uebereinstimmung mit der obigen Gleichung leicht ersichtlich ist, wenn man sie auf die Form

$$(x_1-f)\{(x-x_1)+(x_1-f)\}+(y_1-g)\{(y-y_1)+(y_1-g)\}=r^2$$

bringt, und bedenkt, dass nach §. 6.

$$(x_1-f)^2+(y_1-g)^2=r^2$$

gesetzt werden muss.

§. 28.

Die vorhergehende Gleichung 3) kann man auch auf folgende Art darstellen:

$$n^2(Ax+By+C)^2 = \frac{(A^2+B^2)^2\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}^2}{n^2(Ax_1+By_1+C)^2},$$

also, weil

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2 = (A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}$$

ist, auf folgende Art:

$$n^2(Ax+By+C)^2 = \frac{(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}^2}{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2},$$

woraus sich

$$n^2(Ax+By+C)^2-(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$

$$=(A^2+B^2)\frac{\left\{\begin{array}{l}\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}^2\\-\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}\{(x-f)^2+(y-g)^2\}\end{array}\right\}}{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2},$$

also *)

$$n^2(Ax+By+C)^2-(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$

$$=-(A^2+B^2)\frac{\{(x_1-f)(y-g)-(y_1-g)(x-f)\}^2}{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2}$$

ergiebt. Hieraus sieht man, dass für jeden von dem Berührungspunkte $(x_1y_1)$ verschiedenen Punkt $(xy)$ der Berührenden

$$(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\} > n^2(Ax+By+C)^2$$

ist, und dass folglich nach dem in §. 8. bewiesenen Satze alle Punkte der Berührenden mit Ausnahme des Berührungspunkts, also die ganze Berührende, ausserhalb des Kegelschnitts liegen, woraus denn auch ganz von selbst folgt, dass die Berührende ausser dem Berührungspunkte keinen zweiten Punkt mit dem Kegelschnitte gemein haben kann.

*) Es ist allgemein

$$(aa_1+bb_1)^2-(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2) = -(ab_1-ba_1)^2.$$

§. 29.

Wir wollen die Entfernung des Berührungspunkts $(x_1 y_1)$ von dem Durchschnittspunkte der Berührenden mit der Axe des Kegelschnitts, dessen Coordinaten $u_1$, $v_1$ sein mögen, durch $T$; die Entfernung des Berührungspunkts $(x_1 y_1)$ von dem Durchschnittspunkte der Normale mit der Axe des Kegelschnitts, dessen Coordinaten $u_2$, $v_2$ sein mögen, durch $N$; die Entfernungen des Fusspunkts des von dem Berührungspunkte $(x_1 y_1)$ auf die Axe des Kegelschnitts gefällten Perpendikels, dessen Coordinaten $u_3$, $v_3$ sein mögen, von den Durchschnittspunkten der Berührenden und der Normale mit der Axe respective durch $S$ und $\Sigma$ bezeichnen, wobei wir bemerken, dass die Entfernungen $S$ und $\Sigma$ Subtangente und Subnormale genannt zu werden pflegen, und wollen nun die Entfernungen $T$, $N$, $S$, $\Sigma$ zu bestimmen suchen.

Nach IV. 1) ist

$$B(x-f)-A(y-g)=0$$

die Gleichung der Axe des Kegelschnitts, und folglich offenbar

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

die Gleichung des von dem Berührungspunkte $(x_1 y_1)$ auf die Axe gefällten Perpendikels. Hiernach und nach 1) und 2) haben wir zur Bestimmung von $u_1$, $v_1$ die Gleichungen:

$$B(u_1-f)-A(v_1-g)=0,$$

$$v_1-y_1=-\frac{n^2 A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}{n^2 B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}(u_1-x_1);$$

zur Bestimmung von $u_2$, $v_2$ die Gleichungen:

$$B(u_2-f)-A(v_2-g)=0,$$

$$v_2-y_1=\frac{n^2 B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}{n^2 A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}(u_2-x_1);$$

und zur Bestimmung von $u_3$, $v_3$ die Gleichungen:

$$B(u_3-f)-A(v_3-g)=0, \quad A(u_3-x_1)+B(v_3-y_1)=0.$$

Aus der zweiten der beiden zwischen $u_1$, $v_1$ geltenden Gleichungen erhält man, wenn man

$$u_1-x_1=(u_1-f)-(x_1-f), \quad v_1-y_1=(v_1-g)-(y_1-g)$$

setzt, die folgende Gleichung:

$$\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}(u_1-f)$$
$$+\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}(v_1-g)$$
$$=\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}(x_1-f)$$
$$+\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}(y_1-g),$$

woraus sich, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=0,$$

leicht die Gleichung

$$\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}(u_1-f)$$
$$+\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}(v_1-g)$$
$$=-n^2(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)$$

ergiebt, welche, in Verbindung mit der ersten der beiden zwischen $u_1$, $v_1$ Statt findenden Gleichungen leicht zu den folgenden Ausdrücken führt:

4)

$$u_1-f=-\frac{n^2A(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{(A^2+B^2)\{(Af+Bg+C)+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}},$$

$$v_1-g=-\frac{n^2B(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{(A^2+B^2)\{(Af+Bg+C)+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}}.$$

Aus der zweiten der beiden zwischen $u_2$, $v_2$ geltenden Gleichungen erhält man, wenn man

$$u_2-x_1=(u_2-f)-(x_1-f),\quad v_2-y_1=(v_2-g)-(y_1-g)$$

setzt, die folgende Gleichung:

$$\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}(u_2-f)$$
$$-\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}(v_2-g)$$
$$=\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}(x_1-f)$$
$$-\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}(y_1-g)$$
$$=n^2(Ax_1+By_1+C)\{B(x_1-f)-A(y_1-g)\};$$

und verbindet man nun diese Gleichung mit der ersten der beiden zwischen $u_2$, $v_2$ Statt findenden Gleichungen, so erhält man, weil

$B(x_1-f)-A(y_1-g)$ sich auf beiden Seiten durch Division aufhebt, leicht die folgenden Ausdrücke:

$$5) \quad \ldots \quad \begin{cases} u_2-f=\dfrac{n^2A(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}, \\ v_2-g=\dfrac{n^2B(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Die beiden zwischen $u_3$, $v_3$ Statt findenden Gleichungen kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$B(u_3-f)-A(v_3-g)=0,$$

$$A(u_3-f)+B(v_3-g)=A(x_1-f)+B(y_1-g);$$

und erhält nun sehr leicht:

$$u_3-f=\frac{A\{A(x_1-f)+B(y_1-g)\}}{A^2+B^2},$$

$$v_3-g=\frac{B\{A(x_1-f)+B(y_1-g)\}}{A^2+B^2};$$

oder:

$$6) \quad \begin{cases} u_3-f=\dfrac{A\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\}}{A^2+B^2}, \\ v_3-g=\dfrac{B\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\}}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Weil nun

$$N^2=(x_1-u_2)^2+(y_1-v_2)^2$$

ist, so ist nach 5):

$$N^2=\left\{x_1-f-\frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}\right\}^2$$

$$+\left\{y_1-g-\frac{n^2B(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}\right\}^2,$$

woraus man, wenn man

$$A(x_1-f)+B(y_1-g)=(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C),$$

$$(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$

setzt, leicht erhält:

7)

$$N^2 = \frac{2n^2(Ax_1+By_1+C)\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\}}{A^2+B^2},$$

Ferner ist

$$\Sigma^2 = (u_2-u_3)^2 + (v_2-v_3)^2,$$

also nach 5) und 6):

$$8) \quad . \; . \quad \Sigma^2 = \frac{\{Af+Bg+C+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}^2}{A^2+B^2}.$$

Für die Parabel ist $n=1$, also:

$$9) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \Sigma^2 = \frac{(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2},$$

und daher für diesen Kegelschnitt die Subnormale eine constante Grösse. Weil nach VI. 2), wenn $p$ den Parameter der Parabel bezeichnet,

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 = \frac{(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}$$

ist, so ist

$$10) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \Sigma = \tfrac{1}{2}p,$$

also bei der Parabel die Subnormale immer dem halben Parameter gleich.

Bezeichnet $P$ das von dem Berührungspunkte $(x_1y_1)$ auf die Axe des Kegelschnitts, deren Gleichung nach dem Obigen

$$B(x-f)-A(y-g)=0$$

ist, gefällte Perpendikel, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$11) \quad . \; . \; . \quad P^2 = \frac{\{B(x_1-f)-A(y_1-g)\}^2}{A^2+B^2}.$$

Nun ist aber aus einfachen geometrischen Gründen offenbar:

$$S\Sigma = P^2, \quad \text{also} \quad S^2 = \frac{P^4}{\Sigma^2},$$

und folglich nach 10) und 11):

12) $$S^2=\frac{\{B(x_1-f)-A(y_1-g)\}^4}{(A^2+B^2)\{Af+Bg+C+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}^2}.$$

Zur Bestimmung von $T$ hat man verschiedene Ausdrücke, von denen wir die folgenden hier anführen:

13) . . . . . . . . $$T=\frac{P}{\Sigma}N=\frac{S}{P}N$$

und

14) . . $$T^2=\frac{S}{\Sigma}N^2=S(S+\Sigma)=S^2+P^2,$$

die sich sämmtlich aus einer ganz einfachen Betrachtung ähnlicher Dreiecke ergeben; die Einführung der obigen Ausdrücke von $N$, $S$, $\Sigma$, $P$ in diese Formeln überlassen wir dem Leser.

Wenn wir die Entfernungen des Durchschnittspunkts $(u_1v_1)$ der Berührenden mit der Axe, des Durchschnittspunkts $(u_2v_2)$ der Normale mit der Axe, des Durchschnittspunkts des von dem Punkte $(x_1y_1)$ auf die Axe gefällten Perpendikels mit derselben von dem Brennpunkte $(fg)$ respective durch $E'$, $E''$, $E'''$ bezeichnen, so ist:

$$E'^2=(u_1-f)^2+(v_1-g)^2,$$

$$E''^2=(u_2-f)^2+(v_2-g)^2,$$

$$E'''^2=(u_3-f)^2+(v_3-g)^2;$$

also nach 4), 5), 6):

15)

$$E'^2=\frac{n^4(Af+Bg+C)^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)\{(Af+Bg+C)+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}^2},$$

$$E''^2=\frac{n^4(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

$$E'''^2=\frac{\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\}^2}{A^2+B^2}.$$

Für die Parabel ist $n=1$, also

$$E'^2=\frac{(Ax_1{}^2+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

folglich, wenn für jeden Kegelschnitt $V$ den von dem Brennpunkte $(fg)$ nach dem Punkte $(x_1y_1)$ gezogenen Vector bezeichnet, nach V. 2)

16) . . . . . . . . . $$E'=V,$$

woraus die bekannte einfache Construction der Berührenden der Parabel folgt.

Ferner ist nach V. 1) allgemein für jeden Kegelschnitt:

17) . . . . . . . . $E'' = nV$.

Bezeichnen für die Ellipse und Hyperbel $E_1''$ und $V_1$ die Entfernung des Durchschnittspunkts der Normale mit der Axe von dem Brennpunkte $(f_1 g_1)$ und den von diesem Brennpunkte nach dem Punkte $(x_1 y_1)$ gezogenen Vector; so ist natürlich ganz eben so:

18) . . . . . . . . $E_1'' = nV_1$.

Also ist für die Parabel

19) . . . . . . . . . $E'' = V$,

und für die Ellipse und Hyperbel ist

20) . . . . . . . $E'' : E_1'' = V : V_1$.

Hieraus ergeben sich durch ganz einfache geometrische Betrachtungen unmittelbar die bekannten Constructionen der Normale, und somit auch der Berührenden, für die Parabel, Ellipse und Hyperbel.

## §. 30.

Es liessen sich noch sehr viele bemerkenswerthe Betrachtungen über die Berührenden der Kegelschnitte nach der obigen Methode anstellen; wir wollen uns jedoch, um nicht zu weitläufig zu werden, mit einigen Untersuchungen über die von den Brennpunkten $(fg)$ und $(f_1 g_1)$ auf die Berührende gefällten Perpendikel $P$ und $P_1$ begnügen.

Nach 1) und den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie ist:

$$P^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}[n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)](x_1-f)\\ +[n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)](y_1-g)\end{array}\right\}^2}{\left\{\begin{array}{c}[n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)]^2\\ +[n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)]^2\end{array}\right\}},$$

$$P_1^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}[n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)](x_1-f_1)\\ +[n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)](y_1-g_1)\end{array}\right\}^2}{\left\{\begin{array}{c}[n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)]^2\\ +[n^2B(Ax_1+By+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)]^2\end{array}\right\}}.$$

Der Zähler von $P^2$ ist das Quadrat der Grösse

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(x_1-f)+B(y_1-g)\}-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}$$

oder

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\}$$
$$-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=0$$

ist, das Quadrat der Grösse

$$-n^2(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C).$$

Der Zähler von $P_1{}^2$ ist das Quadrat der Grösse

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(x_1-f_1)+B(y_1-g_1)\}$$
$$-(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x_1-f_1)+(y_1-g)(y_1-g_1)\}.$$

Nach IV. 2) ist aber:

$$x_1-f_1=x_1-f+\frac{2n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

$$y_1-g_1=y_1-g+\frac{2n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)};$$

also, wie man leicht findet:

$$A(x_1-f_1)+B(y_1-g_1)$$
$$=Ax_1+By+C+\frac{n^2+1}{n^2-1}(Af+Bg+C),$$

und, wenn man

$$(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$

setzt:

$$(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x_1-f_1)+(y_1-g)(y_1-g_1)\}$$
$$=n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$
$$+2n^2(Af+Bg+C)\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\}.$$

Folglich ist

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(x_1-f_1)+B(y_1-g_1)\}$$
$$-(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x_1-f_1)+(y_1-g)(y_1-g_1)\}$$
$$=n^2(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)+\frac{2n^2}{n^2-1}(Af+Bg+C)^2$$
$$=\frac{2n^2}{n^2-1}(Af+Bg+C)^2\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner von $P^2$ und $P_1^2$ ist:

$$n^4(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)^2+(A^2+B^2)^2\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}$$
$$-2n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\{(Ax_1+By_1+C)-(Af+Bg+C)\},$$

oder, weil

$$(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$

ist:

$$n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\{(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)+2(Af+Bg+C)\},$$

oder:

$$2n^2(A^2+B^2)(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}.$$

Also ist:

$$21)\quad P^2=\frac{n^2(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{2(A^2+B^2)\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}}$$

und

$$22)\quad P_1^2=\frac{2n^2}{(n^2-1)^2}\cdot\frac{(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{Af+Bg+C}{Ax_1+By_1+C}$$
$$\times\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$23)\quad P^2P_1^2=\frac{n^4}{(n^2-1)^2}\cdot\frac{(Af+Bg+C)^4}{(A^2+B^2)^2},$$

und folglich

$$24)\quad PP_1=\pm\frac{n^2}{1-n^2}\cdot\left\{\frac{Af+Bg+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2.$$

wenn man für die Ellipse und Hyperbel respective das obere und das untere Zeichen nimmt. Allgemein ist nach IV. 18), 19):

$$25) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad PP_1 = b^2,$$

das Product $PP_1$ also eine constante Grösse.

Für die Parabel ist nach 21):

$$26) \quad . \; . \; . \quad P^2 = \frac{(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{2(A^2+B^2)},$$

und nach V. 1)

$$V^2 = \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2};$$

also:

$$27) \quad \frac{P^2}{V^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Af+Bg+C}{Ax_1+By_1+C}, \quad \frac{P}{V} = \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{Af+Bg+C}{Ax_1+By_1+C}}.$$

Für die Ellipse und Hyperbel ist nach V. 1), 13):

$$V^2 = \frac{n^2(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

$$V_1^2 = \frac{4n^2}{(n^2-1)^2} \left\{ \frac{Af+Bg+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{n^2-1}{2} \cdot \frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C} \right\}^2;$$

also nach 21) und 22), wie man leicht findet:

$$28) \quad . \; . \; . \quad \begin{cases} P^4 = \dfrac{n^4(Af+Bg+C)^4}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2} \cdot \dfrac{V^2}{V_1^2}, \\[2ex] P_1^4 = \dfrac{n^4(Af+Bg+C)^4}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2} \cdot \dfrac{V_1^2}{V^2}; \end{cases}$$

und folglich:

$$29) \quad . \; . \; . \quad \begin{cases} P^2 = \pm \dfrac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)(A^2+B^2)} \cdot \dfrac{V}{V_1}, \\[2ex] P_1^2 = \pm \dfrac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)(A^2+B^2)} \cdot \dfrac{V_1}{V}; \end{cases}$$

wenn man die oberen Zeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel nimmt.

Nach VI. 2) ist, wenn $p$, wie gewöhnlich, den Parameter bezeichnet:

$$p^2=\frac{4n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2},$$

also mit denselben Bestimmungen wegen der Zeichen wie vorher:

$$30)\quad P^2=\pm\frac{p^2}{4(1-n^2)}\cdot\frac{V}{V_1},\quad P_1{}^2=\pm\frac{p^2}{4(1-n^2)}\cdot\frac{V_1}{V};$$

also für die Ellipse:

$$31)\quad P=\frac{p}{2\sqrt{1-n^2}}\cdot\sqrt{\frac{V}{V_1}},\quad P_1=\frac{p}{2\sqrt{1-n^2}}\cdot\sqrt{\frac{V_1}{V}};$$

und für die Hyperbel:

$$32)\quad P=\frac{p}{2\sqrt{n^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{V}{V_1}},\quad P_1=\frac{p}{2\sqrt{n^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{V_1}{V}}.$$

Ferner ist für die Ellipse:

$$33)\quad PP_1=\frac{p^2}{4(1-n^2)},\quad 1-n^2=\frac{p^2}{4PP_1},\quad n=\sqrt{1-\frac{p^2}{4PP_1}};$$

und für die Hyperbel:

$$34)\quad PP_1=\frac{p^2}{4(n^2-1)},\quad n^2-1=\frac{p^2}{4PP_1},\quad n=\sqrt{1+\frac{p^2}{4PP_1}}.$$

Für beide vorhergehende Curven ist:

$$35)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ P:P_1=V:V_1.$$

Für die Parabel ist nach 27) auch:

$$\frac{P^4}{V^4}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(Af+Bg+C)^2}{(Ax_1+By_1+C)^2},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$(Ax_1+By_1+C)^2=(A^2+B^2)V^2$$

ist:

$$36)\quad \ldots\ldots\ P^4=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}V^2.$$

Nun ist aber nach VI. 2)

$$p^2=\frac{4(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2},$$

also

$$P^4 = \tfrac{1}{16}p^2V^2,$$

und folglich:

$$P^2 = \tfrac{1}{4}pV.$$

## IX.

### Die Durchmesser als Axen der Coordinaten.

§. 31.

Die Gleichung einer beliebigen Geraden sei:

1) . . . . . . . . $y = Kx + L$;

und bezeichnen wir nun im Allgemeinen die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\mathfrak{y} = K\mathfrak{x} + L,$$

$$n^2(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C)^2 = (A^2 + B^2)\{(\mathfrak{x} - f)^2 + (\mathfrak{y} - g)^2\}.$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen $\mathfrak{y}$, so erhalten wir zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$ die Gleichung des zweiten Grades:

$$\mathfrak{x}^2 - 2\frac{(A^2+B^2)\{f-K(L-g)\}+n^2(A+BK)(BL+C)}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}\mathfrak{x}$$

$$= \frac{n^2(BL+C)^2-(A^2+B^2)\{f^2+(L-g)^2\}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}.$$

Nach einigen leichten Reductionen findet man, dass die Grösse

$$\{(A^2+B^2)[f-K(L-g)]+n^2(A+BK)(BL+C)\}^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}\\ \times\{n^2(BL+C)^2-(A^2+B^2)[f^2+(L-g)^2]\}\end{array}\right\}$$

sich auf den folgenden Ausdruck bringen lässt:

$$(A^2+B^2)\left\{\begin{array}{l}n^2\{[BL+C+f(A+BK)]^2+[K(BL+C)-(L-g)(A+BK)]^2\}\\ -(A^2+B^2)(Kf+L-g)^2\end{array}\right\};$$

und setzen wir nun der Kürze wegen

2) . . . $Kf+L-g=w,\quad L=w-Kf+g;$

so ist:

$$BL+C+f(A+BK)=Af+Bg+C+Bw,$$

$$K(BL+C)-(L-g)(A+BK)=K(Af+Bg+C)-Aw;$$

also die obige Grösse:

$$(A^2+B^2)\left\{\begin{matrix}n^2[(Af+Bg+C+Bw)^2+(K(Af+Bg+C)-Aw)^2]\\-(A^2+B^2)w^2\end{matrix}\right\}.$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen:

3)

$$M=(A^2+B^2)\{f-K(L-g)\}+n^2(A+BK)(BL+C),$$

$$N=(A^2+B^2)\left\{\begin{matrix}n^2[(Af+Bg+C+Bw)^2+(K(Af+Bg+C)-Aw)^2]\\-(A^2+B^2)w^2\end{matrix}\right\};$$

so ist:

4) . . . $$x=\frac{M\pm\sqrt{N}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$y=Kx+L,$$

und die Grösse

$$L\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}$$
$$+K\{(A^2+B^2)[f-K(L-g)]+n^2(A+BK)(BL+C)\}$$

bringt man leicht auf die Form

$$(A^2+B^2)\{L+K(f+Kg)\}-n^2(A+BK)(AL-KC);$$

also ist, wenn wir der Kürze wegen

5) $$M'=(A^2+B^2)\{L+K(f+Kg)\}-n^2(A+BK)(AL-KC)$$

setzen:

6) . . . $$y=\frac{M'\pm K\sqrt{N}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2},$$

wo in den Gleichungen 4) und 6) die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Bezeichnen wir die beiden Durchschnittspunkte unserer Geraden mit dem Kegelschnitte, insofern die Gerade den Kegelschnitt wirklich schneidet, durch $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$; so ist nach 4) und 6):

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)=\pm\frac{\sqrt{N}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2},$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)=\pm\frac{K\sqrt{N}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2};$$

und wenn nun $Y$ die Länge der halben Sehne zwischen den Punkten $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ bezeichnet, so ist offenbar

$$Y^2=\frac{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)^2+(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)^2}{4}=\left(\frac{\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2}{2}\right)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$7)\quad\ldots\quad Y^2=\frac{(1+K^2)N}{\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}.$$

§. 32.

Betrachten wir nun zuerst die Ellipse und Hyperbel, so ist nach VII. 17) die Gleichung des, alle der durch die Gleichung 1) charakterisirten Geraden parallelen Sehnen halbirenden Durchmessers:

$$y-G=-\frac{n^2ABK+\{(n^2-1)A^2-B^2\}}{n^2AB+\{(n^2-1)B^2-A^2\}K}(x-F);$$

und bezeichnen wir den Durchschnittspunkt dieses Durchmessers mit der durch die Gleichung 1) charakterisirten Geraden durch $(uv)$; so hat man zu der Bestimmung der Coordinaten $u$, $v$ dieses Punktes die Gleichungen

$$v=Ku+L,$$

$$v-G=-\frac{n^2ABK+\{(n^2-1)A^2-B^2\}}{n^2AB+\{(n^2-1)B^2-A^2\}K}(u-F);$$

von denen man die erste, um sie mit der zweiten leicht verbinden zu können, am besten unter der Form

$$v-G=K(u-F)+KF+L-G$$

darstellt. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Elimination:

8)

$$u-F=\frac{n^2AB+\{(n^2-1)B^2-A^2\}K}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}(KF+L-G),$$

$$v-G=-\frac{n^2ABK+\{(n^2-1)A^2-B^2\}}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}(KF+L-G);$$

oder:

9)

$$u-F=\frac{n^2B(A+BK)-(A^2+B^2)K}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}(KF+L-G),$$

$$v-G=-\frac{n^2A(A+BK)-(A^2+B^2)}{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2}(KF+L-G).$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(uv)$ von dem Mittelpunkte der Ellipse oder Hyperbel durch $X$, so ist

$$X^2=(u-F)^2+(v-G)^2,$$

folglich nach 9):

10)

$$X^2=\frac{(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}}{\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}(KF+L-G)^2.$$

Nun ist aber nach IV. 3) und oben 2)

$$KF+L-G=\frac{(n^2-1)(A^2+B^2)w-n^2(AK-B)(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)},$$

folglich:

11)

$$X^2=\frac{\left\{\begin{array}{c}\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}\\ \times\{(n^2-1)(A^2+B^2)w-n^2(AK-B)(Af+Bg+C)\}^2\end{array}\right\}}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2},$$

wobei man zu bemerken hat, dass nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}&(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}\\ &=\{n^2AB+[(n^2-1)B^2-A^2]K\}^2+\{n^2ABK+[(n^2-1)A^2-B^2]\}^2\\ &=\{n^2B(A+BK)-(A^2+B^2)K\}^2+\{n^2A(A+BK)-(A^2+B^2)\}^2,\end{aligned}$$

also

$$(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2$$

eine positive Grösse ist.

Nach 11) und 7) ist nun:

$$\frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$=\{(n^2-1)(A^2+B^2)w-n^2(AK-B)(Af+Bg+C)\}^2,$$

$$\frac{(n^2-1)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)}Y^2$$

$$=(n^2-1)\left\{\begin{array}{l} n^2[(Af+Bg+C+Bw)^2+(K(Af+Bg+C)-Aw)^2] \\ -(A^2+B^2)w^2 \end{array}\right\};$$

oder, weil

$$n^2[(Af+Bg+C+Bw)^2+(K(Af+Bg+C)-Aw)^2]-(A^2+B^2)w^2$$

$$=(n^2-1)(A^2+B^2)w^2-2n^2(AK-B)(Af+Bg+C)w$$

$$+n^2(1+K^2)(Af+Bg+C)^2$$

ist:

$$\frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$=(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2w^2-2n^2(n^2-1)(A^2+B^2)(AK-B)(Af+Bg+C)w$$

$$+n^4(AK-B)^2(Af+Bg+C)^2,$$

$$\frac{(n^2-1)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{1+K^2}Y^2$$

$$=(n^2-1)^2(A^2+B^2)^2w^2-2n^2(n^2-1)(A^2+B^2)(AK-B)(Af+Bg+C)w$$

$$+n^2(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)(Af+Bg+C)^2;$$

woraus sich durch Subtraction die Gleichung

$$\frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$-\frac{(n^2-1)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{1+K^2}Y^2$$

$$=n^2(Af+Bg+C)^2\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}$$

oder

$$\frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$-\frac{(n^2-1)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}^2}{1+K^2}Y^2$$

$$=n^2(Af+Bg+C)^2\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\},$$

also die Gleichung

$$12)\quad \frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$-\frac{(n^2-1)\{(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2\}}{1+K^2}Y^2$$

$$=n^2(Af+Bg+C)^2,$$

oder

13)

$$\frac{(n^2-1)^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$-\frac{(n^2-1)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{1+K^2}Y^2$$

$$=n^2(Af+Bg+C)^2,$$

oder

14)

$$\frac{(1-n^2)^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}X^2$$

$$+\frac{(1-n^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{1+K^2}Y^2$$

$$=n^2(Af+Bg+C)^2$$

ergiebt.

Für die Ellipse, wo $1-n^2$ eine positive Grösse ist, kann man

15)

$$\alpha^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}}{(1-n^2)\sqrt{(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}}\right\}^2,$$

$$\beta^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{(1-n^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}}\right\}^2$$

setzen, und nach 14) ist dann die Gleichung der Ellipse zwischen $X$, $Y$:

16) . . . . . . . $\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{Y}{\beta}\right)^2=1.$

Auf der Stelle erhellet aus dem Obigen, dass

17)

$$\beta=\alpha\sqrt{1-n^2}.\sqrt{\frac{(1+K^2)(A^2+B^2)}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}},$$

$$\alpha=\frac{\beta}{\sqrt{1-n^2}}\sqrt{1+\frac{n^2(n^2-2)(A+BK)^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)}}$$

ist.

Nach §. 22. wird die Hyperbel von dem den halbirten Sehnen parallelen Durchmesser nicht geschnitten oder geschnitten, jenachdem

$$(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2>0$$

oder

$$(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2<0,$$

also jenachdem

$$n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)>0$$

oder

$$n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)<0$$

ist. Wenn also der den halbirten Sehnen parallele Durchmesser die Hyperbel nicht schneidet, so setze man:

18)

$$\alpha^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}}{(n^2-1)\sqrt{(A^2+B^2)}\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}\right\}^2,$$

$$\beta^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{(n^2-1)}\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}\right\}^2;$$

und nach 13) ist die Gleichung der Hyperbel zwischen $X$, $Y$:

18) . . . . . . . $\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{Y}{\beta}\right)^2=1.$

Wenn aber der den halbirten Sehnen parallele Durchmesser die Hyperbel schneidet, so setze man:

20)

$$\alpha^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}}{(n^2-1)\sqrt{(A^2+B^2)\{(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(AK-B)^2\}}}\right\}^2,$$

$$\beta^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{(n^2-1)\{(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(AK-B)^2\}}}\right\}^2;$$

und nach 13) ist die Gleichung der Hyperbel zwischen $X$, $Y$:

$$21)\quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{Y}{\beta}\right)^2=-1.$$

Nimmt man also die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem der den halbirten Sehnen parallele Durchmesser die Hyperbel nicht schneidet oder schneidet, so ist:

22)

$$\alpha^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}}{(n^2-1)\sqrt{\pm(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}}\right\}^2,$$

$$\beta^2=\left\{\frac{n(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{\pm(n^2-1)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}}\right\}^2;$$

und die Gleichung der Hyperbel zwischen $X$, $Y$ ist:

$$23)\quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{Y}{\beta}\right)^2=\pm 1.$$

Allgemein ist für die Hyperbel:

24)

$$\beta=\alpha\sqrt{n^2-1}\cdot\sqrt{\frac{(1+K^2)(A^2+B^2)}{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2}},$$

$$\alpha=\frac{\beta}{\sqrt{n^2-1}}\cdot\sqrt{1+\frac{n^2(n^2-2)(A+BK)^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)}}.$$

Für die Ellipse ist nach 15)

$$\frac{(1-n^2)^2\alpha^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$

$$=(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2,$$

$$\frac{(1-n^2)^2\beta^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2);$$

also:

$$\frac{(1-n^2)^2(\alpha^2+\beta^2)(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-2)\{n^2(A+BK)^2-(1+K^2)(A^2+B^2)\}$$
$$=(2-n^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\},$$

folglich:

$$25) \quad . \quad . \quad . \quad \alpha^2+\beta^2=\frac{n^2(2-n^2)(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)},$$

so dass $\alpha^2+\beta^2$ von $K$ unabhängig, und insofern also eine constante Grösse ist.

Für die Hyperbel ist nach 22):

$$\pm\frac{(n^2-1)^2\alpha^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2,$$

$$\pm\frac{(n^2-1)^2\beta^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2);$$

also:

$$\pm\frac{(n^2-1)^2(\alpha^2-\beta^2)(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-2)\{n^2(A+BK)^2-(1+K^2)(A^2+B^2)\}$$
$$=(2-n^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}.$$

und folglich:

$$26) \quad . \quad . \quad \alpha^2-\beta^2=\pm\frac{n^2(2-n^2)(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)},$$

so dass also hier $\alpha^2-\beta^2$ von $K$ unabhängig ist.

Die Gleichung der Directrix ist bekanntlich

$$Ax+By+C=0,$$

und für die der Directrix parallelen Sehnen ist folglich

$$K = -\frac{A}{B}, \text{ also } A + BK = 0.$$

Weil nun

$$n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)=(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2$$

ist, so ist in diesem Falle für die Ellipse nach 15):

$$27) \quad \ldots \quad \begin{cases} \alpha^2 = \left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{(1-n^2)\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2, \\ \beta^2 = \left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(1-n^2)(A^2+B^2)}}\right\}^2; \end{cases}$$

also nach IV. 18):

$$\alpha = a, \quad \beta = b.$$

Für die Hyperbel ist auf ganz ähnliche Art nach 22):

$$28) \quad \ldots \quad \begin{cases} \alpha^2 = \left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{(n^2-1)\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2, \\ \beta^2 = \left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}}\right\}^2; \end{cases}$$

also nach IV. 19):

$$\alpha = a, \quad \beta = b.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist nach §. 2. bekanntlich

$$n = \sqrt{2}, \quad n^2 = 2, \quad n^2 - 1 = 1, \quad n^2 - 2 = 0;$$

also

$$\begin{aligned} & n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2) \\ & = 2(AK-B)^2-(1+K^2)(A^2+B^2) \\ & = (AK-B)^2-(A+BK)^2 \\ & = (B-AK)^2-(A+BK)^2, \end{aligned}$$

und folglich nach 22):

$$29) \quad \ldots \quad \begin{cases} \alpha^2 = \left\{\dfrac{\sqrt{2}.(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{\pm\{(B-AK)^2-(A+BK)^2\}}}\right\}^2, \\ \beta^2 = \left\{\dfrac{\sqrt{2}.(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{\pm\{(B-AK)^2-(A+BK)^2\}}}\right\}^2 \end{cases}$$

$$\frac{(1-n^2)^2\beta^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2);$$

also:

$$\frac{(1-n^2)^2(\alpha^2+\beta^2)(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-2)\{n^2(A+BK)^2-(1+K^2)(A^2+B^2)\}$$
$$=(2-n^2)\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\},$$

folglich:

$$25) \quad \ldots \quad \alpha^2+\beta^2=\frac{n^2(2-n^2)(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)},$$

so dass $\alpha^2+\beta^2$ von $K$ unabhängig, und insofern also eine constante Grösse ist.

Für die Hyperbel ist nach 22):

$$\pm\frac{(n^2-1)^2\alpha^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2,$$

$$\pm\frac{(n^2-1)^2\beta^2(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2);$$

also:

$$\pm\frac{(n^2-1)^2(\alpha^2-\beta^2)(A^2+B^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}}{n^2(Af+Bg+C)^2}$$
$$=(n^2-2)\{n^2(A+BK)^2-(1+K^2)(A^2+B^2)\}$$
$$=(2-n^2)\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\},$$

und folglich:

$$26) \quad \ldots \quad \alpha^2-\beta^2=\pm\frac{n^2(2-n^2)(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)},$$

so dass also hier $\alpha^2-\beta^2$ von $K$ unabhängig ist.

Die Gleichung der Directrix ist bekanntlich

$$Ax+By+C=0,$$

und für die der Directrix parallelen Sehnen ist folglich

$$K=-\frac{A}{B}, \text{ also } A+BK=0.$$

Weil nun

$$n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)=(1+K^2)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)^2$$

ist, so ist in diesem Falle für die Ellipse nach 15):

27) . . . . $$\begin{cases} \alpha^2=\left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{(1-n^2)\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2, \\ \beta^2=\left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(1-n^2)(A^2+B^2)}}\right\}^2; \end{cases}$$

also nach IV. 18):

$$\alpha=a,\quad \beta=b.$$

Für die Hyperbel ist auf ganz ähnliche Art nach 22):

28) . . . . $$\begin{cases} \alpha^2=\left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{(n^2-1)\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2, \\ \beta^2=\left\{\dfrac{n(Af+Bg+C)}{\sqrt{(n^2-1)(A^2+B^2)}}\right\}^2; \end{cases}$$

also nach IV. 19):

$$\alpha=a,\quad \beta=b.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist nach §. 2. bekanntlich

$$n=\sqrt{2},\quad n^2=2,\quad n^2-1=1,\quad n^2-2=0;$$

also

$$\begin{aligned} &n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2) \\ &=2(AK-B)^2-(1+K^2)(A^2+B^2) \\ &=(AK-B)^2-(A+BK)^2 \\ &=(B-AK)^2-(A+BK)^2, \end{aligned}$$

und folglich nach 22):

29) . . $$\begin{cases} \alpha^2=\left\{\dfrac{\sqrt{2}.(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{\pm\{(B-AK)^2-(A+BK)^2\}}}\right\}^2, \\ \beta^2=\left\{\dfrac{\sqrt{2}.(Af+Bg+C)\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{\pm\{(B-AK)^2-(A+BK)^2\}}}\right\}^2 \end{cases}$$

oder:

$$30) \quad \ldots \quad \begin{cases} \alpha^2 = \pm \dfrac{2(1+K^2)(Af+Bg+C)^2}{(B-AK)^2-(A+BK)^2}, \\ \beta^2 = \pm \dfrac{2(1+K)^2(Af+Bg+C)^2}{(B-AK)^2-(A+BK)^2}; \end{cases}$$

also immer $\alpha = \beta$.

## §. 33.

Die Winkel, welche die durch die Gleichung

$$y = Kx + L$$

für ein constantes $K$ und ein veränderliches $L$ charakterisirten Sehnen mit dem sie halbirenden Durchmesser, dessen Gleichung bekanntlich

$$y - G = -\frac{n^2ABK + \{(n^2-1)A^2 - B^2\}}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K}(x - F)$$

ist, einschliessen, wollen wir im Allgemeinen durch $\omega$ bezeichnen. Natürlich hat $\omega$ zwei Werthe zwischen 0 und 90° und zwischen 90° und 180°; damit nun die folgenden Formeln vollständig richtig bleiben, hat man in denselben für $\omega$ immer den zwischen 0 und 90° oder den zwischen 90° und 180° liegenden Werth dieses Winkels zu setzen, jenachdem die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist, eine Bemerkung, die man auch in allen ähnlichen, späterhin noch vorkommenden Fällen zu beachten hat, ohne dass dies fernerhin noch besonders bemerkt werden wird.

Dies vorausgesetzt, liefern die bekannten allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie uns den folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{n^2ABK + \{(n^2-1)A^2 - B^2\} + \{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}K}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K - \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}K},$$

also:

$$31) \quad . \quad . \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{n^2(A+BK)^2 - (1+K^2)(A^2+B^2)}{n^2(A+BK)(B-AK)}$$

oder

$$32) \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2) - n^2(B-AK)^2}{n^2(A+BK)(B-AK)}.$$

Die Summe der Quadrate des Zählers und Nenners von $\tang\omega$ ist, wie man am leichtesten mittelst der Formel 31) findet:

$$(1+K^2)(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\};$$

also ist wegen der Formeln

$$\sin\omega^2=\frac{\tang\omega^2}{1+\tang\omega^2},\quad \cos\omega^2=\frac{1}{1+\tang\omega^2}$$

offenbar:

33)

$$\sin\omega^2=\frac{\{n^2(AK-B)^2-(n^2-1)(1+K^2)(A^2+B^2)\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}},$$

$$\cos\omega^2=\frac{n^4(A+BK)^2(B-AK)^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}}$$

oder

34)

$$\sin\omega^2=\frac{\{n^2(AK-B)^2+(1-n^2)(1+K^2)(A^2+B^2)\}^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}},$$

$$\cos\omega^2=\frac{n^4(A+BK)^2(B-AK)^2}{(1+K^2)(A^2+B^2)\{(1+K^2)(A^2+B^2)+n^2(n^2-2)(A+BK)^2\}}.$$

Nach 15) und 34) ist also für die Ellipse:

$$35)\quad \ldots\quad \alpha^2\beta^2\sin\omega^2=\frac{n^4(Af+Bg+C)^4}{(1-n^2)^3(A^2+B^2)^2},$$

und nach 22) und 33) ist für die Hyperbel:

$$36)\quad \ldots\quad \alpha^2\beta^2\sin\omega^2=\frac{n^4(Af+Bg+C)^4}{(n^2-1)^3(A^2+B^2)^2},$$

welche Ausdrücke von $K$ unabhängig und insofern also constant sind.

Ferner ist für die Ellipse:

$$37)\quad \ldots\quad \cos\omega=\frac{n^2\beta}{\alpha\sqrt{1-n^2}}\cdot\frac{(A+BK)(B-AK)}{(1+K^2)(A^2+B^2)},$$

und für die Hyperbel:

$$38)\quad \ldots\quad \cos\omega=\frac{n^2\beta}{\alpha\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{(A+BK)(B-AK)}{(1+K^2)(A^2+B^2)}.$$

§. 34.

So wie nach dem Vorhergehenden

$$y = Kx + L,\quad y - G = -\frac{n^2ABK + \{(n^2-1)A^2 - B^2\}}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K}(x - F)$$

die Gleichungen einer Schaar von einander parallelen Sehnen und des dieselben halbirenden Durchmessers sind, seien

$$y = K_1x + L_1,\quad y - G = -\frac{n^2ABK_1 + \{(n^2-1)A^2 - B^2\}}{n^2AB + \{(n^2-1)B^2 - A^2\}K_1}(x - F)$$

die Gleichungen einer anderen Schaar von einander parallelen Sehnen und des dieselben halbirenden Durchmessers. Der Winkel des ersten Systems paralleler Sehnen mit dem zweiten Durchmesser sei $\bar{\omega}$, und der Winkel des zweiten Systems paralleler Sehnen mit dem ersten Durchmesser werde durch $\bar{\omega}_1$ bezeichnet. Dann ist nach den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie:

$$\tang\bar{\omega}$$

$$= \frac{\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K_1\}K + \{n^2ABK_1 + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}}{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K_1 - \{n^2ABK_1 + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}K}.$$

Der Zähler ist, wie man leicht findet,

$$n^2(A + BK)(A + BK_1) - (1 + KK_1)(A^2 + B^2)$$

oder

$$(n^2-1)(1 + KK_1)(A^2 + B^2) - n^2(B - AK)(B - AK_1),$$

und der Nenner ist

$$(K - K_1)(A^2 + B^2) + n^2(B - AK)(A + BK_1);$$

also:

$$39)\quad \tang\bar{\omega} = \frac{n^2(A + BK)(A + BK_1) - (1 + KK_1)(A^2 + B^2)}{n^2(B - AK)(A + BK_1) + (K - K_1)(A^2 + B^2)}$$

oder

40)

$$\tang\bar{\omega} = \frac{(n^2-1)(1 + KK_1)(A^2 + B^2) - n^2(B - AK)(B - AK_1)}{(K - K_1)(A^2 + B^2) + n^2(B - AK)(A + BK_1)}.$$

Um $\tang\bar{\omega}_1$ zu erhalten, braucht man in diesen Formeln bloss $K$ und $K_1$ gegen einander zu vertauschen. Dies giebt:

$$41)\quad \tang\bar{\omega}_1=\frac{n^2(A+BK)(A+BK_1)-(1+KK_1)(A^2+B^2)}{n^2(A+BK)(B-AK_1)-(K-K_1)(A^2+B^2)}$$

oder

42)

$$\tang\bar{\omega}_1=-\frac{(n^2-1)(1+KK_1)(A^2+B^2)-n^2(B-AK)(B-AK_1)}{(K-K_1)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)(B-AK_1)}.$$

Also ist nach 40) und 42):

43)

$$\frac{\tang\bar{\omega}}{\tang\bar{\omega}_1}=-\frac{(K-K_1)(A^2+B^2)-n^2(A+BK)(B-AK_1)}{(K-K_1)(A^2+B^2)+n^2(B-AK)(A+BK_1)},$$

ein jedenfalls sehr merkwürdiger Ausdruck, den man auch auf die folgende Form bringen kann:

44)

$$\frac{\tang\bar{\omega}}{\tang\bar{\omega}_1}=\frac{(B-AK)(A+BK_1)+(n^2-1)(A+BK)(B-AK_1)}{(A+BK)(B-AK_1)+(n^2-1)(B-AK)(A+BK_1)}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, wo $n^2-1=1$ ist, ist also:

$$45)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{\tang\bar{\omega}}{\tang\bar{\omega}_1}=1,$$

natürlich nach der schon im vorhergehenden Paragraphen gemachten allgemeinen Bemerkung die Winkel $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}_1$ so genommen, dass der Bruch auf der linken Seite des Gleichheitszeichens positiv wird.

Sind die durch die Gleichung

$$y=K_1x+L_1$$

charakterisirten Sehnen der Directrix parallel, so ist

$$K_1=-\frac{A}{B},$$

also:

$$K-K_1=\frac{A+BK}{B},\quad B-AK_1=\frac{A^2+B^2}{B},\quad A+BK_1=0;$$

folglich nach 43), wie man leicht findet:

$$46)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{\tang\bar{\omega}}{\tang\bar{\omega}_1}=n^2-1.$$

Bezeichnen wir die von den beiden vorher betrachteten Durchmessern eingeschlossenen Winkel im Allgemeinen durch $\Omega$, so ist nach den Formeln der analytischen Geometrie, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{Z} = \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K_1\}$$
$$-\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}\{n^2ABK_1 + [(n^2-1)A^2 - B^2]\},$$

$$\mathfrak{N} = \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}\{n^2ABK_1 + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}$$
$$+\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}\{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K_1\}$$

gesetzt wird,

$$\tang \Omega = -\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}.$$

Leicht aber findet man, dass

$$\mathfrak{Z} = (n^2-1)(K-K_1)(A^2+B^2)^2,$$
$$\mathfrak{N} = (A^2+B^2)\{(1+KK_1)(A^2+B^2) + n^2(n^2-2)(A+BK)(A+BK_1)\};$$

folglich

47)
$$\tang\Omega = -\frac{(n^2-1)(K-K_1)(A^2+B^2)}{(1+KK_1)(A^2+B^2) + n^2(n^2-2)(A+BK)(A+BK_1)}$$

ist.

Für die gleichseitige Hyperbel ist $n^2-1=1$, $n^2-2=0$; also:

48) . . . . . $$\tang \Omega = -\frac{K-K_1}{1+KK_1},$$

so dass folglich in diesem Falle die Durchmesser immer dieselben Winkel einschliessen, wie die von ihnen halbirten Sehnen.

§. 35.

Wir wollen nun noch die Parabel betrachten.

Wenn wieder

$$y = Kx + L$$

die Gleichung einer Schaar paralleler Sehnen ist, so ist nach VII. 15*) die Gleichung des diese Sehnen halbirenden Durchmessers:

$$B(x-f)-A(y-g)-\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)=0.$$

Nach 7) ist in diesem Falle für $n=1$:

$$Y^2=\frac{(1+K^2)N}{\{(1+K^2)(A^2+B^2)-(A+BK)^2\}^2},$$

also, wie man leicht findet:

$$49)\quad\ldots\ldots\quad Y^2=\frac{(1+K^2)N}{(B-AK)^4}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts des Durchmessers mit der Sehne durch $u$, $v$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$v=Ku+L,$$

$$B(u-f)-A(v-g)-\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)=0$$

oder nach 2):

$$v-g=K(u-f)+w,$$

$$B(u-f)-A(v-g)-\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)=0;$$

aus denen man leicht:

$$50)\quad\begin{cases}u-f=\dfrac{(A+BK)(Af+Bg+C)+A(B-AK)w}{(B-AK)^2},\\[2ex] v-g=\dfrac{K(A+BK)(Af+Bg+C)+B(B-AK)w}{(B-AK)^2}\end{cases}$$

erhält.

Bezeichnen jetzt $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ die Coordinaten des Durchschnittspunkts des Durchmessers mit der Parabel, so müssen dieselben den folgenden Gleichungen genügen:

$$B(\mathfrak{F}-f)-A(\mathfrak{G}-g)-\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)=0,$$

$$(A\mathfrak{F}+B\mathfrak{G}+C)^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{F}-f)^2+(\mathfrak{G}-g)^2\}$$

oder:

$$B(\mathfrak{F}-f)-A(\mathfrak{G}-g)-\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)=0,$$

$$\{A(\mathfrak{F}-f)+B(\mathfrak{G}-g)+Af+Bg+C\}^2=(A^2+B^2)\{(\mathfrak{F}-f)^2+(\mathfrak{G}-g)^2\}.$$

Durch gehörige Entwickelung bringt man aber ferner die zweite Gleichung leicht auf die Form:

$$(Af+Bg+C)^2+2(Af+Bg+C)\{A(\mathfrak{F}-f)+B(\mathfrak{G}-g)\}$$
$$=\{B(\mathfrak{F}-f)-A(\mathfrak{G}-g)\}^2,$$

also, weil nach der ersten Gleichung

$$B(\mathfrak{F}-f)-A(\mathfrak{G}-g)=\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C)$$

ist, auf die Form:

$$A(\mathfrak{F}-f)+B(\mathfrak{G}-g)=\frac{(A+BK)^2-(B-AK)^2}{2(B-AK)^2}(Af+Bg+C),$$

so dass wir also jetzt zur Bestimmung von $\mathfrak{F}-f$ und $\mathfrak{G}-g$ die beiden folgenden Gleichungen des ersten Grades haben:

$$A(\mathfrak{F}-f)+B(\mathfrak{G}-g)=\frac{(A+BK)^2-(B-AK)^2}{2(B-AK)^2}(Af+Bg+C),$$

$$B(\mathfrak{F}-f)-A(\mathfrak{G}-g)=\frac{A+BK}{B-AK}(Af+Bg+C);$$

durch deren keiner Schwierigkeit unterliegende Auflösung sich

$$51)\quad\begin{cases}\mathfrak{F}-f=\dfrac{(A+BK)+K(B-AK)}{2(B-AK)^2}(Af+Bg+C),\\[2ex]\mathfrak{G}-g=-\dfrac{(B-AK)-K(A+BK)}{2(B-AK)^2}(Af+Bg+C)\end{cases}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(\mathfrak{F}\mathfrak{G})$ von dem Brennpunkte $(fg)$ durch $\frac{1}{4}\mathfrak{P}$, so ist

$$\tfrac{1}{16}\mathfrak{P}^2=(\mathfrak{F}-f)^2+(\mathfrak{G}-g)^2,$$

und folglich nach 51), wie man leicht findet:

$$52)\quad .\ .\ \mathfrak{P}^2=\frac{4(1+K^2)^2(A^2+B^2)(Af+Bg+C)^2}{(B-AK)^4}.$$

Nach 50) und 51) ist:

$$53)\quad\begin{cases}u-\mathfrak{F}=\dfrac{\{(A+BK)-K(B-AK)\}(Af+Bg+C)+2A(B-AK)w}{2(B-AK)^2},\\[2ex]v-\mathfrak{G}=\dfrac{\{(B-AK)+K(A+BK)\}(Af+Bg+C)+2B(B-AK)w}{2(B-AK)^2};\end{cases}$$

und bezeichnet nun $\mathfrak{K}$ die Entfernung des Punktes $(uv)$, in welchem der Durchmesser die Sehne schneidet, von dem Punkte $(\mathfrak{F}\mathfrak{G})$, so ist

$$X^2 = (x-\mathfrak{F})^2 + (y-\mathfrak{G})^2,$$

also nach 53), wie man leicht findet:

$$54) \quad X^2 = \frac{(A^2+B^2)\{(1+K^2)(Af+Bg+C)+2(B-AK)w\}^2}{4(B-AK)^4}.$$

Dem Ausdrucke von $N$ in 3) kann man auch die Form

$$N = (A^2+B^2)\left\{\begin{array}{r} n^2(1+K^2)(Af+Bg+C)^2+2n^2(B-AK)(Af+Bg+C)w \\ +(n^2-1)(A^2+B^2)w^2 \end{array}\right\}$$

geben, so dass also für $n=1$

$$N = (A^2+B^2)(Af+Bg+C)\{(1+K^2)(Af+Bg+C)+2(B-AK)w\},$$

folglich nach 49)

$$55) \quad Y^2 = \frac{(1+K^2)(A^2+B^2)(Af+Bg+C)\{(1+K^2)(Af+Bg+C)+2(B-AK)w\}}{(B-AK)^4}$$

ist.

Weil nun offenbar hiernach

$$Y^4 = \frac{4(1+K^2)^2(A^2+B^2)(Af+Bg+C)^2}{(B-AK)^4}$$
$$\times \frac{(A^2+B^2)\{(1+K^2)(Af+Bg+C)+2(B-AK)w\}^2}{4(B-AK)^4}$$

ist, so ist nach 52) und 54):

$$Y^4 = \mathfrak{p}^2 X^2,$$

also unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$, wie es offenbar verstattet ist, positiv angenommen wird:

$$56) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Y^2 = \mathfrak{p}X.$$

Sind die halbirten Sehnen der Directrix parallel, so ist

$$K = -\frac{A}{B}, \quad 1+K^2 = \frac{A^2+B^2}{B^2}, \quad B-AK = \frac{A^2+B^2}{B};$$

also nach 52)

$$\mathfrak{p}^2 = \left\{\frac{2(Af+Bg+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2,$$

und folglich nach VI. 2), wenn man dort $n=1$ setzt, $\mathfrak{p}=p$, also $\mathfrak{p}$ dem Parameter der Parabel gleich.

## §. 36.

Die Gleichung des Durchmessers, welcher die durch die Gleichung

$$y = Kx + L$$

charakterisirte Schaar paralleler Sehnen halbirt, ist nach §. 21. im Allgemeinen:

$$\left.\begin{array}{l} \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(x-f) \\ + \{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}(y-g) \\ + n^2(A+BK)(Af+Bg+C) \end{array}\right\} = 0,$$

und trifft nun dieser Durchmesser den Kegelschnitt in einem gewissen Punkte $(x_1y_1)$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \{n^2ABK + [(n^2-1)A^2 - B^2]\}(x_1-f) \\ + \{n^2AB + [(n^2-1)B^2 - A^2]K\}(y_1-g) \\ + n^2(A+BK)(Af+Bg+C) \end{array}\right\} = 0,$$

und folglich, wenn man aus dieser Gleichung $K$ bestimmt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$K = -\frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}.$$

Nach VIII. 1) ist aber die Gleichung der durch den Punkt $(x_1y_1)$ gelegten Berührenden des Kegelschnitts:

$$y - y_1 = -\frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}{n^2B(Ax_1+By_1+C)-A^2+B^2)(y_1-g)}(x-x_1),$$

woraus sich, wenn man dies mit dem Vorhergehenden vergleicht, ergiebt, dass die durch die Punkte, in welchen der Kegelschnitt von einem seiner Durchmesser geschnitten wird, gelegten Berührenden des Kegelschnitts jederzeit den von dem Durchmesser halbirten Sehnen parallel sind.

## X.

### Krümmungskreis.

#### §. 37.

Nach VIII. 2) ist die Gleichung der Normale des Kegelschnitts in dem Punkte $(x_1y_1)$ desselben:

$$1)\quad y - y_1 = \frac{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}(x-x_1),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\ldots \left\{\begin{array}{l} P = n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g), \\ Q = n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f) \end{array}\right.$$

und, indem wir den Bruch $\frac{P}{Q}$ als eine Function $f(x_1)$ von $x_1$ betrachten,

3) . . . . . . . . . . $f(x_1)=\frac{P}{Q}$

setzen:

4) . . . . . $y-y_1=f(x_1).(x-x_1)$.

Wir wollen nun $x_1$ die Veränderung $\varDelta x_1$ erleiden lassen, wodurch $x_1$ in $x_1+\varDelta x_1$ und $y_1$ in $y_1+\varDelta y_1$ übergeht, so dass die Coordinaten $x_1+\varDelta x_1$, $y_1+\varDelta y_1$ einen zweiten Punkt des Kegelschnitts bestimmen, durch den wir eine zweite Normale desselben legen wollen, deren Gleichung nach 4), da $f(x_1)$ in $f(x_1+\varDelta x_1)$ übergeht,

5) . . $y-(y_1+\varDelta y_1)=f(x_1+\varDelta x_1).\{x-(x_1+\varDelta x_1)\}$

sein wird.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 4) und 5) charakterisirten Normalen durch $x$, $y$ selbst, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y-y_1=f(x_1).(x-x_1),$$

$$y-y_1-\varDelta y_1=f(x_1+\varDelta x_1).(x-x_1-\varDelta x_1);$$

aus denen sich, wenn wir

$$\varDelta f(x_1)=f(x_1+\varDelta x_1)-f(x_1)$$

setzen, leicht

6)

$$x-x_1=\frac{f(x_1+\varDelta x_1)-\frac{\varDelta y_1}{\varDelta x_1}}{\frac{\varDelta f(x_1)}{\varDelta x_1}},\quad y-y_1=f(x_1).\frac{f(x_1+\varDelta x_1)-\frac{\varDelta y_1}{\varDelta x_1}}{\frac{\varDelta f(x_1)}{\varDelta x_1}}\ldots,$$

ergiebt.

Unter der Voraussetzung nun, dass $\varDelta x_1$ sich der Null nähert, also der Punkt $(x_1+\varDelta x_1,\ y_1+\varDelta y_1)$ dem Punkte $(x_1y_1)$ immer näher und näher rückt, lässt sich zeigen, dass der Durchschnittspunkt $(xy)$ der beiden den Punkten $(x_1y_1)$ und $(x_1+\varDelta x_1,\ y_1+\varDelta y_1)$ entsprechenden Normalen des Kegelschnitts sich einem ganz bestimmten Punkte, dessen bloss von den Coordinaten des bestimmten Punktes $(x_1y_1)$ in dem Kegelschnitte abhängende Coordinaten wir durch $X$, $Y$ bezeichnen wollen, gewissermassen als einer Gränze immer mehr und mehr und, wenn man nur $\varDelta x_1$ der Null nahe genug kommen lässt, bis zu jedem beliebigen Grade nähert,

so dass also nach 6), immer unter der Voraussetzung, dass $\Delta x_1$ sich der Null nähert, nach einer bekannten Bezeichnung

7)

$$X-x_1=\text{Lim}\frac{\text{f}(x_1+\Delta x_1)-\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}},\quad Y-y_1=\text{f}(x_1).\text{Lim}\frac{\text{f}(x_1+\Delta x_1)-\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}}$$

sein wird. Weil aber, wenn $\Delta x_1$ sich der Null nähert, offenbar

$$\text{Lim}\,\text{f}(x_1+\Delta x_1)=\text{f}(x_1)$$

ist, so erhellet auf der Stelle, dass

8)

$$X-x_1=\frac{\text{f}(x_1)-\text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\text{Lim}\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}},\quad Y-y_1=\text{f}(x_1).\frac{\text{f}(x_1)-\text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\text{Lim}\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}}$$

ist, und dass es also, um die Coordinaten $X$, $Y$ zu bestimmen, darauf ankommt, die beiden Gränzen

$$\text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\ \text{und}\ \text{Lim}\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}$$

zu entwickeln.

Was zunächst die Gränze

$$\text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

betrifft, so erhellet aus der in VIII. entwickelten Theorie der Berührenden auf der Stelle und ganz von selbst, dass

$$\text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=-\frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}$$

oder nach 2)

$$9)\quad\ldots\ldots\quad \text{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=-\frac{Q}{P}$$

ist.

Es bleibt uns also bloss noch die Entwickelung der Gränze

$$\text{Lim}\frac{\Delta\text{f}(x_1)}{\Delta x_1}$$

übrig. Weil nun nach 3)

$$\text{f}(x_1)=\frac{P}{Q}$$

ist, so ist

$$\Delta f(x_1) = \frac{P+\Delta P}{Q+\Delta Q} - \frac{P}{Q} = \frac{Q\Delta P - P\Delta Q}{Q(Q+\Delta Q)},$$

also

$$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{Q\frac{\Delta P}{\Delta x_1} - P\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}}{Q(Q+\Delta Q)},$$

und folglich offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{Q\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1} - P\operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}}{Q^2},$$

so dass es also jetzt auf die Entwickelung der beiden Gränzen

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1} \text{ und } \operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}$$

ankommt.

Weil nach 2)

$$P = n^2B(Ax_1 + By_1 + C) - (A^2 + B^2)(y_1 - g)$$

ist, so ist

$$P + \Delta P = n^2B\{A(x_1 + \Delta x_1) + B(y_1 + \Delta y_1) + C\} - (A^2 + B^2)\{(y_1 + \Delta y_1) - g\},$$

also durch Subtraction:

$$\Delta P = n^2B(A\Delta x_1 + B\Delta y_1) - (A^2 + B^2)\Delta y_1,$$

folglich

$$\frac{\Delta P}{\Delta x_1} = n^2B(A + B\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}) - (A^2 + B^2)\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}.$$

Ferner ist nach 2)

$$Q = n^2A(Ax_1 + By_1 + C) - (A^2 + B^2)(x_1 - f),$$

also

$$Q + \Delta Q = n^2A\{A(x_1 + \Delta_1 x) + B(y_1 + \Delta y_1) + C\} - (A^2 + B^2)\{(x_1 + \Delta x_1) - f\},$$

folglich durch Subtraction

$$\Delta Q = n^2A(A\Delta x_1 + B\Delta y_1) - (A^2 + B^2)\Delta x_1,$$

also

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x_1} = n^2A(A + B\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}) - (A^2 + B^2).$$

Daher ergeben sich jetzt die beiden folgenden Formeln:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1}=n^2B(A+B\operatorname{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1})-(A^2+B^2)\operatorname{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}=n^2A(A+B\operatorname{Lim}\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1})-(A^2+B^2);$$

und folglich nach 9):

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1}=n^2B(A-B\frac{Q}{P})+(A^2+B^2)\frac{Q}{P},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}=n^2A(A-B\frac{Q}{P})-(A^2+B^2)$$

oder

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1}=n^2B\frac{AP-BQ}{P}+(A^2+B^2)\frac{Q}{P},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}=n^2A\frac{AP-BQ}{P}-(A^2+B^2);$$

woraus sich leicht

$$Q\operatorname{Lim}\frac{\Delta P}{\Delta x_1}-P\operatorname{Lim}\frac{\Delta Q}{\Delta x_1}$$

$$=\frac{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}{P},$$

folglich nach dem Obigen

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}=\frac{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}{PQ^2}$$

ergiebt.

Also ist nun nach 8):

$$X-x_1=\frac{\frac{P}{Q}+\frac{Q}{P}}{\frac{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}{PQ^2}},$$

$$Y-y_1=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\frac{P}{Q}+\frac{Q}{P}}{\frac{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}{PQ^2}};$$

woraus sich sogleich

$$10)\quad\left\{\begin{array}{l} X-x_1=\dfrac{(P^2+Q^2)Q}{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2},\\[2ex] Y-y_1=\dfrac{(P^2+Q^2)P}{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}\end{array}\right.$$

ergiebt.

Den auf diese Weise völlig bestimmten Punkt $(XY)$ betrachtet man als den Mittelpunkt eines durch den Punkt $(x_1y_1)$ gehenden Kreises, welcher der **Krümmungskreis** des Kegelschnitts für den Punkt $(x_1y_1)$ genannt wird, und also nach dem Obigen derjenige Kreis ist, welcher durch den Punkt $(x_1y_1)$ des Kegelschnitts aus dem Punkte der diesem Punkte des Kegelschnitts entsprechenden Normale desselben als Mittelpunkt beschrieben wird, welchem sich die Durchschnittspunkte dieser Normale mit ihren benachbarten Normalen als einer Gränze desto mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man diese letzteren Normalen immer näher und näher bei der ersteren annimmt, oder derselben immer näher und näher rücken lässt. Der Halbmesser des Krümmungskreises in dem Punkte $(x_1y_1)$ heisst der dem Punkte $(x_1y_1)$ entsprechende **Krümmungshalbmesser** des Kegelschnitts und soll durch $R$ bezeichnet werden.

Weil hiernach der Krümmungshalbmesser $R$ in dem Punkte $(x_1y_1)$ die Entfernung des Punktes $(XY)$ von dem Punkte $(x_1y_1)$ ist, so ist

$$R^2 = (X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2,$$

also nach 10):

$$11) \quad .\ . \quad R^2 = \frac{(P^2+Q^2)^3}{\{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2\}^2}$$

oder

$$12) \quad .\ .\ . \quad \frac{1}{R^2} = \frac{\{A^2+B^2-n^2\frac{(AP-BQ)^2}{P^2+Q^2}\}^2}{P^2+Q^2}.$$

Weil nun nach 2)

$$P = n^2B(Ax_1+By_1+C) - (A^2+B^2)(y_1-g),$$

$$Q = n^2A(Ax_1+By_1+C) - (A^2+B^2)(x_1-f)$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$AP-BQ = (A^2+B^2)\{B(x_1-f)-A(y_1-g)\}.$$

Ferner ist

$$P^2+Q^2$$

$$= n^4(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)^2 + (A^2+B^2)^2\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}$$

$$-2n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\{A(x_1-f)+B(y_1-g)\},$$

also, wenn man

$$(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$

setzt:

$$P^2+Q^2$$

$$=n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\left\{\begin{array}{c}(n^2+1)(Ax_1+By_1+C)\\-2[A(x_1-f)+B(y_1-g)]\end{array}\right\},$$

oder

$$P^2+Q^2$$

$$=n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\{(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)+2(Af+Bg+C)\},$$

oder

$$P^2+Q^2$$

$$=2n^2(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\},$$

oder auch

$$P^2+Q^2$$

$$=2n^2(A^2+B^2)(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\}.$$

Endlich ist

$$(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2$$

$$=n^2(A^2+B^2)^2\left\{\begin{array}{c}(n^2+1)(Ax_1+By_1+C)^2\\-2(Ax_1+By_1+C)[A(x_1-f)+B(y_1-g)]\\-[B(x_1-f)-A(y_1-g)]^2\end{array}\right\},$$

also offenbar

$$(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2$$

$$=n^2(A^2+B^2)^2\left\{\begin{array}{c}n^2(Ax_1+By_1+C)^2\\+[Ax_1+By_1+C-(A(x_1-f)+B(y_1-g))]^2\\-[A(x_1-f)+B(y_1-g)]^2-[B(x_1-f)-A(y_1-g)]^2\end{array}\right\}$$

$$=n^2(A^2+B^2)^2\left\{\begin{array}{c}n^2(Ax_1+By_1+C)^2+(Af+Bg+C)^2\\-(A^2+B^2)[(x_1-f)^2+(y_1-g)^2]\end{array}\right\},$$

folglich, weil

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2-(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}=0$$

ist:

$$(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2=n^2(A^2+B^2)^2(Af+Bg+C)^2.$$

Also ist

$$\frac{P^2+Q^2}{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}$$

$$=\frac{2}{A^2+B^2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\},$$

und folglich nach 10):

$$13)\quad X-x_1=\frac{2\{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)\}}{A^2+B^2}$$

$$\times\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\},$$

$$Y-y_1=\frac{2\{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)\}}{A^2+B^2}$$

$$\times\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}.$$

Ferner ist nach 11)

$$14)\quad R^2=\frac{8n^2(Ax_1+By_1+C)^3\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}^3}{(A^2+B^2)(Af+Bg+C)}$$

oder

15)

$$R^2=\frac{8n^2(Ax_1+By_1+C)^3\left\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\right\}^3}{(A^2+B^2)(Af+Bg+C)^4}.$$

Nach VIII. 7) ist

$$N^2=\frac{2n^2(Ax_1+By_1+C)\left\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\right\}}{A^2+B^2},$$

also

$$N^6=\frac{8n^6(Ax_1+By_1+C)^3\left\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\right\}^3}{(A^2+B^2)^3},$$

und folglich nach 15):

$$\frac{N^6}{R^2}=\frac{n^4(Af+Bg+C)^4}{(A^2+B^2)^2}=\left\{\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}\right\}^2,$$

also, weil nach VI. 2)

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 = \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}$$

ist:

$$\frac{N^6}{R^2} = (\tfrac{1}{2}p)^4,$$

folglich

$$16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R = \frac{N^3}{(\tfrac{1}{2}p)^2},$$

eine längst bekannte Formel.

§. 38.

Die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(x_1y_1)$ ist bekanntlich

$$y - y_1 = -\frac{Q}{P}(x - x_1)$$

oder

$$Q(x - x_1) + P(y - y_1) = 0.$$

Der Werth von

$$Q(x - x_1) + P(y - y_1),$$

wenn man für $x$, $y$ respective $f$, $g$ setzt, ist

$$Q(f - x_1) + P(g - y_1) \quad \text{oder} \quad -Q(x_1 - f) - P(y_1 - g).$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$-Q(x_1 - f) - P(y_1 - g)$$

$$= -n^2A(x_1 - f)(Ax_1 + By_1 + C) + (A^2 + B^2)(x_1 - f)^2$$

$$-n^2B(y_1 - g)(Ax_1 + By_1 + C) + (A^2 + B^2)(y_1 - g)^2$$

$$= -n^2(Ax_1 + By_1 + C)^2 + (A^2 + B^2)\{(x_1 - f)^2 + (y_1 - g)^2\}$$

$$+ n^2(Af + Bg + C)(Ax_1 + By_1 + C)$$

$$= n^2(Af + Bg + C)(Ax_1 + By_1 + C),$$

weil das Aggregat der beiden ersten Theile bekanntlich verschwindet. Also ist nach dem in §. 4. bewiesenen Satze der Werth, welchen

$$Q(x - x_1) + P(y - y_1)$$

erhält, wenn man für $x, y$ respective $f, g$ setzt, positiv oder negativ, jenachdem der Brennpunkt $(fg)$ und der Punkt $(x_1y_1)$ auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Directrix liegen.

Der Werth von

$$Q(x-x_1)+P(y-y_1),$$

wenn man für $x, y$ respective die Coordinaten $X, Y$ des Mittelpunkts des Krümmungskreises setzt, ist nach 10):

$$\frac{(P^2+Q^2)^2}{(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$(A^2+B^2)(P^2+Q^2)-n^2(AP-BQ)^2=n^2(A^2+B^2)^2(Af+Bg+C)^2.$$

Also ist der Werth, welchen

$$Q(x-x_1)+P(y-y_1)$$

erhält, wenn man für $x, y$ respective $X, Y$ setzt:

$$\left\{\frac{P^2+Q^2}{n(A^2+B^2)(Af+Bg+C)}\right\}^2,$$

und daher stets positiv.

Daher erhalten wir jetzt nach §. 4. offenbar den folgenden Satz:

Wenn der Brennpunkt und der Punkt $(x_1y_1)$ auf **einer** Seite der Directrix liegen, so liegen der Brennpunkt und der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf **einer** Seite der Berührenden in dem Punkte $(x_1y_1)$.

Wenn der Brennpunkt und der Punkt $(x_1y_1)$ auf **verschiedenen** Seiten der Directrix liegen, so liegen der Brennpunkt und der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf **verschiedenen** Seiten der Berührenden in dem Punkte $(x_1y_1)$.

Mittelst einer ganz einfachen Betrachtung schliesst man hieraus auf der Stelle, dass der Mittelpunkt des Krümmungskreises in der Normale immer auf der concaven Seite des Kegelschnitts liegt.

## §. 39.

Für die Parabel ist nach 14):

$$R^2=\frac{8(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)(Af+Bg+C)}.$$

ist aber $V$ der von dem Brennpunkte $(fg)$ nach dem Punkte $(x_1y_1)$ gezogene Vector, so ist nach V. 2)

$$V^2=\frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Also ist

$$R^4=\frac{64(Ax_1+By_1+C)^6}{(A^2+B^2)^2(Af+Bg+C)^2},\quad V^6=\frac{(Ax_1+By_1+C)^6}{(A^2+B^2)^3},$$

und folglich:

$$\frac{V^6}{R^4}=\frac{(Af+Bg+C)^2}{64(A^2+B^2)}=\frac{1}{256}\left\{\frac{2(Af+Bg+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2,$$

also nach VI. 2):

$$\frac{V^6}{R^4}=\frac{1}{256}p^2,\quad R^4=\frac{256V^6}{p^2};$$

woraus sich

17) . . . . . . . $R=4V\sqrt{\frac{V}{p}}$

ergiebt.

Für die Ellipse und Hyperbel ist nach 14):

$$R^2=\frac{8n^2(Ax_1+By_1+C)^3\{1+\frac{n^2-1}{2}.\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\}^3}{(A^2+B^2)(Af+Bg+C)}.$$

Bezeichnen aber $V$ und $V_1$ die von den Brennpunkten $(fg)$ und $(f_1g_1)$ nach dem Punkte $(x_1y_1)$ gezogenen Vectoren, so ist nach V. 1), 13):

$$V^2=\frac{n^2(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

$$V_1^2=\frac{4n^2}{(n^2-1)^2}.\frac{(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}\{1+\frac{n^2-1}{2}.\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\}^2.$$

Also ist:

$$R^4=\frac{64n^4(Ax_1+By_1+C)^6\{1+\frac{n^2-1}{2}.\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\}^6}{(A^2+B^2)^2(Af+Bg+C)^2}$$

und

$$V^6 = \frac{n^6(Ax_1+By_1+C)^6}{(A^2+B^2)^3},$$

$$V_1{}^6 = \frac{64n^6}{(n^2-1)^6} \cdot \frac{(Af+Bg+C)^6}{(A^2+B^2)^3} \left\{1 + \frac{n^2-1}{2} \cdot \frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}^6;$$

folglich

$$(VV_1)^6$$

$$= \frac{64n^{12}}{(n^2-1)^6} \cdot \frac{(Af+Bg+C)^6(Ax_1+By_1+C)^6\left\{1+\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{Af+Bg+C}\right\}^6}{(A^2+B^2)^6}.$$

Also ist

$$\frac{(VV_1)^6}{R^4} = \frac{n^8}{(n^2-1)^6} \cdot \frac{(Af+Bg+C)^8}{(A^2+B^2)^4},$$

und weil nach VI. 2)

$$p^8 = \frac{256n^8(Af+Bg+C)^8}{(A^2+B^2)^4}$$

ist, so ist

$$18) \quad \ldots\ldots \quad \frac{(VV_1)^6}{R^4} = \frac{p^8}{256(n^2-1)^6}.$$

Für die Ellipse ist

$$\frac{(VV_1)^6}{R^4} = \frac{p^8}{256(1-n^2)^6},$$

also

$$\frac{VV_1\sqrt{VV_1}}{R} = \frac{p^2}{4(1-n^2)\sqrt{1-n^2}},$$

und folglich:

$$19) \quad \ldots \quad R = \frac{4(1-n^2)\,VV_1\sqrt{(1-n^2)\,VV_1}}{p^2}.$$

Für die Hyperbel ist

$$\frac{(VV_1)^6}{R^4} = \frac{p^8}{256(n^2-1)^6},$$

also

$$\frac{VV_1\sqrt{VV_1}}{R} = \frac{p^2}{4(n^2-1)\sqrt{n^2-1}},$$

und folglich:

$$20) \quad \ldots \quad R = \frac{4(n^2-1)VV_1\sqrt{(n^2-1)VV_1}}{p^2}.$$

Auch ist:

$$21) \begin{cases} \dfrac{R}{p} = 4\dfrac{V}{p}\sqrt{\dfrac{V}{p}} \text{ für die Parabel,} \\ \dfrac{R}{p} = 4(1-n^2)\dfrac{V}{p}\cdot\dfrac{V_1}{p}\sqrt{(1-n^2)\dfrac{V}{p}\cdot\dfrac{V_1}{p}} \text{ für die Ellipse,} \\ \dfrac{R}{p} = 4(n^2-1)\dfrac{V}{p}\cdot\dfrac{V_1}{p}\sqrt{(n^2-1)\dfrac{V}{p}\cdot\dfrac{V_1}{p}} \text{ für die Hyperbel.} \end{cases}$$

Sind $R$, $R'$ zwei Krümmungshalbmesser und $V$, $V_1$ und $V'$, $V_1'$ die nach den betreffenden Punkten gezogenen Vectoren, so ist für die Parabel:

$$22) \quad \ldots\ldots \quad \frac{R}{R'} = \frac{V}{V'}\sqrt{\frac{V}{V'}} = \left(\frac{V}{V'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

und für die Ellipse und Hyperbel ist:

$$23) \quad \ldots \quad \frac{R}{R'} = \frac{VV_1}{V'V_1'}\sqrt{\frac{VV_1}{V'V_1'}} = \left(\frac{VV_1}{V'V_1'}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für die Ellipse ist nach IV. 20)

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-n^2},$$

und nach IV. 18) und VI. 2) offenbar:

$$p^2 = 4(1-n^2)b^2.$$

Also ist nach 19):

$$24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R = \frac{VV_1\sqrt{VV_1}}{ab},$$

welche Formel auch für die Hyperbel gilt und ganz eben so bewiesen wird. Es ist also auch immer

$$25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ab = \frac{VV_1\sqrt{VV_1}}{R},$$

und die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist folglich bei der Ellipse und Hyperbel constant *).

---

*) Bezeichnet man den Flächeninhalt der Ellipse durch $E$, so ist anderweitig bekannt, dass

## XI.

## Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

### §. 40.

Die Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen hat im Allgemeinen die Form

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0.$$

Um diese Gleichung zu discutiren, d. h. zu untersuchen, welche wesentlich von einander verschiedenen Curven durch dieselbe dargestellt werden, wollen wir sie mit der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte, nämlich, wenn $n$ die Charakteristik und

$$Ax+By+C=0$$

die Gleichung der Directrix ist, die Coordinaten des Brennpunkts jetzt aber durch $X$, $Y$ bezeichnet werden, mit der Gleichung

$$2) \quad n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}$$

vergleichen.

Nach gehöriger Entwickelung bringt man diese letztere Gleichung leicht auf die Form:

$$3) \quad \left.\begin{array}{l} \{(n^2-1)A^2-B^2\}x^2+\{(n^2-1)B^2-A^2\}y^2+2n^2ABxy \\ \quad +2\{n^2AC+(A^2+B^2)X\}x \\ \quad +2\{n^2BC+(A^2+B^2)Y\}y \\ \quad +n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2) \end{array}\right\}=0,$$

und erhält nun durch Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung 1) zur Bestimmung von $n$, $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ aus $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ die beiden folgenden Gruppen von Gleichungen:

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \left\{\begin{array}{l} (n^2-1)A^2-B^2=a, \\ (n^2-1)B^2-A^2=b, \\ n^2AB=c \end{array}\right.$$

---

$$E=ab\pi$$

ist; also ist nach dem Obigen auch

$$E=\frac{\pi VV_1\sqrt{VV_1}}{R}.$$

und

$$5) \quad \ldots \quad \begin{cases} n^2AC+(A^2+B^2)X=d, \\ n^2BC+(A^2+B^2)Y=e, \\ n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=f; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass die erste Gruppe nur die unbekannten Grössen $n$, $A$, $B$; die zweite, nachdem diese unbekannten Grössen mittelst der ersten Gruppe von Gleichungen bestimmt worden sind, nur die unbekannten Grössen $C$, $X$, $Y$ enthält, so dass wir also jede dieser beiden Gruppen von Gleichungen für sich zu behandeln haben, wozu wir jetzt übergehen wollen *).

---

*) Ueber die Gleichungen

$$(n^2-1)A^2-B^2=a,$$
$$(n^2-1)B^2-A^2=b,$$
$$n^2AB=c$$

kann man beiläufig Folgendes bemerken.

Wenn man aus den beiden ersten Gleichungen zuerst $B$, dann $A$ eliminirt, so erhält man:

$$(n^2-1)^2A^2-A^2=(n^2-1)a+b,$$
$$(n^2-1)^2B^2-B^2=(n^2-1)b+a;$$

also:

$$n^2(n^2-2)A^2=(n^2-1)a+b,$$
$$n^2(n^2-2)B^2=(n^2-1)b+a;$$

folglich

$$n^4(n^2-2)^2A^2B^2=\{(n^2-1)a+b\}\{(n^2-1)b+a\},$$

und daher wegen der dritten Gleichung:

$$(n^2-2)^2c^2=\{(n^2-1)a+b\}\{(n^2-1)b+a\}$$

oder

$$(n^2-2)^2c^2=\{n^2a-(a-b)\}\{n^2b+(a-b)\},$$

woraus sich ferner leicht

$$(n^2-2)^2c^2=n^4ab+(n^2-1)(a-b)^2$$

ergiebt.

Schreibt man aber diese Gleichung unter der Form

$$n^4ab=(n^2-2)^2c^2-(n^2-1)(a-b)^2$$

und zieht auf beiden Seiten $n^4c^2$ ab, so wird dieselbe:

$$n^4(ab-c^2)=-(n^2-1)\{(a-b)^2+4c^2\},$$

§. 41.

Um die Gleichungen

$$6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} (n^2-1)A^2-B^2=a, \\ (n^2-1)B^2-A^2=b, \\ n^2AB=c \end{cases}$$

in Bezug auf $n$, $A$, $B$ als unbekannte Grössen aufzulösen, setze man:

$$7) \quad \ldots \quad \begin{cases} n^2-1=u, \quad \text{also:} \quad n^2=u+1, \\ A+B=2v, \qquad A=v+w, \\ A-B=2w; \qquad B=v-w; \end{cases}$$

so werden die Gleichungen 6):

$$8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} u(v+w)^2-(v-w)^2=a, \\ u(v-w)^2-(v+w)^2=b, \\ (u+1)(v+w)(v-w)=c; \end{cases}$$

also:

$$9) \quad \ldots \quad \begin{cases} (u-1)(v^2+w^2)+2(u+1)vw=a, \\ (u-1)(v^2+w^2)-2(u+1)vw=b, \\ (u+1)(v^2-w^2)=c; \end{cases}$$

woraus ferner

---

also:

$$ab-c^2=-\frac{n^2-1}{n^4}\{(a-b)^2+4c^2\}$$

oder

$$c^2-ab=\frac{n^2-1}{n^4}\{(a-b)^2+4c^2\},$$

woraus man schliesst, dass für

$$c^2-ab<0, \quad c^2-ab=0, \quad c^2-ab>0$$

respective

$$n^2<1, \quad n^2=1, \quad n^2>1$$

oder

$$n<1, \quad n=1, \quad n>1$$

ist.

$$10) \quad \ldots \quad \begin{cases} 2(u-1)(v^2+w^2)=a+b, \\ 4(u+1)vw=a-b, \\ (u+1)(v^2-w^2)=c \end{cases}$$

folgt. Drückt man aber diese Gleichungen auf folgende Art aus:

$$11) \quad \ldots \quad \begin{cases} 2u(v^2+w^2)=a+b+2(v^2+w^2), \\ 2u(v^2-w^2)=2c-2(v^2-w^2) \end{cases}$$

und

$$12) \quad \ldots \quad \begin{cases} 4(u+1)vw=a-b, \\ 2(u+1)(v^2-w^2)=2c; \end{cases}$$

so erhält man durch Division zur Bestimmung von $v$, $w$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$13) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{v^2+w^2}{v^2-w^2}=\dfrac{a+b+2(v^2+w^2)}{2c-2(v^2-w^2)}, \\ \dfrac{2vw}{v^2-w^2}=\dfrac{a-b}{c}. \end{cases}$$

Um diese Bestimmung von $v$, $w$ mit möglichster Leichtigkeit auszuführen, setze man:

$$14) \quad \ldots\ldots \quad v=R\cos\varphi, \quad w=R\sin\varphi;$$

wo $R$ eine positive Grösse sein soll; so ist

$$15) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} v^2+w^2=R^2, \\ v^2-w^2=R^2\cos2\varphi, \\ 2vw=R^2\sin2\varphi; \end{cases}$$

und die Gleichungen 13) werden also:

$$16) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sec2\varphi=\dfrac{a+b+2R^2}{2(c-R^2\cos2\varphi)}, \\ \tang2\varphi=\dfrac{a-b}{2c}; \end{cases}$$

woraus man zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen $\varphi$, $R$ leicht die folgenden Formeln erhält:

$$17) \quad \ldots \quad \begin{cases} \tang2\varphi=\dfrac{a-b}{2c}, \\ R=\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2c-(a+b)\cos2\varphi}{\cos2\varphi}}; \end{cases}$$

und zur Berechnung von $v$ und $w$ hat man nach 14) die Formeln:

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\tan 2\varphi = \frac{a-b}{2c}, \\ &v = \frac{\cos\varphi}{2}\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}}, \\ &w = \frac{\sin\varphi}{2}\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}}; \end{aligned} \right.$$

also zur Berechnung von $A$, $B$ nach 7), weil

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sin(90^0 - \varphi) + \sin\varphi = \frac{2\cos(45^0-\varphi)}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sin(90^0 - \varphi) - \sin\varphi = \frac{2\sin(45^0-\varphi)}{\sqrt{2}}$$

ist, die Formeln:

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\tan 2\varphi = \frac{a-b}{2c}, \\ &A = \frac{\cos(45^0-\varphi)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}}, \\ &B = \frac{\sin(45^0-\varphi)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}} \end{aligned} \right.$$

oder:

$$20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\tan 2\varphi = \frac{a-b}{2c}, \\ &A = \cos(45^0-\varphi)\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{2\cos 2\varphi}}, \\ &B = \sin(45^0-\varphi)\sqrt{\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{2\cos 2\varphi}}. \end{aligned} \right.$$

Nach 18) ist offenbar

$$v^2 - w^2 = \frac{\cos 2\varphi}{4} \cdot \frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{4},$$

und nach 10) und 7) ist

$$n^2 = \frac{c}{v^2 - w^2},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$21) \quad \ldots\ldots n=\sqrt{\frac{4c}{2c-(a+b)\cos 2\varphi}}.$$

Vorzüglich kommt es nun darauf an, zu untersuchen, **unter** welchen Bedingungen die vorhergehenden Formeln für $n$, $A$, $B$ reelle Werthe liefern, wozu wir jetzt übergehen wollen.

## §. 42.

Zuerst bemerken wir Folgendes.

Aus

$$\frac{4c}{2c-(a+b)\cos 2\varphi} \lesseqgtr 1$$

folgt nach und nach:

$$\frac{4c}{2c-(a+b)\cos 2\varphi}-1 \lesseqgtr 0,$$

$$\frac{2c+(a+b)\cos 2\varphi}{2c-(a+b)\cos 2\varphi} \lesseqgtr 0,$$

$$\frac{\{2c+(a+b)\cos 2\varphi\}\{2c-(a+b)\cos 2\varphi\}}{\{2c-(a+b)\cos 2\varphi\}\{2c-(a+b)\cos 2\varphi\}} \lesseqgtr 0,$$

$$\frac{4c^2-(a+b)^2\cos 2\varphi^2}{\{2c-(a+b)\cos 2\varphi\}^2} \lesseqgtr 0,$$

$$4c^2-(a+b)^2\cos 2\varphi^2 \lesseqgtr 0;$$

also, weil nach 20)

$$22) \quad \ldots \quad \cos 2\varphi^2=\frac{1}{1+\tan 2\varphi^2}=\frac{4c^2}{(a-b)^2+4c^2}$$

ist:

$$4c^2-\frac{4(a+b)^2c^2}{(a-b)^2+4c^2} \lesseqgtr 0,$$

$$4c^2\{(a-b)^2+4c^2-(a+b)^2\} \lesseqgtr 0,$$

$$c^2(c^2-ab) \lesseqgtr 0;$$

folglich, unter der Voraussetzung, dass $c$ nicht verschwindet:

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0.$$

Wenn also $c$ nicht verschwindet, so sind mit gehöriger Beziehung der oberen, mittleren und unteren Zeichen auf einander die Bedingungen

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0, \quad \frac{4c}{2c - (a+b)\cos 2\varphi} \overset{<}{\underset{>}{=}} 1$$

oder

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0, \quad n^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} 1$$

immer zugleich erfüllt.

§. 43.

Ferner bemerken wir, dass aus

$$(a-b)^2 + 4c^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} (a+b)^2$$

nach gehöriger Entwickelung der Quadrate auf der Stelle

$$4(c^2 - ab) \overset{<}{\underset{>}{=}} 0,$$

also

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

folgt, so dass folglich mit gehöriger Beziehung der oberen, mittleren und unteren Zeichen auf einander die Bedingungen

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0, \quad (a-b)^2 + 4c^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} (a+b)^2$$

oder

$$c^2 - ab \overset{<}{\underset{>}{=}} 0, \quad \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \overset{<}{\underset{>}{=}} \text{val. abs. } (a+b)$$

jederzeit zugleich Statt finden oder erfüllt sind.

§. 44.

Aus 22) folgt:

23) . . . . $$\cos 2\varphi = \pm \frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},$$

also

$$2c-(a+b)\cos 2\varphi = 2c\,\frac{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\mp(a+b)}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},$$

und folglich, indem wir den Fall, wenn $c=0$ ist, für's Erste ganz bei Seite setzen, nach 21):

24) . . . . $$n^2 = \frac{2\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\mp(a+b)}.$$

Weil ferner

$$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2c}{\cos 2\varphi}-(a+b)$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \pm\sqrt{(a-b)^2+4c^2}-(a+b)$$

oder:

25) $$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \pm\{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\mp(a+b)\}.$$

Aus den Formeln

$$\tan 2\varphi = \frac{a-b}{2c},\quad \cos 2\varphi = \pm\frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}$$

folgt:

26) . . . . $$\sin 2\varphi = \pm\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},$$

natürlich immer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander.

Den Winkel $2\varphi$ wollen wir im Folgenden immer zwischen 0 und 360° nehmen.

§. 45.

Indem wir, wie schon erinnert, den Fall, wenn $c=0$ ist, für's Erste ganz bei Seite setzen, unterscheiden wir nun die folgenden Fälle.

I. $c^2 - ab > 0$, also $n^2 > 1$.

Weil bekanntlich

$$\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} > \text{val. abs. } (a+b)$$

ist, so liefern in der Formel 24) beide Zeichen für $n^2$ positive Werthe. Dagegen liefert in der Formel 25) nur das obere Zeichen für die Grösse

$$\frac{2c - (a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

einen positiven Werth; und da diese Grösse nothwendig positiv sein muss, wenn die Grössen $A$ und $B$ in 19) reell sein sollen, so kann man in unseren obigen Formeln nur die oberen Zeichen nehmen. Man muss also

$$\cos 2\varphi = \frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}$$

setzen, durch welche Formeln der zwischen 0 und 360° liegende Winkel $2\varphi$ vollkommen bestimmt ist. Dass dann aber auch die Grössen $n$, $A$, $B$ reell und vollkommen bestimmt sind, und dass $n > 1$ ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

II. $c^2 - ab = 0$, also $n^2 = 1$.

Weil $c^2 = ab$ ist, so ist $ab$ positiv, und $a$ und $b$ haben daher gleiche Vorzeichen. Sind nun $a$ und $b$ beide positiv, und ist also auch $a + b$ positiv, so kann man, weil

$$\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} = a + b$$

ist, in der Formel 24) nur das untere Zeichen nehmen, weil das obere für $n^2$ das Symbol des Unendlichen liefern würde. Sind dagegen $a$ und $b$ beide negativ, und ist also auch $a + b$ negativ, so kann man, weil

$$\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} = \text{val. abs. } (a+b)$$

ist, in der Formel 24) nur das obere Zeichen nehmen, weil das untere für $n^2$ das Symbol des Unendlichen liefern würde. Wenn nun aber $a$ und $b$ beide positiv sind, so liefert in der Formel 25) das untere Zeichen für

$$\frac{2c - (a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

einen negativen Werth, für $A$ und $B$ also imaginäre Werthe, was

sich mit dem Obigen nicht vereinigen lässt. Wenn dagegen $a$ und $b$ beide negativ sind, so liefert in der Formel 25) das obere Zeichen für

$$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

einen positiven Werth, für $A$ und $B$ also reelle Werthe, was mit dem Obigen sehr wohl zu vereinigen ist. Nun ist es aber offenbar verstattet, anzunehmen, dass in dem vorliegenden Falle die gleiche Vorzeichen habenden Coefficienten $a$ und $b$ in der Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+\mathfrak{f}=0$$

beide negativ sind, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, und also $a$ und $b$ beide positiv wären, man die vorstehende Gleichung bloss unter der Form

$$-ax^2-by^2-2cxy-2dx-2ey-\mathfrak{f}=0$$

zu schreiben brauchte, wo nun die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ beide negativ wären. Unter der immer verstatteten Voraussetzung also, dass $a$ und $b$ beide negativ sind, muss man in allen unseren obigen Formeln wieder die oberen Zeichen nehmen. Man muss also wieder

$$\cos 2\varphi=\frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},\quad \sin 2\varphi=\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}$$

setzen, durch welche Formeln der zwischen 0 und 360° liegende Winkel $2\varphi$ vollkommen bestimmt ist. Dass dann aber auch die Grössen $n$, $A$, $B$ reell und vollkommen bestimmt sind, und dass $n=1$ ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

III. $c^2-ab<0$, also $n^2<1$.

Weil $ab>c^2$, folglich $ab$ positiv ist, so haben $a$ und $b$ wieder gleiche Vorzeichen. Sind $a$ und $b$ beide positiv, und ist also auch $a+b$ positiv, so liefert, weil

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<a+b$$

ist, in der Formel 24) nur das untere Zeichen für $n^2$ einen positiven Werth. Sind dagegen $a$ und $b$ beide negativ, und ist also auch $a+b$ negativ, so liefert, weil

$$\sqrt{(a-b)^2+4c^2}<\text{val. abs.}\,(a+b)$$

ist, in der Formel 24) nur das obere Zeichen für $n^2$ einen posi-

tiven Werth. Wenn nun aber $a$ und $b$ beide positiv sind, so liefert in der Formel 25) das untere Zeichen für

$$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

einen negativen Werth, für $A$ und $B$ also imaginäre Werthe, was mit dem Obigen nicht zu vereinigen ist. Wenn dagegen $a$ und $b$ beide negativ sind, so liefert in der Formel 25) das obere Zeichen für

$$\frac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

einen positiven Werth, für $A$ und $B$ also reelle Werthe, was sich mit dem Obigen sehr wohl vereinigen lässt. Da es nun aber nach II. verstattet ist, die Coefficienten $a$ und $b$ in diesem Falle beide als negativ anzunehmen, so wird man unter dieser Voraussetzung in allen unseren obigen Formeln die oberen Zeichen nehmen, und also

$$\cos 2\varphi=\frac{2c}{\sqrt{(a-b^2)+4c^2}},\quad \sin 2\varphi=\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}$$

setzen, durch welche Formeln der zwischen 0 und 360° liegende Winkel $2\varphi$ vollkommen bestimmt ist. Dass dann aber auch die Grössen $n$, $A$, $B$ reell und vollkommen bestimmt sind, und dass $n<1$ ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Hieraus ergiebt sich nun im Allgemeinen das folgende Resultat:

Wenn $c$ nicht verschwindet, so ist für

$$c^2-ab>0,\quad c^2-ab=0,\quad c^2-ab<0$$

respective

$$n>1,\quad n=1,\quad n<1$$

und der zwischen 0 und 360° liegende Winkel $2\varphi$ ist immer mittelst der Formeln

$$27)\quad \cos 2\varphi=\frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},\quad \sin 2\varphi=\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}$$

zu bestimmen, wenn nur, wie man jederzeit anzunehmen berechtigt ist, im zweiten und dritten Falle die Coefficienten $a$ und $b$ beide negativ sind, wogegen im ersten Falle diese Coefficienten beide ganz beliebige Vorzeichen haben können. Die Grössen $n$, $A$, $B$ werden in allen Fällen mittelst der Formeln:

$$28) \quad . \quad . \quad \begin{cases} n=\sqrt{\dfrac{4c}{2c-(a+b)\cos 2\varphi}}, \\ A=\cos(45^0-\varphi)\sqrt{\dfrac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{2\cos 2\varphi}}, \\ B=\sin(45^0-\varphi)\sqrt{\dfrac{2c-(a+b)\cos 2\varphi}{2\cos 2\varphi}} \end{cases}$$

bestimmt.

Von dem Falle, wenn $c=0$ ist, wird späterhin die Rede sein.

§. 46.

Wenn wir jetzt den Anfang der Coordinaten in einen durch die primitiven Coordinaten $p$, $q$ bestimmten Punkt $(pq)$ verlegen, und diesen Punkt als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems annehmen, so müssen wir, um zu diesem neuen Coordinatensysteme überzugehen, in der Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+\mathfrak{f}=0$$

für $x$, $y$ respective $p+x$, $q+y$ setzen, indem wir der Kürze wegen die Coordinatenin dem neuen oder secundären Systeme wieder durch $x$, $y$ bezeichnen. Dadurch wird vorstehende Gleichung nach gehöriger Entwickelung:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+by^2+2cxy \\ +2(ap+cq+d)x+2(cp+bq+e)y \\ +ap^2+bq^2+2cpq+2dp+2eq+\mathfrak{f} \end{array}\right\}=0.$$

Bestimmen wir nun den Punkt $(pq)$ so, dass seine primitiven Coordinaten $p$, $q$ den Gleichungen

$$ap+cq+d=0,$$
$$cp+bq+e=0$$

genügen, so erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von $q$ und $p$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$(c^2-ab)p+ce-bd=0,$$
$$(c^2-ab)q+cd-ae=0;$$

also:

$$29) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p=\frac{bd-ce}{c^2-ab}, \quad q=\frac{ae-cd}{c^2-ab};$$

welche Formeln aber für $p$ und $q$ nur so lange endliche völlig bestimmte Werthe liefern, so lange $c^2-ab$ nicht verschwindet. Weil

$$ap^2+bq^2+2cpq+2dp+2eq+f$$
$$=(ap+cq+d)p+(cp+bq+e)q+dp+eq+f,$$

also nach dem Obigen

$$ap^2+bq^2+2cpq+2dp+2eq+f=dp+eq+f$$

ist, so erhalten wir für die Grösse

$$ap^2+bq^2+2cpq+2dp+2eq+f$$

oder

$$dp+eq+f,$$

wenn wir die obigen Werthe von $p$ und $q$ in diese letztere Grösse einführen, leicht den folgenden Ausdruck:

$$\frac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{c^2-ab},$$

und es ergiebt sich nun, wenn wir der Kürze wegen

$$30) \quad \ldots \quad \omega=\frac{ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde}{c^2-ab}$$

setzen, der folgende Satz:

Wenn $c^2-ab$ nicht verschwindet, so lässt sich die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen immer durch eine blosse parallele Fortrückung des Coordinatensystems auf die Form

$$ax^2+by^2+2cxy+\omega=0$$

bringen, so dass wir also unter der Voraussetzung, dass $c^2-ab$ nicht verschwindet, die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen auch immer bloss unter dieser Form zu betrachten brauchen.

§. 47.

Wir wollen nun zu der Auflösung der drei Gleichungen

$$31) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{l} n^2AC+(A^2+B^2)X=d, \\ n^2BC+(A^2+B^2)Y=e, \\ nC^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=f \end{array}\right.$$

übergehen, und unterscheiden dabei, indem wir, wie schon erinnert, den Fall, wenn $e=0$ ist, für's Erste bei Seite setzen, wieder die drei folgenden Fälle.

$$\text{I.}\quad c^2-ab>0,\quad n>1.$$

In diesem Falle ist es nach dem vorhergehenden Paragraphen verstattet,

$$d=0,\quad e=0,\quad f=\omega$$

zu setzen, wodurch die Gleichungen 31) die folgende Form erhalten:

$$32)\ \ldots\ \begin{cases} n^2AC+(A^2+B^2)X=0, \\ n^2BC+(A^2+B^2)Y=0, \\ n^2C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=\omega. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$X=-\frac{n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=-\frac{n^2BC}{A^2+B^2};$$

also

$$X^2+Y^2=\frac{n^4C^2}{A^2+B^2},$$

und folglich vermöge der dritten Gleichung:

$$n^2(n^2-1)C^2=-\omega.$$

Daher haben wir zur Bestimmung von $C$, $X$, $Y$ die Formeln:

$$33)\quad C=\pm\sqrt{\frac{-\omega}{n^2(n^2-1)}},\quad X=-\frac{n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=-\frac{n^2BC}{A^2+B^2}.$$

Sollen diese Formeln für $C$, $X$, $Y$ reelle Werthe liefern, so muss $\omega$ negativ sein. Dass dies aber der Fall sei, ist jederzeit anzunehmen verstattet; denn nach §. 45. können im vorliegenden Falle $a$ und $b$ ganz beliebige Grössen sein, und wenn in der Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+\omega=0$$

das letzte Glied $\omega$ positiv wäre, so brauchte man die gegebene Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

der Curve bloss unter der Form

$$-ax^2-by^2-2cxy-2dx-2ey-f=0$$

zu schreiben, oder, was Dasselbe ist, im Obigen für $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, f respective $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, $-e$, $-$f zu setzen, wo dann nach 30)

$$\omega=-\frac{ae^2+bd^2+\mathrm{f}c^2-ab\mathrm{f}-2cde}{c^2-ab}$$

werden, also $\omega$ offenbar nun einen negativen Werth annehmen würde.

Die Coordinaten $X$, $Y$ werden unendlich, wenn

$$A^2+B^2=0$$

ist. Da aber diese Gleichung in die beiden Gleichungen

$$A=0,\quad B=0$$

zerfällt, so müsste wegen der Gleichung

$$n^2AB=c$$

in 6) offenbar $c=0$ sein, welcher Fall von uns ausgeschlossen worden ist. Also kann nicht

$$A^2+B^2=0$$

sein, und $X$, $Y$ werden daher nicht unendlich.

Wenn $\omega=0$ ist, so liefern die Formeln 33):

$$C=0,\quad X=0,\quad Y=0,$$

wovon nachher weiter die Rede sein wird.

Wenn $\omega \gtrless 0$ ist, ist nach 30), weil $c^2-ab>0$ ist, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$ae^2+bd^2+\mathrm{f}c^2-ab\mathrm{f}-2cde \gtrless 0;$$

und weil $n>1$ ist, überhaupt aber $n$, $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ endliche völlig bestimmte reelle Grössen sind, so ist im vorliegenden Falle offenbar die Curve im Allgemeinen eine Hyperbel, worin auch die doppelten Zeichen in den Formeln 33) ihre unmittelbare Erklärung finden, weil die Hyperbel bekanntlich zwei Directrixen und zwei Brennpunkte hat. Wenn $\omega=0$ und wie vorher $c^2-ab>0$ ist, so ist nach 30)

$$ae^2+bd^2+\mathrm{f}c^2-ab\mathrm{f}-2cde=0,$$

und es ist wie früher $n>1$, und $n$, $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ sind überhaupt endliche völlig bestimmte reelle Grössen. Weil aber in

diesem Falle nach dem Obigen $C=0$, $X=0$, $Y=0$, also die Gleichung der Directrix im zweiten Coordinatensysteme

$$Ax+By=0$$

ist, wodurch eine durch den Punkt $(pq)$ gehende Gerade charakterisirt wird, und weil mit dem Punkte $(pq)$ auch der im zweiten Coordinatensystem durch die Coordinaten $X=0$, $Y=0$ bestimmte Punkt zusammenfällt; so erhellet mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle, dass im vorliegenden Falle die Hyperbel in ein System zweier durch den Punkt $(pq)$ gehender gerader Linien degenerirt, wie dies aus dem allgemeinen Begriffe der Kegelschnitte in §. 1. sogleich folgt, weil hier der Brennpunkt in der Directrix liegt und die Charakteristik grösser als die Einheit ist.

Ueberhaupt ergiebt sich aus dem Vorhergehenden das folgende Resultat:

Wenn $c$ nicht verschwindet und

$$c^2-ab>0$$

ist, so stellt die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+\mathfrak{f}=0$$

eine Hyperbel oder ein System zweier sich schneidenden geraden Linien dar, jenachdem

$$ae^2+bd^2+\mathfrak{f}c^2-ab\mathfrak{f}-2cde \gtrless 0$$

oder

$$ae^2+bd^2+\mathfrak{f}c^2-ab\mathfrak{f}-2cde=0$$

ist.

II. $c^2-ab=0$, $n=1$.

In diesem Falle nehmen die Gleichungen 31) die folgende, nämlich ihre ursprüngliche Gestalt an:

$$34) \quad \ldots \quad \begin{cases} AC+(A^2+B^2)X=d, \\ BC+(A^2+B^2)Y=e, \\ C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=\mathfrak{f}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$X=\frac{d-AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-BC}{A^2+B^2};$$

also:

$$X^2+Y^2=\frac{d^2+e^2-2(dA+eB)C+(A^2+B^2)C^2}{(A^2+B^2)^2},$$

woraus sich

$$C^2-(A^2+B^2)(X^2+Y^2)=\frac{2(dA+eB)C-(d^2+e^2)}{A^2+B^2},$$

folglich nach dem Obigen

$$\frac{2(dA+eB)C-(d^2+e^2)}{A^2+B^2}=\mathfrak{f}$$

ergiebt, so dass man also zur Bestimmung von $C$, $X$, $Y$ die folgenden Formeln hat:

35)

$$C=\frac{d^2+e^2+\mathfrak{f}(A^2+B^2)}{2(dA+eB)},\quad X=\frac{d-AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-BC}{A^2+B^2}.$$

Dass nicht

$$A^2+B^2=0$$

sein kann, ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass $c$ nicht verschwindet, wie in I., und die vorstehenden Formeln liefern also für $C$, $X$, $Y$ so lange endliche völlig bestimmte reelle Werthe, so lange nicht

$$dA+eB=0$$

ist, so dass wir also diesen letzteren Fall jetzt besonders betrachten müssen.

Zuvörderst wissen wir aus §. 45., dass $a$ und $b$ negative Grössen sind, und, weil $n=1$ ist, so sind die Gleichungen 6):

$$A^2=-b,\quad B^2=-a,\quad AB=c.$$

Also ist, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A=\pm\sqrt{-b},\quad B=\pm\sqrt{-a}\quad \text{oder}\quad A=\pm\sqrt{-b},\quad B=\mp\sqrt{-a}.$$

Wegen der Gleichung

$$dA+eB=0$$

ist also, wenn $c$ positiv ist:

$$d\sqrt{-b}+e\sqrt{-a}=0,$$

und wenn $c$ negativ ist, so ist

$$d\sqrt{-b}-e\sqrt{-a}=0.$$

Wenn man also im Folgenden immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist, so ist:

$$d\sqrt{-b}\pm e\sqrt{-a}=0,$$

folglich:

$$e=\mp d\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}},\quad d=\mp e\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}};$$

und die zu discutirende Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

lässt sich also unter einer der beiden folgenden Formen:

$$ax^2+by^2\pm 2\sqrt{-a}.\sqrt{-b}.xy+2dx\mp 2d\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}y+f=0,$$

$$ax^2+by^2\pm 2\sqrt{-a}.\sqrt{-b}.xy\mp 2e\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}x+2ey+f=0$$

oder

$$-ax^2-by^2\mp 2\sqrt{-a}.\sqrt{-b}.xy-2dx\pm 2d\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}y-f=0,$$

$$-ax^2-by^2\mp 2\sqrt{-a}.\sqrt{-b}.xy\pm 2e\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}x-2ey-f=0;$$

also unter einer der beiden folgenden Formen:

$$(x\sqrt{-a}\mp y\sqrt{-b})^2-\frac{2d}{\sqrt{-a}}(x\sqrt{-a}\mp y\sqrt{-b})-f=0,$$

$$(x\sqrt{-a}\mp y\sqrt{-b})^2\pm\frac{2e}{\sqrt{-b}}(x\sqrt{-a}\mp y\sqrt{-b})-f=0$$

darstellen. Da sich diese beiden Gleichungen in Bezug auf

$$x\sqrt{-a}\mp y\sqrt{-b}$$

als unbekannte Grösse wie quadratische Gleichungen auflösen lassen, so ist klar, dass im vorliegenden Falle die zu discutirende Gleichung im Allgemeinen zwei parallele gerade Linien, die aber auch zusammenfallen können, darstellt, oder gar keine geometrische Bedeutung hat, jenachdem die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichungen reell oder imaginär sind.

**Im Allgemeinen ergiebt sich hieraus das folgende Resultat:**

**Wenn $c$ nicht verschwindet und**

$$c^2 - ab = 0$$

**ist, so stellt die Gleichung**

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + \mathfrak{f} = 0,$$

**in welcher wir, wie es verstattet ist, $a$ und $b$ als negativ annehmen, eine Parabel dar, wenn nicht**

$$dA + eB = 0$$

**ist. Wenn aber**

$$dA + eB = 0$$

**ist, so stellt die obige Gleichung zwei parallele gerade Linien, die auch zusammenfallen können, dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung, jenachdem die Wurzeln der quadratischen Gleichungen**

$$(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 - \frac{2d}{\sqrt{-a}}(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b}) - \mathfrak{f} = 0,$$

$$(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 \pm \frac{2e}{\sqrt{-b}}(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b}) - \mathfrak{f} = 0;$$

**in denen man die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist, reell oder imaginär sind.**

### III. $c^2 - ab < 0, \quad n < 1.$

**In diesem Falle ist es wieder verstattet, in den Gleichungen 31)**

$$d = 0, \quad e = 0, \quad \mathfrak{f} = \omega$$

**zu setzen, wodurch dieselben die folgende Gestalt erhalten:**

$$36) \ldots \left\{ \begin{aligned} n^2AC + (A^2 + B^2)X &= 0, \\ n^2BC + (A^2 + B^2)Y &= 0, \\ nC^2 - (A^2 + B^2)(X^2 + Y^2) &= \omega; \end{aligned} \right.$$

**und ganz wie in I. erhalten wir aus diesen Gleichungen:**

$$37) \quad C = \pm\sqrt{\frac{\omega}{n^2(1-n^2)}}, \quad X = -\frac{n^2AC}{A^2+B^2}, \quad Y = -\frac{n^2BC}{A^2+B^2}.$$

Sollen diese Formeln für $C, X, Y$ reelle Werthe liefern, so muss $\omega$ positiv sein, wobei wohl kaum noch besonders erinnert zu werden braucht, dass in diesem Falle $a$ und $b$ als negativ vorausgesetzt werden. Dass nicht

$$A^2 + B^2 = 0$$

sein, und also $X$ und $Y$ nicht unendlich werden können, wird ganz wie in I. bewiesen.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wenn $\omega$ negativ oder $\omega < 0$ ist. Weil die gegebene Gleichung

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + \omega = 0$$

ist, so ist

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = -\omega.$$

Hieraus erhellet zuvörderst, dass keine der beiden Grössen $x, y$ verschwinden kann; denn verschwände etwa $y$, so wäre

$$ax^2 = -\omega,$$

folglich $ax^2$ positiv, was ungereimt ist, weil $a$ negativ ist. Ferner erhellet aus der obigen Gleichung, dass

$$ax^2 + by^2 + 2cxy > 0,$$

folglich

$$2cxy > -ax^2 - by^2$$

ist. Weil $-ax^2 - by^2$ eine positive Grösse ist, so ist auch $2cxy$ eine positive Grösse, und $c$ und $xy$ haben daher immer gleiche Vorzeichen, weshalb wir

$$2(\pm c)(\pm xy) > -ax^2 - by^2$$

setzen, und die oberen oder unteren Zeichen nehmen wollen, jenachdem das nicht verschwindende $c$ positiv oder negativ ist, wo dann $\pm c$ und $\pm xy$ stets positive Grössen sind. Weil nun $c^2 - ab < 0$ ist, so ist $ab > c^2$, also $\sqrt{ab} > \pm c$, und folglich nach dem Obigen $\pm 2xy\sqrt{ab} > -ax^2 - by^2$ oder

$$-ax^2 - by^2 \mp 2xy\sqrt{ab} < 0,$$

oder

$$(x\sqrt{-a})^2 + (y\sqrt{-b})^2 \mp 2x\sqrt{-a}\,.\,y\sqrt{-b} < 0,$$

also

$$(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 < 0,$$

was ungereimt ist, insofern $x$ und $y$ reelle Grössen sein sollen. Also hat im vorliegenden Falle die zu discutirende Gleichung gar keine geometrische Bedeutung.

Für $\omega = 0$ ist

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 0$$

oder

$$2cxy = -ax^2 - by^2,$$

oder wie vorher

$$2(\pm c)(\pm xy) = -ax^2 - by^2.$$

Nun ist aber $\sqrt{ab} > \pm c$, also

$$\pm 2xy\sqrt{ab} = -ax^2 - by^2$$

oder

$$\pm 2xy\sqrt{ab} > -ax^2 - by^2,$$

also

$$-ax^2 - by^2 \mp 2xy\sqrt{ab} = 0$$

oder

$$-ax^2 - by^2 \mp 2xy\sqrt{ab} < 0,$$

also

$$(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 < 0,$$

jenachdem eine oder keine der beiden Grössen $x$, $y$ verschwindet. Da das Letztere ungereimt ist, so bleibt bloss die Gleichung

$$(x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b})^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x\sqrt{-a} \mp y\sqrt{-b} = 0,$$

welche der Voraussetzung entspricht, dass eine der beiden Grössen $x$, $y$ verschwindet. Dann verschwindet aber vermöge dieser Gleichung auch die andere der beiden Grössen $x$, $y$, da keine der beiden Grössen $a$, $b$ verschwindet, weil $ab > c^2$ ist, und $c$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 0,$$

unter Voraussetzung reeller Werthe von $x$ und $y$, nur erfüllt wird, wenn $x$ und $y$ beide verschwinden, so dass also in diesem Falle die zu discutirende Gleichung bloss den Punkt $(pq)$ darstellt.

Ueberlegt man nun, dass, weil

$$c^2 - ab < 0$$

ist, nach 30), wenn

$$\omega > 0,\quad \omega < 0,\quad \omega = 0$$

ist, respective

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde < 0,$$
$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde > 0,$$
$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde = 0$$

ist, so ergiebt sich ganz unzweideutig im Allgemeinen das folgende Resultat.

Wenn $c$ nicht verschwindet und

$$c^2 - ab < 0$$

ist, so stellt die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0,$$

in welcher wir, wie es verstattet ist, $a$ und $b$ als negativ annehmen, eine Ellipse dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung, oder stellt nur einen Punkt dar, jenachdem

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde < 0,$$

oder

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde > 0,$$

oder

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde = 0$$

ist.

## §. 48.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wenn $c = 0$ ist, wobei wir wieder die drei Fälle

$$c^2 - ab > 0,\quad c^2 - ab = 0,\quad c^2 - ab < 0;$$

nämlich die drei Fälle

$$-ab > 0,\quad -ab = 0,\quad -ab < 0$$

oder

$$ab < 0,\quad ab = 0,\quad ab > 0$$

unterscheiden.

Die drei Gleichungen 6) sind in diesem Falle:

$$38) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} (n^2-1)A^2 - B^2 = a, \\ (n^2-1)B^2 - A^2 = b, \\ \qquad\qquad n^2AB = 0. \end{cases}$$

I. $ab < 0$.

In diesem Falle haben $a$ und $b$ ungleiche Vorzeichen und keine dieser beiden Grössen kann verschwinden.

Wenn $a$ negativ und $b$ positiv ist, so setze man

$$A = 0,$$

wodurch die dritte der Gleichungen 38) erfüllt wird, und die beiden ersten Gleichungen werden:

$$-B^2 = a, \quad (n^2-1)B^2 = b;$$

woraus sich

$$B^2 = -a, \quad n^2 = 1 + \frac{b}{B^2} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a};$$

also:

$$39) \ldots n = \sqrt{\frac{a-b}{a}}, \quad A = 0, \quad B = \pm\sqrt{-a}$$

ergiebt, und offenbar $n > 1$ ist. Auch ist

$$A^2 + B^2 = -a$$

und verschwindet also nicht.

Wenn $a$ positiv und $b$ negativ ist, so setze man

$$B = 0,$$

wodurch die dritte der Gleichungen 38) erfüllt wird, und die beiden ersten Gleichungen werden:

$$-A^2 = b, \quad (n^2-1)A^2 = a;$$

woraus sich

$$A^2 = -b, \quad n^2 = 1 + \frac{a}{A^2} = 1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b},$$

also:

$$40) \ldots n = \sqrt{\frac{b-a}{b}}, \quad A = \pm\sqrt{-b}, \quad B = 0$$

ergiebt. Auch ist

$$A^2 + B^2 = -b$$

und verschwindet also nicht.

Ferner ergiebt sich nun ganz auf dieselbe Art wie in §. 47. I. ohne eine Beziehung der folgenden Zeichen auf die vorhergehenden:

$$41)\quad C=\pm\sqrt{\frac{-\omega}{n^2(n^2-1)}},\quad X=-\frac{n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=-\frac{n^2BC}{A^2+B^2};$$

welche Formeln, insofern $\omega$ negativ ist, was man immer anzunehmen sich berechtigt halten darf, für $C$, $X$, $Y$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe liefern. Ueber den Fall $\omega=0$ ist Dasselbe zu bemerken wie in §. 47. I.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Wenn $c$ verschwindet und

$$ab<0$$

ist, so stellt die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+\mathrm{f}=0$$

eine Hyperbel oder ein System zweier sich schneidenden geraden Linien dar, jenachdem

$$ae^2+bd^2+\mathrm{f}c^2-ab\mathrm{f}-2cde \gtrless 0$$

oder

$$ae^2+bd^2+\mathrm{f}c^2-ab\mathrm{f}-2cde=0$$

ist.

II. $ab=0$.

Die Grössen $a$ und $b$ verschwinden entweder beide oder es verschwindet nur eine derselben.

Wenn $a=0$, $b=0$ ist, so ist die zu discutirende Gleichung

$$dx+ey+\mathrm{f}=0$$

und stellt also eine gerade Linie dar.

Wenn $a=0$ und nicht $b=0$ ist, so setze man

$$n=1,\quad B=0.$$

Dann sind die erste und dritte der Gleichungen 38) erfüllt, und die zweite Gleichung wird

$$A^2=-b,\text{ folglich } A=\pm\sqrt{-b}.$$

Nimmt man also, was offenbar verstattet ist, $b$ als negativ an, so liefern die Formeln

$$42)\quad \ldots\ldots\ n=1,\quad A=\pm\sqrt{-b},\quad B=0.$$

für $n$, $A$, $B$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe.

Wenn nicht $a=0$, aber $b=0$ ist, so setze man

$$n=1,\quad A=0.$$

Dann sind die zweite und dritte der Gleichungen 38) erfüllt, und die erste Gleichung wird

$$B^2=-a,\ \text{folglich}\ B=\pm\sqrt{-a}.$$

Nimmt man also, was offenbar verstattet ist, $a$ als negativ an, so liefern die Formeln

$$43)\quad \ldots\ldots\quad n=1,\quad A=0,\quad B=\pm\sqrt{-a}$$

für $n$, $A$, $B$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe.

Dass in keinem dieser beiden Fälle $A^2+B^2$ verschwindet, ist klar.

Ferner erhält man ganz wie in §. 47. II.

$$44)\quad C=\frac{d^2+e^2+f(A^2+B^2)}{2(dA+eB)},\quad X=\frac{d-AC}{A^2+B^2},\quad Y=\frac{e-BC}{A^2+B^2};$$

und diese Formeln liefern, wenn nicht

$$dA+eB=0$$

ist, für $C$, $X$, $Y$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe.

Den Fall, wenn

$$dA+eB=0$$

ist, müssen wir nun besonders betrachten.

Wenn $a=0$ und nicht $b=0$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$A=\pm\sqrt{-b},\quad B=0;$$

und wegen der Gleichung

$$dA+eB=0$$

ist folglich $d=0$; also ist die zu discutirende Gleichung:

$$by^2+2ey+f=0,$$

und stellt daher zwei der Axe der $x$ parallele gerade Linien, die auch zusammenfallen können, dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung, jenachdem die Wurzeln der vorstehenden Gleichung reell oder imaginär sind.

Wenn nicht $a=0$, aber $b=0$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$A=0,\quad B=\pm\sqrt{-a};$$

und wegen der Gleichung

$$dA+eB=0$$

ist folglich $e=0$; also ist die zu discutirende Gleichung:

$$ax^2+2dx+f=0,$$

und stellt daher zwei der Axe der $y$ parallele gerade Linien, die auch zusammenfallen können, dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung, jenachdem die Wurzeln der vorstehenden Gleichung reell oder imaginär sind.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn $c$ verschwindet und

$$ab=0$$

ist, so stellt, wenn $a$ und $b$ zugleich verschwinden, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

eine gerade Linie dar. Wenn aber $a$ und $b$ nicht zugleich verschwinden, so stellt diese Gleichung, in welcher wir, wie es verstattet ist, $a$ und $b$ als negativ annehmen, eine Parabel dar, wenn nicht

$$dA+eB=0$$

ist; wenn dagegen

$$dA+eB=0$$

ist, so stellt die obige Gleichung zwei der einen der beiden Coordinatenaxen parallele gerade Linien, die auch zusammenfallen können, dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung.

III. $ab>0$.

In diesem Falle haben $a$ und $b$ gleiche Vorzeichen, und keine dieser beiden Grössen verschwindet. Offenbar ist es verstattet, dieselben beide als negativ anzunehmen.

Setzt man nun

$$A=0,$$

so ist die dritte der Gleichungen 38) erfüllt, und die beiden ersten Gleichungen werden:

$$-B^2=a,\quad (\varkappa^2-1)B^2=b;$$

woraus sich

$$B^2=-a,\quad n^2=1+\frac{b}{B^2}=1-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a};$$

also:

$$45)\ \ldots\quad n=\sqrt{\frac{a-b}{a}},\quad A=0,\quad B=\pm\sqrt{-a}$$

ergiebt.

Setzt man

$$B=0,$$

so ist die dritte der Gleichungen 38) erfüllt, und die beiden ersten Gleichungen werden:

$$-A^2=b,\quad (n^2-1)A^2=a;$$

woraus sich

$$A^2=-b,\quad n^2=1+\frac{a}{A^2}=1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b},$$

also:

$$46)\ \ldots\quad n=\sqrt{\frac{b-a}{b}},\quad A=\pm\sqrt{-b},\quad B=0$$

ergiebt.

Weil $a$ und $b$ gleiche Vorzeichen haben, so haben

$$\frac{a-b}{a}\ \text{und}\ \frac{b-a}{b},$$

insofern diese Grössen nicht beide verschwinden, welchen Fall wir für's Erste bei Seite setzen wollen, ungleiche Vorzeichen, und die eine derselben ist also jederzeit positiv, weshalb also immer entweder die Formeln 45) oder die Formeln 46) für $n$, $A$, $B$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe liefern. Dass immer $n<1$ ist und $A^2+B^2$ nicht verschwindet, erhellet aus den obigen Formeln von selbst.

Ferner erhält man nun ganz wie in §. 47. III., ohne Beziehung der folgenden Zeichen auf die vorhergehenden:

$$47)\quad C=\pm\sqrt{\frac{\omega}{n^2(1-n^2)}},\quad X=-\frac{n^2AC}{A^2+B^2},\quad Y=-\frac{n^2BC}{A^2+B^2};$$

welche Formeln, wenn $\omega>0$ ist, für $C$, $X$, $Y$ endliche reelle völlig bestimmte Werthe liefern.

Die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+\omega=0$$

wird im vorliegenden Falle, wo $c=0$ ist:

$$ax^2+by^2+\omega=0,$$

und lässt sich, wenn $\omega>0$ ist, offenbar auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\omega}{-a}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\omega}{-b}}}\right)^2=1,$$

stellt also in dem Falle, wenn $a=b$ ist, einen Kreis dar.

Wenn $\omega<0$ ist, so hat die Gleichung

$$ax^2+by^2+\omega=0$$

oder

$$-ax^2-by^2=\omega,$$

wo die Grösse auf der linken Seite positiv ist, die Grösse auf der rechten Seite negativ ist und nicht verschwindet, offenbar gar keine geometrische Bedeutung.

Wenn $\omega=0$ ist, so geht die Gleichung

$$ax^2+by^2+\omega=0$$

in die Gleichung

$$ax^2+by^2=0$$

über, und wird daher, weil die nicht verschwindenden Grössen $a$, $b$ gleiche Vorzeichen haben, nur durch die reellen Werthe $x=0$, $y=0$ erfüllt, stellt also bloss den Punkt $(pq)$ dar.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn $c$ verschwindet und

$$ab>0$$

ist, so stellt die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0,$$

in welcher wir, wie es verstattet ist, $a$ und $b$ als negativ annehmen, eine Ellipse oder einen Kreis dar, oder hat gar keine geometrische Bedeutung, oder stellt nur einen Punkt dar, jenachdem

$$ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde<0,$$

oder

$$ae^2+bd^2+fc^2-abf-2cde>0,$$

oder

$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde = 0$$

ist.

§. 49.

Aus allen im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen ergiebt sich im Allgemeinen, dass jede Gleichung

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen bloss entweder einen Kegelschnitt mit Einschluss des Kreises, oder ein System zweier sich schneidenden oder einander parallelen geraden Linien, oder nur eine gerade Linie, oder nur einen Punkt darstellen, oder auch gar keine geometrische Bedeutung haben kann.

Zugleich liefert das Vorhergehende die Formeln, welche erforderlich sind, um für jeden durch die obige Gleichung dargestellten Kegelschnitt bloss aus deren Coefficienten die Charakteristik, die Directrixen und die Brennpunkte mit möglichster Leichtigkeit bestimmen zu können.

## XII.

### Polar-Gleichung der Kegelschnitte.

§. 50.

Wir wollen den Brennpunkt $(fg)$ als Pol annehmen. Ist nun $(xy)$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, so soll $r$ den von dem Brennpunkte nach diesem Punkte gezogenen Vector bezeichnen; und denken wir uns dann durch den Brennpunkt ein dem primitiven Coordinatensysteme paralleles neues oder secundäres Coordinatensystem gelegt, so soll $\varphi$ den von dem Vector $r$ mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses neuen Coordinatensystems eingeschlossenen Winkel bezeichnen, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe des neuen Coordinatensystems an durch dessen Coordinatenwinkel hindurch oder nach dem positiven Theile der zweiten neuen Coordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählen. Dies vorausgesetzt, ist allgemein:

1) . . . . $x = f + r\cos\varphi, \quad y = g + r\sin\varphi;$

folglich

2) . . . . . . $r = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2}$.

Die Gleichung des Kegelschnitts ist nun nach §. 5.:

3) $n(Ax + By + C) = \pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}}$,

wo man für die Parabel, für die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse

$$Af + Bg + C$$

positiv oder negativ ist, für den zweiten Zweig der Hyperbel dagegen das untere oder obere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$Af + Bg + C$$

positiv oder negativ ist. Führt man in diese Gleichung für $x$, $y$ und $r$ ihre Werthe aus 1) und 2) ein, so erhält man, immer mit derselben Bestimmung wegen der Zeichen wie vorher:

$$n\{Af + Bg + C + r(A\cos\varphi + B\sin\varphi)\} = \pm r\sqrt{A^2+B^2},$$

also:

4)

$$n(Af + Bg + C) = \pm r\{\sqrt{A^2+B^2} \mp n(A\cos\varphi + B\sin\varphi)\}$$

oder:

5) . . . $\frac{1}{r} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{n(Af+Bg+C)} - \frac{A\cos\varphi + B\sin\varphi}{Af+Bg+C}$.

Nach IV. 1) ist die Gleichung der Axe des Kegelschnitts:

6) . . $B(x-f) - A(y-g) = 0$ oder $y-g = \frac{B}{A}(x-f)$.

Bezeichnen wir also den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der ersten Axe des durch den Brennpunkt gelegten secundären Systems liegende Theil der Axe des Kegelschnitts mit dem positiven Theile dieser ersten Axe des secundären Coordinatensystems einschliesst, durch $\omega$, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

7) . . . . $\frac{B}{A} = \tan g\,\omega$ oder $A\sin\omega = B\cos\omega$.

Also ist

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = \frac{A(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi)}{\cos\omega} = \frac{A\cos(\omega-\varphi)}{\cos\omega}$$

$$= \frac{B(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi)}{\sin\omega} = \frac{B\cos(\omega-\varphi)}{\sin\omega},$$

und folglich nach 5) die Gleichung des Kegelschnitts:

$$8)\quad \frac{1}{r} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{n(Af+Bg+C)} - \frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\omega}\cos(\omega-\varphi)$$

oder

$$9)\quad \frac{1}{r} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{n(Af+Bg+C)} - \frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\omega}\cos(\omega-\varphi).$$

Setzen wir also der Kürze wegen:

$$10)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \pm\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{n(Af+Bg+C)}, \\ \mathfrak{B} = -\dfrac{A}{(Af+Bg+C)\cos\omega} = -\dfrac{B}{(Af+Bg+C)\sin\omega}; \end{cases}$$

wo die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind; so ist die Gleichung des Kegelschnitts:

$$11)\quad \ldots\ldots\quad \frac{1}{r} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos(\omega-\varphi)$$

oder:

$$12)\quad \ldots\ldots\quad r = \{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos(\omega-\varphi)\}^{-1}.$$

Die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ müssen wir nun etwas genauer betrachten.

Weil man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{A}$ in 10) für die Parabel, für die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse

$$Af + Bg + C$$

positiv oder negativ ist, dagegen für den zweiten Zweig der Hyperbel das untere oder obere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$Af + Bg + C$$

positiv oder negativ ist, so ist offenbar die Constante $\mathfrak{A}$ für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel stets positiv, für den zweiten Zweig der Hyperbel stets negativ.

Vergleichen wir nun die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ rücksichtlich ihrer absoluten Werthe mit einander, so ist:

$$\mathfrak{A}^2=\frac{A^2+B^2}{n^2(Af+Bg+C)^2},$$

$$\mathfrak{B}^2=\frac{A^2}{(Af+Bg+C)^2\cos\omega^2}=\frac{B^2}{(Af+Bg+C)^2\sin\omega^2};$$

also, weil nach dem Obigen

$$A^2+B^2=A^2(1+\tang\omega^2)=B^2(1+\cot\omega^2)$$

oder

$$A^2+B^2=\frac{A^2}{\cos\omega^2}=\frac{B^2}{\sin\omega^2}$$

ist:

$$13)\quad\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}^2=\dfrac{A^2}{n^2(Af+Bg+C)^2\cos\omega^2}=\dfrac{B^2}{n^2(Af+Bg+C)^2\sin\omega^2},\\[2ex]\mathfrak{B}^2=\dfrac{A^2}{(Af+Bg+C)^2\cos\omega^2}=\dfrac{B^2}{(Af+Bg+C)^2\sin\omega^2};\end{array}\right.$$

folglich:

$$14)\quad\ldots\quad\mathfrak{A}^2=\frac{\mathfrak{B}^2}{n^2}\quad\text{oder}\quad\mathfrak{B}^2=n^2\mathfrak{A}^2.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für

$$n=1,\ n<1,\ n>1$$

respective

$$\mathfrak{A}^2=\mathfrak{B}^2,\quad\mathfrak{A}^2>\mathfrak{B}^2,\quad\mathfrak{A}^2<\mathfrak{B}^2;$$

oder dass für die

Parabel, Ellipse, Hyperbel

respective

val. abs. $\mathfrak{A}$ = val. abs. $\mathfrak{B}$, val. abs. $\mathfrak{A}$ > val. abs. $\mathfrak{B}$,

val. abs. $\mathfrak{A}$ < val. abs. $\mathfrak{B}$

ist.

Man kann der Polar-Gleichung 11) oder 12) noch eine etwas andere Gestalt geben, wodurch die Constante $\mathfrak{B}$, die, im Obigen, wie sich nachher zeigen wird, positiv und negativ sein kann, stets positiv wird.

Zu dem Ende wollen wir den Winkel, welchen der von dem Brennpunkte $(fg)$ nach dem diesem Brennpunkte zunächst liegenden

Scheitel $(f'g')$ hin gehende Theil der Axe des Kegelschnitts mit dem positiven Theile der ersten secundären Coordinatenaxe einschliesst, indem wir diesen Winkel von diesem positiven Theile der ersten secundären Coordinatenaxe an durch den secundären Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° zählen, durch $\bar{\omega}$ bezeichnen, und, indem wir bemerken, dass nach IV. 14*)

$$15) \ldots \left\{ \begin{array}{l} f'-f=-\dfrac{nA(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)}, \\ g'-g=-\dfrac{nB(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)} \end{array} \right.$$

ist, und die Entfernung des dem Brennpunkte $(fg)$ zunächst liegenden Scheitels $(f'g')$ von dem Brennpunkte $(fg)$ durch $\varrho$ bezeichnen, die beiden folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn der Scheitel $(f'g')$ auf der positiven Seite der ersten secundären Coordinatenaxe liegt, so ist $\omega=\bar{\omega}$, und folglich nach 10):

$$16) \quad \mathfrak{B}=-\frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\bar{\omega}}=-\frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\bar{\omega}}.$$

Offenbar ist allgemein

$$f'-f=\varrho\cos\bar{\omega}, \quad g'-g=\varrho\sin\bar{\varphi},$$

und folglich, weil in diesem Falle $\bar{\omega}$ zwischen 0 und 180° liegt, also $\sin\bar{\omega}$ positiv ist, auch $g'-g$ eine positive Grösse, woraus sich nach der zweiten der Formeln 15) ergiebt, dass das Product

$$B(Af+Bg+C),$$

also auch der Quotient

$$\frac{B}{Af+Bg+C}$$

negativ, folglich nach 16), weil $\sin\bar{\omega}$ positiv ist, die Constante $\mathfrak{B}$ positiv ist.

Wenn der Scheitel $(f'g')$ auf der negativen Seite der ersten secundären Coordinatenaxe liegt, so ist offenbar $\omega=\bar{\omega}-180°$, also $\cos\omega=-\cos\bar{\omega}$, $\sin\omega=-\sin\bar{\omega}$ und folglich nach 10):

$$16^*) \ldots \mathfrak{B}=\frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\bar{\omega}}=\frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\bar{\omega}}.$$

Offenbar ist auch in diesem Falle allgemein

$$f'-f=\varrho\cos\overline{\omega},\quad g'-g=\varrho\sin\overline{\omega};$$

und folglich, weil in diesem Falle $\overline{\omega}$ zwischen 180° und 360° liegt, also $\sin\overline{\omega}$ negativ ist, auch $g'-g$ eine negative Grösse, woraus sich nach der zweiten der Formeln 15) ergiebt, dass das Product

$$B(Af+Bg+C),$$

folglich auch der Quotient

$$\frac{B}{Af+Bg+C}$$

positiv, folglich nach 16*), weil $\sin\overline{\omega}$ negativ ist, die Constante $\mathfrak{B}$ negativ ist.

In beiden Fällen ist also offenbar:

$$-\frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\overline{\omega}}=-\frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\overline{\omega}}$$

eine positive Grösse.

Nun ist aber im ersten Falle

$$\cos(\omega-\varphi)=\cos(\overline{\omega}-\varphi),$$

und im zweiten Falle

$$\cos(\omega-\varphi)=\cos(\overline{\omega}-\varphi-180^0)=-\cos(\overline{\omega}-\varphi),$$

also nach dem Obigen offenbar in beiden Fällen

$$\mathfrak{B}\cos(\omega-\varphi)=-\frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\overline{\omega}}\cos(\overline{\omega}-\varphi)$$

$$=-\frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\overline{\omega}}\cos(\overline{\omega}-\varphi),$$

folglich in beiden Fällen die Polar-Gleichung des Kegelschnitts nach 12):

$$17)\quad r=\{\mathfrak{A}-\frac{A}{(Af+Bg+C)\cos\overline{\omega}}\cos(\overline{\omega}-\varphi)\}^{-1}$$

$$=\{\mathfrak{A}-\frac{B}{(Af+Bg+C)\sin\overline{\omega}}\cos(\overline{\omega}-\varphi)\}^{-1};$$

und setzen wir also:

$$18)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \pm \dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{n(Af+Bg+C)}; \\ \mathfrak{B}' = -\dfrac{A}{(Af+Bg+C)\cos\overline{\omega}} = -\dfrac{B}{(Af+Bg+C)\sin\overline{\omega}}; \end{cases}$$

wo für die Parabel, für die Ellipse und für den ersten Zweig der Hyperbel das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem die Grösse

$$Af+Bg+C$$

positiv oder negativ ist, dagegen für den zweiten Zweig der Hyperbel das untere oder obere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grösse

$$Af+Bg+C$$

positiv oder negativ ist; so ist die Polar-Gleichung des Kegelschnitts:

$$19)\quad \ldots\ldots\quad r = \{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'\cos(\overline{\omega}-\varphi)\}^{-1}.$$

Für die Parabel, für die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel ist $\mathfrak{A}$ positiv, für den zweiten Zweig der Hyperbel ist $\mathfrak{A}$ negativ; dagegen ist $\mathfrak{B}'$ immer positiv. Für die Parabel, Ellipse, Hyperbel ist rücksichtlich des absoluten Werths von $\mathfrak{A}$ respective

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}',\quad \mathfrak{A} > \mathfrak{B}',\quad \mathfrak{A} < \mathfrak{B}'.$$

Auch ist nach 14), weil nach dem Vorhergehenden offenbar immer

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}'^2$$

ist:

$$20)\quad \ldots\ldots\quad \mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{B}'^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}'^2 = n^2\mathfrak{A}^2$$

allgemein für alle drei Kegelschnitte.

## XIII.

### Gleichungen der Kegelschnitte, als Curven im Raume, betrachtet.

#### §. 51.

Wir können nun auch leicht die Gleichungen der Kegelschnitte aufstellen, wenn man dieselben als beliebig im Raume liegende

14*

Curven betrachtet, welche Gleichungen für manche Anwendungen, die sich von der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte machen lassen, von Nutzen sein können, und daher jetzt noch entwickelt werden sollen.

Zu dem Ende wollen wir in Bezug auf ein beliebiges dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem der $xyz$ die Coordinaten des Brennpunkts des Kegelschnitts durch $f$, $g$, $h$ und die Gleichungen seiner Directrix durch

$$1) \quad \ldots \quad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

bezeichnen, wo $(abc)$ ein beliebiger Punkt ist, durch welchen die Directrix geht, und für dieselbe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ihre bekannte Bedeutung haben.

Da nun der Kegelschnitt ganz in der durch den Brennpunkt und die Directrix bestimmten Ebene liegt, so müssen wir zuerst Gleichung dieser Ebene suchen, welche

$$2) \quad \ldots \quad Ax+By+Cz+D=0$$

sein mag. Da in dieser Ebene die Punkte $(abc)$ und $(fgh)$ liegen, so ist

$$3) \quad \ldots \quad Aa+Bb+Cc+D=0$$

und

$$4) \quad \ldots \quad Af+Bg+Ch+D=0,$$

also

$$5) \quad \ldots \quad A(f-a)+B(g-b)+C(h-c)=0;$$

und die Gleichung der in Rede stehenden Ebene ist

$$6) \quad \ldots \quad A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

oder

$$7) \quad \ldots \quad A(x-f)+B(y-g)+C(z-h)=0.$$

Weil die Directrix ganz in dieser Ebene liegen muss, so folgt aus den Gleichungen 1) und 6) die Gleichung:

$$8) \quad \ldots \quad A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0,$$

und aus den Gleichungen 5) und 8) erhält man, wenn $G$ einen beliebigen Factor bezeichnet, für $A$, $B$, $C$ die folgenden Ausdrücke:

$$9) \quad \ldots \quad \begin{cases} A = G\{(h-c)\cos\beta - (g-b)\cos\gamma\}, \\ B = G\{(f-a)\cos\gamma - (h-c)\cos\alpha\}, \\ C = G\{(g-b)\cos\alpha - (f-a)\cos\beta\}; \end{cases}$$

so dass also die gesuchte Gleichung unserer Ebene

$$10) \quad \ldots \quad \left.\begin{array}{l} \{(h-c)\cos\beta - (g-b)\cos\gamma\}(x-a) \\ +\{(f-a)\cos\gamma - (h-c)\cos\alpha\}(y-b) \\ +\{(g-b)\cos\alpha - (f-a)\cos\beta\}(z-c) \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$11) \quad \ldots \quad \left.\begin{array}{l} \{(h-c)\cos\beta - (g-b)\cos\gamma\}(x-f) \\ +\{(f-a)\cos\gamma - (h-c)\cos\alpha\}(y-g) \\ +\{(g-b)\cos\alpha - (f-a)\cos\beta\}(z-h) \end{array}\right\} = 0$$

ist.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts des von dem beliebigen Punkte $(xyz)$ auf die Directrix gefällten Perpendikels mit der letzteren durch $u$, $v$, $w$; so werden zwischen den Coordinaten $x$, $y$, $z$ und $u$, $v$, $w$ Gleichungen von folgender Form Statt finden:

$$12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x-u}{\cos\theta} = \frac{y-v}{\cos\omega} = \frac{z-w}{\cos\overline{\omega}},$$

wo

$$13) \quad \ldots \quad \cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega} = 0$$

sein muss. Weil der Punkt $(uvw)$ in der Directrix liegt, so ist nach 1):

$$14) \quad \ldots\ldots \quad \frac{u-a}{\cos\alpha} = \frac{v-b}{\cos\beta} = \frac{w-c}{\cos\gamma}.$$

Aus den Gleichungen 12) und 13) folgt:

$$15) \quad \ldots \quad (x-u)\cos\alpha + (y-v)\cos\beta + (z-w)\cos\gamma = 0,$$

also:

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma$$

$$= (u-a)\cos\alpha + (v-b)\cos\beta + (w-c)\cos\gamma,$$

und folglich nach 14), weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, offenbar:

$$16)\begin{cases} u-a=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\alpha, \\ v-b=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\beta, \\ w-c=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\gamma; \end{cases}$$

also:

$$17)\begin{cases} x-u=(x-a)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\alpha, \\ y-v=(y-b)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\beta, \\ z-w=(z-c)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\gamma; \end{cases}$$

woraus sich sogleich

$$18)\quad \ldots\quad (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}^2$$

oder

$$19)\quad \ldots\quad (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$$
$$=(x-a)^2\sin\alpha^2+(y-b)^2\sin\beta^2+(z-c)^2\sin\gamma^2-2(x-a)(y-b)\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2(y-b)(z-c)\cos\beta\cos\gamma$$
$$-2(z-c)(x-a)\cos\gamma\cos\alpha,$$

oder

$$(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$$
$$=\quad (x-a)^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)-2(x-a)(y-b)\cos\alpha\cos\beta$$
$$+(y-b)^2(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)-2(y-b)(z-c)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+(z-c)^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)-2(z-c)(x-a)\cos\gamma\cos\alpha,$$

also, wie sogleich erhellet:

$$20)\quad \ldots\quad (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$$
$$=\{(x-a)\cos\beta-(y-b)\cos\alpha\}^2$$
$$+\{(y-b)\cos\gamma-(z-c)\cos\beta\}^2$$
$$+\{(z-c)\cos\alpha-(x-a)\cos\gamma\}^2$$

ergiebt, durch welche Ausdrücke das Quadrat der Entfernung des Punktes $(xyz)$ von der durch die Gleichung 1) charakterisirten Directrix dargestellt wird.

Ist nun $(xyz)$ ein beliebiger Punkt des ganz in der durch den Brennpunkt und die Directrix bestimmten Ebene liegenden Kegelschnitts mit der Charakteristik $n$, so sind die Gleichungen dieses Kegelschnitts nach der in I. gegebenen allgemeinen Erklärung dieser Curven:

21)

$$\left.\begin{array}{l} \{(h-c)\cos\beta-(g-b)\cos\gamma\}(x-a) \\ +\{(f-a)\cos\gamma-(h-c)\cos\alpha\}(y-b) \\ +\{(g-b)\cos\alpha-(f-a)\cos\beta\}(z-c) \end{array}\right\}=0,$$

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2=n^2\left\{\begin{array}{l} \{(x-a)\cos\beta-(y-b)\cos\alpha\}^2 \\ +\{(y-b)\cos\gamma-(z-c)\cos\beta\}^2 \\ +\{(z-c)\cos\alpha-(x-a)\cos\gamma\}^2. \end{array}\right.$$

Statt der ersten dieser beiden Gleichungen kann man auch die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \{(h-c)\cos\beta-(g-b)\cos\gamma\}(x-f) \\ +\{(f-a)\cos\gamma-(h-c)\cos\alpha\}(y-g) \\ +\{(g-b)\cos\alpha-(f-a)\cos\beta\}(z-h) \end{array}\right\}=0$$

und statt der zweiten Gleichung entweder die Gleichung

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-[(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma]^2\}$$

oder die Gleichung

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\left\{\begin{array}{r} (x-a)^2\sin\alpha^2+(y-b)^2\sin\beta^2+(z-c)^2\sin\gamma^2-2(x-a)(y-b)\cos\alpha\cos\beta \\ -2(y-b)(z-c)\cos\beta\cos\gamma \\ -2(z-c)(x-a)\cos\gamma\cos\alpha \end{array}\right\}$$

setzen.

Es lassen sich hieran noch andere Fragen knüpfen, deren weitere Verfolgung aber jetzt nicht im Zwecke dieser Abhandlung liegt.

## Schluss.

Wenn man die Theorie der Kegelschnitte aus dem in dieser Abhandlung fest gehaltenen Gesichtspunkte behandelt, so erhält dieselbe, wie diese Abhandlung zu zeigen geeignet sein wird, eine ganz neue Gestalt, und man gelangt auf diesem Wege zu einer grossen Reihe neuer merkwürdiger und eleganter Ausdrücke für die verschiedenen, bei den Kegelschnitten vorkommenden wesentlichen Elemente; auch wird mittelst der Charakteristik zwischen den drei Arten der Kegelschnitte unmittelbar auf sehr einfache Weise unterschieden, was für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist. Vorzüglich erfolgreich zeigt sich aber die hier entwickelte neue Methode bei der Auflösung aller solchen Aufgaben, wo es auf die Bestimmung von Kegelschnitten ankommt, welche gewissen gegebenen Bedingungen entsprechen sollen, wie dergleichen Aufgaben bekanntlich besonders häufig auch in der Astronomie vorkommen. Dies noch zu zeigen, war in der vorliegenden Abhandlung nicht wohl möglich, weil dieselbe dadurch zu sehr angewachsen sein würde.

# XIV.

## Schreiben eines Ungenannten, des Herrn L. D., an den Herausgeber.

---

Gestatten Sie einem Leser des Archivs, Ihnen für dasselbe einige Notizen mitzutheilen, die sich auf mehrere in dem letzten Hefte *) der Zeitschrift befindliche Aufsätze beziehen.

### 1. Zur Theorie der stereographischen Projection.

(Vergl. den Aufsatz von Herrn Prof. Heiss. Thl. XXX. S. 354.)

Der Unterzeichnete erinnert sich eines sehr einfachen Beweises des Satzes, dass zwei sphärische Curven sich unter demselben Winkel schneiden, als ihre stereographischen Projectionen; der Erfinder des Beweises ist — wenn das Gedächtniss nicht täuscht — entweder der französische Mathematiker Durrande, der in den Annalen von Gergonne sehr bemerkenswerthe Arbeiten geliefert hat, oder der belgische Mathematiker Dandelin. Der Beweis stützte sich auf das Lemma: „Die Winkel, welche zwei sich schneidende Kugelkreise in ihren beiden Durchschnittspunkten bilden, sind einander gleich." Der Beweis dieses Hülfssatzes bietet keine Schwierigkeiten dar und soll übergangen werden.

Es sei nun $O$ der Ort des Auges, $A_1$ die Projectionsebene, $A$ die Tangentialebene der Kugel in $O$, also $A$ und $A_1$ einander parallel, ferner $t$ und $s$ zwei Tangenten der Kugel im Punkte $O_1$. Legt man durch $O$ und $t$ eine Ebene $(O, t)$, welche $A$ in $\tau$, $A_1$ in $\tau_1$ trifft, ferner durch $O$ und $s$ eine Ebene, welche $A$ in $\sigma$, $A_1$ in $\sigma_1$ trifft, so sind $\tau$ und $\tau_1$ parallel, ebenso $\sigma$ und $\sigma_1$. Die beiden Ebenen $(O, t)$, $(O, s)$ bestimmen zwei Kugelkreise, die sich in $O$ und $O_1$ schneiden; ihre Tangenten in $O$ sind $\tau$ und $\sigma$, in $O_1$ die Linien $t$ und $s$, also ist nach dem Hülfssatze der Win-

---

*) Nämlich Thl. XXX. Heft 3.

kel $(t, s)$ gleich dem Winkel $(\tau, \sigma)$, oder dem Winkel $(\tau_1, \sigma_1)$, dessen Schenkel denen des Winkels $(\tau, \sigma)$ parallel sind. Hiermit ist der Satz erwiesen, da $\tau_1$, $\sigma_1$ die stereographischen Projectionen von $t$ und $s$ sind.

Wie Schreiber dieser Zeilen sich erinnert, waren dem Beweise einige interessante Folgerungen beigefügt, die noch erwähnt werden sollen.

Projicirt man einen Kugelkreis $C$, die Kanten des Kegels, welcher der Kugel längs $C$ umschrieben ist, und endlich die Spitze dieses Kegels $\gamma$ stereographisch, so wird die Projection von $C$ zuvörderst ein Kegelschnitt $C_1$; da die Tangenten von $C$ mit den Kegelkanten rechte Winkel bilden, so projiciren sich, nach dem eben erwiesenen Satze, diese letzteren als die Normalen von $C_1$, und da diese Normalen sämmtlich durch einen Punkt gehen, die Projection von $\gamma$, so muss der Kegelschnitt $C_1$ ein Kreis sein. Diess Resultat lässt sich nun freilich auch auf andere elementare Weise ableiten, dagegen enthält der hier gewählte Gang zugleich den einfachen Beweis des schönen von Chasles gefundenen Satzes:

> Ist $C$ ein Kugelkreis, $\gamma$ die Spitze des der Kugel längs $C$ umschriebenen Kegels und $C_1$ die stereographische Projection von $C$, so ist die stereographische Projection von $\gamma$ der Mittelpunkt des Kreises $C_1$.

Andere Beweise des von Herrn Prof. Heiss behandelten Satzes finden sich in Hachette: „Correspondance sur l'école polytechnique."

## 2. Zur Theorie des Krümmungskreises.

(Vergl. den Aufsatz des Herrn Herausgebers, Thl. XXX. S. 296.)

Der Herr Herausgeber wird gewiss durch die Verbreitung des Lamarle'schen Aufsatzes sich den Dank der Leser des Archivs verdienen. Es möge jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass die Bestimmung der Krümmungsradien ebener Kurven in neuester Zeit öfters der Gegenstand interessanter Untersuchungen gewesen ist. (Man vergl. z. B. einen Aufsatz von Chasles in Liouville Tom. X.). Was aber speciell den vom Herrn Herausgeber bewiesenen Satz über den Krümmungskreis der Kegelschnitte anbetrifft, so ist derselbe nicht neu; Schreiber dieser Zeilen vermuthet, dass er schon in den geometrischen Schriften aus dem vorigen Jahrhunderte vorkommt. Ohne literarische Hülfs-

mittel sieht er sich für den Augenblick genöthigt, auf kein älteres Werk zurückzugehen, als auf **Schellbach's** „Kegelschnitte" (**Berlin** 1843), wo die in Rede stehende Construction Seite 82. §. 100. erwähnt und bewiesen ist.

### 3. Fermat'scher Satz.

(Vergl. Archiv Thl. XXX. S. 357.)

Der an der eben erwähnten Stelle gegebene Beweis des **Fermat'schen** Satzes ist nicht von **Cauchy**, sondern von **Euler** (Comm. Acad. Petrop. T. VIII.). **Gauss** resümirt ihn folgendermaassen (**Disquis. arithm.** pag. 46.):

Innititur ista (sc. demonstratio) evolutioni potestatis $(a+1)^p$, ubi ex coefficientium forma facillime deducitur $(a+1)^p-a^p-1$ semper per $p$ fore divisibilem *), adeoque $(a+1)^p-(a+1)$ per $p$ divisibilem fore, quando $a^p-a$ per $p$ sit divisibilis. Jam quia $1^p-1$ semper per $p$ divisibilis est, etiam $2^p-2$ semper erit, hinc etiam $3^p-3$ etc. generaliterque $a^p-a$. Quodsi itaque $p$ ipsum $a$ non metitur, etiam $a^{p-1}-1$ per $p$ divisibilis erit. Haec sufficient ad methodi indolem declarandam.

Indem ich Sie ersuche, obigen Mittheilungen einen Platz im Archive gewähren zu wollen, unterzeichne ich mich ergebenst.

Im Mai 1858. L. D.,
ein Leser des Archivs.

---

### Nachschrift des Herausgebers.

Indem ich Herrn L. D. recht sehr für die obigen Mittheilungen danke, bemerke ich Folgendes:

Ad 1. Beweise des fraglichen Satzes giebt es mehrere, und ich könnte in dieser Beziehung auf eine Menge von Schriften verweisen. Erinnern will ich bei dieser Gelegenheit nur, — damit die verdienstliche Schrift nie in Vergessenheit komme, — an die sehr schöne „**Geometrische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projection von Georg Simon Klügel.** Halle 1788", worin sich auch das Historische in ziemlicher Vollständigkeit findet. Ausserdem ist es mir wohl

---

*) $p$ bedeutet eine Primzahl, die in $a$ nicht aufgeht. Es ist hier nicht die Absicht, die von **Gauss** gegebene Modification des Beweises vermittelst des polynomischen Satzes ausführlich anzugeben.

erlaubt, auf meine eigene in den Astronomischen Nachrichten. Band XL. (1855). No. 955. S. 297. erschienene Abhandlung: „Ueber die stereographische Projection eines Ellipsoids, von Prof. Dr. Grunert in Greifswald" bei dieser Gelegenheit zu verweisen, in welcher ich bewiesen habe, dass die Eigenschaft der stereographischen Projection, dass die Projectionen aller ebenen Schnitte der Kugelfläche, wie die Schnitte selbst, Kreise sind, auch für das Rotations-Ellipsoid gilt, wenn man das Auge in den einen Endpunkt der Drehungsaxe versetzt und die Projections-Ebene im Mittelpunkte des Ellipsoids senkrecht gegen die Drehungsaxe errichtet. Ausserdem habe ich aber in dieser Abhandlung auch einen neuen, nach meiner Meinung sehr merkwürdigen Ausdruck für den Cosinus des Winkels gegeben, unter welchem die Projectionen zweier einem und demselben Punkte der Oberfläche des Ellipsoids entsprechenden Berührenden desselben gegen einander geneigt sind, woraus der bekannte entsprechende Satz für die Kugel auf der Stelle folgt, wenn man die Excentricität des Ellipsoids verschwinden lässt.

Ad 2. Für diese Mittheilung danke ich Herrn L. D. ganz besonders, indem es mir nur zu ganz besonderer Freude gereichen kann, wenn auf diese Weise das wohl begründete Anrecht eines so verdienten und scharfsinnigen Mathematikers, wie Herr Professor Schellbach in Berlin ist, auf die fragliche Construction des Krümmungshalbmessers der Kegelschnitte gewahrt und gesichert wird. Da mir das in 2. angeführte Lehrbuch der Kegelschnitte leider ganz unbekannt geblieben ist, so habe ich diese schöne Construction zuerst aus der, natürlich nicht bloss wegen dieser Construction, sondern vorzüglich wegen ihrer anderen allgemeinen Betrachtungen und neuen Gesichtspunkte sehr bemerkenswerthen Abhandlung Herrn Lamarle's in Brüssel kennen gelernt, und dieselbe in dem Aufsatz Thl. XXX. S. 296. auf eigenthümliche Weise analytisch zu entwickeln und dadurch zugleich auch eine Reihe anderer bemerkenswerther analytischer Ausdrücke zu gewinnen gesucht. Herrn Lamarle's Verdienst liegt, was ich nochmals erinnere, keineswegs in der fraglichen Construction, sondern in seiner neuen allgemeinen Betrachtungsweise der Curven, die man aus seinen in meiner Abhandlung angeführten Aufsätzen mit Vergnügen näher kennen lernen wird, wozu ich schon a. a. O. aufgefordert habe. Die von Herrn Lamarle gegebene Construction stimmt in der That im Wesentlichen auch mit der von Herrn Brix im Archiv Thl. IX. Nr. XXXI. S. 316. gegebenen Construction überein. Ich bemerke aber nochmals, dass in dem Aufsatze Thl. XXX. Nr. XXXII. es vorzüglich auch um die

übrigen dort mitgetheilten eleganten Formeln und Sätze zu thun war, keineswegs bloss um die Construction, welche dem Aufsatze zur Ueberschrift gedient hat. Freilich wird man diese Construction nicht nach Herrn Lamarle benennen dürfen; denn der Erfinder ist gewiss ein schon ziemlich alter.

Ad 3. Herr L. D. hat ganz recht, dass der betreffende Beweis des Fermat'schen Satzes ursprünglich von Euler herrührt; und einen ähnlichen Beweis hat auch Lambert in den Actis erudit. 1769. p. 109. gegeben. Cauchy hat dies a. a. O. nicht bemerkt, und mir war die Bemerkung von Gauss entfallen, als ich die fragliche Notiz für das Archiv niederschrieb, um diesen Beweis für den Elementar-Unterricht zu empfehlen. Der Beweis, welchen Legendre in der Théorie des nombres. Seconde édition. Paris. 1808. p. 166. giebt, ist eigentlich auch ganz derselbe; er verweist an dieser Stelle auf eine Abhandlung von Euler in den Nov. Comm. Petrop. T. I. Die Form, unter welcher ich den Beweis nach Cauchy mitgetheilt habe, scheint mir aber ganz besonders elementar zu sein und sich vorzüglich für den Elementar-Unterricht zu eignen. Aus einer gemeinschaftlichen Quelle habe ich selbst auf eigenthümliche Weise den Satz von Fermat und das Theorem von Wilson abgeleitet in einer in Crelle's Journal. Thl. VIII. sich findenden Abhandlung.

G.

---

$$X = x^n + \ldots.,\quad X_1 = nx^{n-1} + \ldots.,\quad X_2 = \{(n-1)a^2 - 2nb\}x^{n-2} + \ldots.,$$

$$X_3 = A_3 x^{n-3} + \ldots.,\quad X_4 = A_4 x^{n-4} + \ldots.,\quad \text{u. s. w.}$$

$$X_{n-2} = A_{n-2}x^2 + \ldots.,\quad X_{n-1} = A_{n-1}x + B,\quad X_n = A_n.$$

Nach dem Sturm'schen Satze substituirt man in den $n+1$ Funktionen $X$, $X_1$, $X_2$,...., $X_n$ für $x$ zuerst $-\infty$ und dann $+\infty$; wie viele Zeichenwechsel die zweite Substitution weniger giebt, als die erste, so viele reelle Wurzeln hat die Gleichung $X=0$.

Es sei nun $(n-1)a^2 - 2nb < 0$, d. h. negativ, so erhalten wir für die Reihe der Zeichen bei den obigen Substitutionen folgendes von selbst verständliche Schema:

1) Für ein ungerades $n$.

| | $X$, | $X_1$, | $X_2$, | $X_3$, | $X_4$, ...., $X_{n-2}$, | $X_{n-1}$, | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $x=-\infty$ | $-$ | $+$ | $+$ | $A_3$, | $-A_4$, ...., $A_{n-2}$, | $-A_{n-1}$, | $A_n$ |
| (2) $x=+\infty$ | $+$ | $+$ | $-$ | $A_3$, | $A_4$, ...., $A_{n-2}$, | $A_{n-1}$, | $A_n$ |

2) Für ein gerades $n$.

| | $X$, | $X_1$, | $X_2$, | $X_3$, | $X_4$, ...., $X_{n-2}$, | $X_{n-1}$, | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $x=-\infty$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-A_3$, | $+A_4$, ...., $A_{n-2}$, | $-A_{n-1}$, | $A_n$ |
| (2) $x=+\infty$ | $+$ | $+$ | $-$ | $A_3$, | $A_4$, ...., $A_{n-2}$, | $A_{n-1}$, | $A_n$ |

Vergleichen wir nun die Zeichenreihe (1) mit (2), so zeigen sowohl bei geradem, als bei ungeradem $n$ die ersten drei Funktionen $X$, $X_1$ und $X_2$ in beiden Zeichenreihen einen Zeichenwechsel. Wenn also bei dem Uebergange von $x=-\infty$ zu $x=+\infty$ irgend welche Zeichenwechsel verloren gehen sollen, so kann dies bloss in den Funktionen $X_2$, $X_3$, $X_4$, ...., $X_{n-1}$, $X_n$ geschehen. Unter den $n-1$ Funktionen $X_2$, $X_3$, ...., $X_n$ können aber überhaupt höchstens $n-2$ Zeichenwechsel vorkommen und verloren gehen. Folglich kann die Reihe (2) höchstens $n-2$ Zeichenwechsel weniger zeigen, als die Reihe (1). Folglich kann die Gleichung $X=0$ höchstens $n-2$ reelle Wurzeln haben; sie muss also **wenigstens ein Paar imaginäre** Wurzeln haben.

Unser allgemeiner Satz lautet daher:

„Wenn $(n-1)a^2 - 2nb < 0$ ist, so hat die Gleichung $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots. + kx + l = 0$ wenigstens zwei imaginäre Wurzeln."

Für $n=3$ erhält man den Satz des Herrn Professor Grunert.

# XVI.

## Ueber die Ermittelung des wahrscheinlichen Fehlers bei Längenmessungen.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*

am Polytechnikum in Carlsruhe.

---

In der jüngst erschienenen Schrift: „**Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen**“ giebt **Vorländer** die folgende Regel zur Ermittelung des wahrscheinlichen Fehlers bei Längenmessungen an, wobei er voraussetzt, dass bei einem Polygon von *n* Seiten jede Seite doppelt gemessen worden:

> Die Vergleichung jeder solchen Doppelmessung ergiebt dem Geometer ein, der betreffenden Seitenlänge zugehöriges Fehlermaass. Theilt er diese Differenz zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung mit der Länge der Linie, summirt er alle solche Quotienten, theilt die Summe durch die Anzahl derselben und multiplicirt die (den?) Quotienten mit 0·47694, so erhält er für eine hinreichend grosse Anzahl von Polygonseiten einen auf die Einheit des gebrauchten Längenmaasses sich beziehenden und für sein Ausgleichungsgeschäft brauchbaren Werth des wahrscheinlichen Einheitsfehlers seiner Längenmessungen.

Diese Regel scheint mir **falsch** zu sein, wie aus der nachfolgenden Darstellung hervorgehen wird, bei der ich je auf meine „**Ausgleichung der Beobachtungs-Fehler**“ (**Braunschweig** 1857), beziehungsweise auch auf meine betreffende **Abhandlung** in **Thl. XVIII. S. 149.** des **Archivs** verweise.

Sei $\lambda$ die Länge der Messruthe oder Messkette, mit der alle Polygonseiten gemessen wurden; $r$ der wahrscheinliche Fehler bei einer einzelnen Anlegung derselben; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die (ganzen) Zahlen, die anzeigen, wie viele Male die Messruthe anzulegen wäre, um die erste, zweite, ...., $n$te Polygonseite zu messen, so dass also $x_1\lambda, x_2\lambda, \ldots, x_n\lambda$ die wahren Längen derselben sind. Alsdann sind die wahrscheinlichen Fehler, die man bei einer Messung begeht (Seite 48.):

$$r\sqrt{\frac{x_1\lambda}{\lambda}}=r\sqrt{x_1},\quad r\sqrt{\frac{x_2\lambda}{\lambda}}=r\sqrt{x_2},\ldots,r\sqrt{\frac{x_n\lambda}{\lambda}}=r\sqrt{x_n}.$$

Ist demnach 1 das Gewicht einer einmaligen Anlegung (Messung von $\lambda$); $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Gewichte der Messungen der $n$ Polygonseiten, so hat man (S. 23.):

$$\left.\begin{aligned} 1:g_1:g_2:\ldots:g_n &= \frac{1}{r^2}:\frac{1}{r^2x_1}:\frac{1}{r^2x_2}:\ldots:\frac{1}{r^2x_n},\\ g_1=\frac{1}{x_1},\quad g_2 &= \frac{1}{x_2},\ldots,g_n=\frac{1}{x_n}. \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Seien nun ferner $(1)_1$, $(1)_2$ die beiden durch Messung gefundenen Längen der ersten Polygonseite, natürlich in derselben Maasseinheit ausgedrückt, in der $\lambda$ gegeben ist; $(2)_1$, $(2)_2$ die analogen Werthe für die zweite Seite; ....; $(n)_1$, $(n)_2$ die für die $n$te, so hat man (S. 19.):

$$\left.\begin{aligned} x_1\lambda&=(1)_1\\ x_1\lambda&=(1)_2\end{aligned}\right\}\frac{1}{x_1},\quad \left.\begin{aligned} x_2\lambda&=(2)_1\\ x_2\lambda&=(2)_2\end{aligned}\right\}\frac{1}{x_2},\ldots,\quad \left.\begin{aligned} x_n\lambda&=(n)_1\\ x_n\lambda&=(n)_2\end{aligned}\right\}\frac{1}{x_n};\qquad (2)$$

wo die zugeschriebene Zahl $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ je das Gewicht der betreffenden Gleichung ausdrückt. Daraus folgen als wahrscheinlichste Werthe von $x_1\lambda, x_2\lambda, \ldots, x_n\lambda$ (S. 22.):

$$x_1\lambda=\frac{(1)_1+(1)_2}{2},\quad x_2\lambda=\frac{(2)_1+(2)_2}{2},\ldots,x_n\lambda=\frac{(n)_1+(n)_2}{2}.\text{*)}\qquad (3)$$

Die Gesammtzahl der Gleichungen (2) ist $2n$, während $n$ Unbekannte zu ermitteln sind, zwischen denen wir keinerlei Bedingungsgleichung bestehen lassen. Daraus folgt (S. 68.) für den wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit:

---

*) Man hat dabei zu beachten, dass bei der Differentiation die Gewichte als unveränderlich müssen angesehen werden.

$$0\cdot47694\sqrt{2}\sqrt{\left[\left\{\frac{(1)_1+(1)_2}{2}-(1_1)\right\}^2\frac{1}{x_1}+\left\{\frac{(1)_1+(1)_2}{2}-(1)_2\right\}^2\frac{1}{x_1}+\ldots+\left\{\frac{(n_1)+(n)_2}{2}-(n)_1\right\}^2\frac{1}{x_n}+\left\{\frac{(n)_1+(n)_2}{2}-(n)_2\right\}^2\frac{1}{x_n}\right]\frac{1}{2n-n}}$$

$$=0\cdot47694\sqrt{2}\sqrt{\left[\frac{1}{2x_1}((1)_1-(1)_2)^2+\frac{1}{2x_2}((2)_1-(2)_2)^2+\ldots+\frac{1}{2x_n}((n)_1-(n)_2)^2\right]\frac{1}{n}}.$$

Setzt man hier näherungsweise die Werthe von $x_1$, $x_2$, ...., $x_n$, wie sie aus (3) folgen, ein, so erhält man als wahrscheinlichen Fehler der einfachen Anlegung der Messkette, d. h. als Werth von $r$:

$$0\cdot47694\sqrt{\frac{2\lambda}{n}}\sqrt{\left[\frac{((1)_1-(1)_2)^2}{(1)_1+(1)_2}+\frac{((2)_1-(2)_2)^2}{(2)_1+(2)_2}+\ldots+\frac{((n)_1-(n)_2)^2}{(n)_1+(n)_2}\right]}.$$

Bezeichnet man durch $l_1$, $l_2$, ...., $l_n$ die aus (3) gefundenen wahrscheinlichsten Werthe der Polygonseiten; mit $d_1$, $d_2$, ...., $d_n$ die Differenzen zwischen den zwei Messungen jeder einzelnen, so hat man also nahezu:

$$r=0\cdot47694\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\sqrt{\left[\frac{d_1^2}{l_1}+\frac{d_2^2}{l_2}+\ldots+\frac{d_n^2}{l_n}\right]}. \qquad (4)$$

Demgemäss muss statt obiger Regel die folgende gesetzt werden:

> Das Quadrat der Differenz zwischen den zwei Messungen jeder Seite dividire man durch die Länge der Seite, addire die sämmtlichen so erhaltenen Quotienten, dividire die Summe durch die Anzahl der Seiten, multiplizire das Resultat mit der Länge der Messruthe, so ist die Quadratwurzel aus diesem Produkt, mit 0·47694 multiplizirt, als wahrscheinlicher Fehler für die einfache Anlegung der Messruthe anzusehen.

Dass $r$ in derselben Maasseinheit erhalten wird, in der $l, d, \lambda$ gegeben sind, versteht sich bei der Formel (4) von selbst, während die Regel von Vorländer nur absolute Zahlen liefert, also schon desshalb zu beanstanden ist. Wir ersehen übrigens, dass unter sonst gleichen Verhältnissen der Werth von $r$ im Verhältnisse von $\sqrt{\lambda}$ wächst, was besonders auszusprechen hier unterbleiben kann.

Bei einer Gesammtausgleichung eines Polygons kommen Winkel- und Seitenkorrektionen vor, und das verhältnissmässige Gewicht ermisst sich aus den wahrscheinlichen Fehlern in der bekannten Weise (vergl. etwa S. 111.). Dass man hierbei das Gewicht für alle Seitenkorrektionen im Allgemeinen nicht als dasselbe betrachten darf, ist aus dem Obigen klar, so dass also das eben angeführte Beispiel meiner Schrift hierin nicht maassgebend sein kann. Für jetzt mag aber das hier Gesagte genügen.

## XVII.

## Aufgaben und Sätze über geometrische Oerter für Punkte, deren Summe der Entfernungen von gegebenen geraden Linien oder gegebenen Ebenen eine constante ist.

Von

Herrn Professor Dr. *Heis*

zu Münster.

1. *Aufgabe.* **Den geometrischen Ort aller Punkte zu construiren, für welche die Summe der Entfernungen von den Schenkeln eines gegebenen Winkels einer Constanten $p$ gleich ist.**

**Auflösung.** Man suche auf den Schenkeln des gegebenen Winkels $ABC$ (Taf. IV. Fig. 9.) zwei Punkte, $x$ und $y$, so dass die Perpendikel $xD$ und $yE$ auf $BC$ und $BA$ beide $=p$ werden. Die durch $x$ und $y$ gelegte Gerade wird die verlangte sein. Denn fällt man von einem beliebigen Punkte, $O$, der $xy$ auf $Bx$ und $By$ die Senkrechten $h'$ und $h''$ und verbindet $O$ mit $B$, so ist $2\Delta Bxy = h'.Bx + h''.By = (h' + h'').Bx$, da $Bx = By$. Es ist aber auch $2\Delta Bxy = Bx.p$, folglich

$$h' + h'' = p.$$

**Zusatz.** Fällt eines der Perpendikel $h'$ oder $h''$ auf die entgegengesetzten Seiten des Schenkels, liegt also der Punkt $O$ ausserhalb der begrenzten $xy$, so ist statt der Summe $h' + h''$ die Differenz $h'' - h'$ oder $h' - h''$ zu setzen, wie sich leicht beweisen lässt.

2. *Aufgabe.* **Den geometrischen Ort aller Punkte zu suchen, für welche die Summe der Entfernungen von den drei Seiten eines Dreiecks einer Constanten $p$ gleich ist.**

**Auflösung.** Es sei $ABC$ (Taf. IV. Fig. 10.) das gegebene Dreieck. Man suche auf jeder der Seiten $AB$ und $AC$ die Punkte $D$ und $G$ so zu bestimmen, dass die Summe der Entfernungen dieser Punkte von den beiden anderen Seiten $=p$ ist, verbinde $D$ mit $G$; alsdann wird $DG$ die verlangte Linie sein.

**Beweis.** Es sei $O$ ein beliebiger Punkt der Linie $DG$. Fällt man von $O$ auf die drei Seiten des Dreiecks die Perpendikel $OK$, $OM$, $OL$ und von den Punkten $D$ und $G$ auf die Seiten des Dreiecks die Perpendikel $DE$, $DF$, $GH$, $GT$, zieht ferner durch $D$ mit $BC$ eine Parallele $DU$, welche $OL$ und $GT$ in $R$ und $J$ trifft, ferner durch $O$ mit $AC$ eine Parallele, welche $DU$ in $P$, $DF$ in $Q$ und $DA$ in $N$ trifft, so ist

$$DF + DE = GH + GT,$$

also

$$DF = GH + GJ.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $DNP$ und $DAU$, in welchen $O$ und $G$ ähnlich liegende Punkte sind, ist jener letzten Gleichheit entsprechend in dem Dreiecke $DNP$:

$$DQ = OK + OR,$$

also auch, wenn man auf beiden Seiten $QF + DE = OM + RL$ hinzusetzt:

$$DF + DE = OK + OL + OM.$$

Da aber $DF + DE = p$, so ist:

$$OK + OL + OM = p.$$

**Zusatz.** Leicht lässt sich erkennen, wie die Summe der drei Perpendikel sich umändert, wenn der Punkt $O$ der Linie $DG$ ausserhalb des Dreieckes liegt.

2. **Zusatz.** In ähnlicher Weise lässt sich der geometrische Ort aller Punkte finden, für welche die Summe der Entfernungen von den vier Seiten eines gegebenen Vierecks eine constante ist.

3. *Aufgabe.* **Den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, für welche die Summe der Entfernungen von den drei Seiten einer körperlichen Ecke einer Constanten $p$ gleich ist.**

**Auflösung.** Es sei $S$ (Taf. IV. Fig. 11.) die gegebene körperliche Ecke. Man suche auf den drei Kanten $SP$, $SQ$, $SR$ derselben die drei Punkte $A$, $B$, $C$ so zu bestimmen, dass die Perpendikel von denselben auf die gegenüberstehenden Seiten der Körperecke einzeln $= p$ werden. Die durch $A$, $B$, $C$ gelegte Ebene ist der verlangte geometrische Ort.

**Beweis.** Heissen die den Ecken $A$, $B$, $C$ des Tetraeders $SABC$ gegenüberstehenden Seitenflächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so ist der Inhalt des Tetraeders $SABC$ gleich

$$\tfrac{1}{3}\alpha . p = \tfrac{1}{3}\beta . p = \tfrac{1}{3}\gamma . p,$$

folglich:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Heissen die von einem beliebigen Punkte $O$ der Ebene $ABC$ auf die Seiten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des Tetraeders gefällten Perpendikel $h'$, $h''$, $h'''$, so ist der Inhalt des Tetraeders:

$$\tfrac{1}{3}h' . \alpha + \tfrac{1}{3}h'' . \beta + \tfrac{1}{3}h''' . \gamma = \tfrac{1}{3}\alpha(h' + h'' + h''') = \tfrac{1}{3}\alpha . p,$$

folglich $h' + h'' + h''' = p$.

**Zusatz.** Nimmt man den Punkt $O$ ausserhalb der Ebene des Dreiecks, so wird je nach der Lage dieses Punktes in Bezug auf die Ebene die Summe $h' + h'' + h'''$ sich in $h' + h'' - h'''$ oder $h' - h'' - h'''$ u. s. w. verwandeln.

4. *Aufgabe.* **Auf der Seitenkante $SA$ (Taf. IV. Fig. 12.) eines beliebigen Tetraeders $SABC$ einen Punkt $X$ zu**

finden, so dass die Summe der Abstände dieses Punktes von den gegenüberstehenden Seitenflächen $SBC$ und $ABC$ einer gegebenen geraden Linie $p$ gleich werde.

Auflösung. Bestimmt man auf den drei Kanten $BA$, $BS$, $BC$ der an die Grundfläche stossenden körperlichen Ecke $B$ die drei Punkte $M$, $N$, $O$ so, dass die Perpendikel von denselben auf die gegenüberstehenden Seitenflächen der Ecke der gegebenen Linie $p$ gleich werden, so wird die durch $MNO$ gelegte Ebene die Linie $SA$ in einem Punkte $X$ treffen, der nach dem vorigen Satze die verlangte Eigenschaft hat. Diesen Durchschnittspunkt wird man aber am einfachsten durch Verbindung des Punktes $M$ mit $N$ erhalten, wobei also $O$ überflüssig ist.

*Aufgabe.* Den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, für welche die Summe der Entfernungen von den vier Seiten eines Tetraeders $SDGL$ (Taf. IV. Fig. 13. und Fig. 14.) einer gegebenen Linie $p$ gleich wird.

Auflösung. Man suche auf den Seitenkanten $SD$, $SG$, $SL$ der gegebenen Pyramide drei Punkte $g$, $M$, $N$, so dass die Summe der Perpendikel von jedem dieser Punkte auf die gegenüberstehenden Seitenflächen des Tetraeders $SDGL = p$ werde. Legt man nun durch $M$, $g$, $N$ eine Ebene $MgN$, so ist dieselbe die verlangte.

Beweis. Es mögen der Abkürzung wegen die von einem beliebigen Punkte $m$ auf die den Ecken $S$, $D$, $G$, $L$ gegenüberstehenden Seitenflächen gefällten Perpendikel bezüglich mit $m\Sigma$, $m\Delta$, $m\Gamma$ und $mA$ bezeichnet werden. — Durch den Punkt $g$ sei eine Ebene $dgl$ parallel der Grundebene $DGL$ gelegt, und der Abstand eines beliebigen Punktes $m$ von dieser Ebene sei mit $m\sigma$ bezeichnet.

Bei dem Beweise sind zwei Fälle in Bezug auf die Lage der Punkte in der Ebene $MNg$ zu unterscheiden. Der Punkt $m$ liegt auf dem Umfange des Dreiecks $MNg$ oder nicht. Es möge (Taf. IV. Fig. 13.) $m$ auf der Linie $Mg$ liegen. Es ist also nach der eingeführten Bezeichnungsweise darzuthun, dass

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = p$$

sei ($mA = 0$). Nach der Voraussetzung ist:

$$g\Sigma + g\Gamma = M\Sigma + M\Delta = p. \tag{1}$$

Zieht man $g\Sigma$ ab, so wird:

$$g\Gamma = M\sigma + M\Delta. \tag{2}$$

Man lege durch $m$ eine Ebene $msn \parallel MSN$, alsdann entsteht eine Pyramide $gmsn$ der $gMSN$ ähnlich, und für beide Pyramiden ist die Ebene $gdl$ eine ähnlich liegende. Es haben somit die Punkte $g$, $m$, $s$, $n$ in Bezug auf ihre Entfernungen von den Gegenflächen des Tetraeders und der Ebene $gdl$ dieselben Eigenschaften, wie die correspondirenden Punkte $G$, $M$, $S$, $N$ in Bezug auf ihre Gegenflächen und dieselbe Ebene $gdl$. Bezeichnet man den Abstand des Punktes $g$ von der Ebene $smn$ mit $g\gamma$, so wird also entsprechend (2):

$$g\gamma = m\sigma + m\Delta. \tag{3}$$

Setzt man $m\Gamma$ hinzu, so ist:

$$m\Gamma + g\gamma, \text{ d. i. } g\Gamma = m\sigma + m\Delta + m\Gamma. \tag{4}$$

Setzt man nun $g\Sigma$ hinzu und berücksichtigt, dass

$$m\sigma + g\Sigma = m\Sigma,$$

so ist:

$$g\Gamma + g\Sigma = m\Sigma + m\Delta + m\Gamma. \tag{5}$$

Da aber $g\Gamma + g\Sigma = p$ ist, so hat also der Punkt $m$ der Linie $gM$ die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen desselben von den Seitenflächen des Tetraeders $= p$ ist. Da $mA = 0$ ist, so ist also:

$$m\Sigma + m\Gamma + m\Delta + mA = p. \tag{6}$$

Es liege zweitens der Punkt $n$ der Ebene $MgN$ innerhalb des Dreiecks $MgN$. (Taf. IV. Fig. 14.) Man verbinde $N$ mit $n$, verlängere $Nn$ bis zum Durchschnitte $m$ mit $gM$, ziehe $ne \parallel Ng$, $nb \parallel NM$ und vollende über $neb$ das dem Tetraeder $SMNg$ ähnliche Tetraeder $abne$, endlich ziehe man noch durch $e$ mit $dgl$ die parallele Ebene $hei$. Man bezeichne die aus $a$, $b$, $n$ auf die Ebene $hei$ gefällten Perpendikel mit $a\alpha$, $b\alpha$, $n\alpha$; die von $b$, $n$ und $e$ auf die gegenüberstehenden Seiten des Tetraeder $aben$ gefällten Perpendikel mit $b\beta$, $n\nu$, $e\varepsilon$. Es ist nun:

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = g\Sigma + g\Gamma = N\Sigma + NA. \tag{7}$$

Zieht man $g\Sigma$ von beiden Seiten ab, so wird, da $m\Sigma - g\Sigma = m\sigma$:

$$m\sigma + m\Delta + m\Gamma = N\sigma + NA. \tag{8}$$

Da die beiden Tetraeder $aben$ und $SMNg$ ähnlich sind und der Punkt $m$ für beide ein ähnlich liegender Punkt ist, so muss (8) entsprechend auch:

$$m\alpha + m\beta + m\varepsilon = n\alpha + n\Lambda \qquad (9)$$

sein. Setzt man zu beiden Seiten $e\Sigma$ hinzu, so muss, da

$$m\alpha + e\Sigma = m\Sigma, \quad n\alpha + e\Sigma = n\Sigma$$

ist:

$$m\Sigma + m\beta + m\varepsilon = n\Sigma + n\Lambda \qquad (10)$$

sein. Setzt man ferner $\varepsilon\Delta = n\Delta$ beiderseits hinzu und berücksichtigt, dass $m\beta + \varepsilon\Delta = m\Delta$, so ist:

$$m\Sigma + m\Delta + m\varepsilon = n\Sigma + n\Lambda + n\Delta. \qquad (11)$$

Fügt man nun noch endlich $\sigma\Gamma = n\Gamma$ beiderseits hinzu, und berücksichtigt, dass $m\varepsilon + \varepsilon\Gamma = m\Gamma$, so wird:

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = n\Sigma + n\Lambda + n\Delta + n\Gamma. \qquad (12)$$

Es ist aber nach dem ersten Falle

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = p,$$

folglich:

$$n\Sigma + n\Lambda + n\Gamma + n\Delta = p.$$

Zusatz. Leicht lässt sich erkennen, wie der Satz sich umändert, wenn der Punkt $m$ zwar in der Ebene des Dreiecks $MgN$, aber ausserhalb desselben zu liegen kommt.

Die letzte Aufgabe findet sich analytisch gelöst im XIX. Bande des Archivs S. 121.

# XVIII.

## Anwendung des dritten Differentials $d^3s=f'''(t)dt^3$ der Function der geradlinigen Bewegung $s=f(t)$ auf die Physik der allgemeinen Schwere.

Von

Herrn Dr. *Fr. W. K. Gensler*,

Pastor zu Grossmölsen im Grossherzogthume Sachsen-Weimar.

---

Bekanntlich hielt Lagrange [1]) für unnöthig, bei der Untersuchung der Differential-Coefficienten der Function $s=f(t)$, welche den geradlinigen Weg $s$ als Function der Zeit $t$ ausdrückt, ausser dem ersten und zweiten Differential-Coefficienten, $f'(t)$ und $f''(t)$, auch den dritten $f'''(t)$, und überhaupt die höhern zu berücksichtigen. Es ist die Aufgabe der hier folgenden Untersuchung, zu beweisen, dass es vortheilhaft ist, diese Beschränkung fallen zu lassen, indem namentlich der dritte Differential-Coefficient von $s=f(t)$, wenn $s$ den Weg eines gravitirenden Punktes gegen das Gravitationscentrum hin darstellt, für die Einsicht in die Physik der Schwere von entschiedener Bedeutung ist.

### §. 1.

Schon die, so viel mir bewusst ist, von Maclaurin eingeführten conditionalen Definitionen von Geschwindigkeit und beschleunigender Kraft, deren Maasse bekanntlich $\frac{ds}{dt}=f'(t)$ und $\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$ sind, wenn $s=f(t)$ den geradlinigen Weg $s$ als Function der Zeit $t$ in Rechnung bringt, lassen es als eine Willkühr

---

[1]) Lagrange: Théorie des fonctions analytiques. Paris 1813. Trois. part. Art. 4. Page 314 seqq.

erscheinen, in der Discussion den dritten und überhaupt die höhern Differential-Coefficienten ohne aus den analytischen Werthen derselben sich von selbst ergebende Gründe übergehen zu wollen. Wenn Maclaurin sagt, die Geschwindigkeit $v$ in einem gegebenen Zeitpunkte werde genau gemessen durch den Weg, der in einer gegebenen Zeit durchlaufen werden würde, wenn die Bewegung von dem gegebenen Zeitpunkte an gleichförmig bliebe [1]), so schliesst sich diese Definition auch an die Darstellung des Wegincrementes $\Delta s$ durch die Taylorsche Reihe, deren Lagrange sich vorzugsweise bedient, mit grosser Leichtigkeit an. Denn wird in

$$\Delta s = f'(t)\Delta t + \frac{f''(t)\Delta t^2}{1.2} + \frac{f'''(t)\Delta t^3}{1.2.3} + \ldots, \qquad (1)$$

$f'(t)$ nach der conditionalen Definition Maclaurin's constant genommen, so wird, weil $f''(t) = \frac{d.f'(t)}{dt}$ ist, $f''(t)$, $f'''(t)$ u. s. f. zu Null, und dadurch

$$\Delta s = f'(t)\Delta t, \qquad (2)$$

worin offenbar der Weg $\Delta s$ als Maass der augenblicklichen Geschwindigkeit $f(t) = v$ gegeben ist. Auch findet zwischen der Gleichung (2) und der bekannten Gleichung $ds = f'(t)dt$ ein Widerstreit nicht statt, da $f'(t)$ in Gleichung (2) für die supponirte Zeit $\Delta t$ constant gedacht wird, in welchem Falle $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ ist.

In gleicher Weise rechtfertigt sich das conditionale Maass der beschleunigenden Kraft $\varphi$, welches durch das Verhältniss des Zuwachses $\Delta v$, den die Geschwindigkeit $v$ in der gegebenen Zeit $\Delta t$ erhalten würde, wenn $\varphi$ während der Zeit $\Delta t$ constant bliebe, zu der Zeit $\Delta t$ gegeben ist; denn nach den angenommenen Bedingungen folgt aus

$$\Delta v = f''(t)\Delta t + \frac{f'''(t)\Delta t^2}{1.2} + \frac{f^{IV}(t)\Delta t^3}{1.2.3} + \ldots \qquad (3)$$

sofort

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = f''(t) = \varphi, \qquad (4)$$

---

[1]) Maclaurin: Treatise of fluxions. Edinb. 1742. Art. 4. pag. 53. Er erweitert diese conditionale Erklärungsweise für die Fluxionen beliebiger Functionen im Art. 700. pag. 578 ff., womit noch Art. 6. pag. 54. zu vergleichen ist.

wobei wiederum, weil $f'''(t)$ für die Zeit $\Delta t$ constant gedacht ist, $\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$ wird.

Ist nun aber in der Wirklichkeit die beschleunigende Kraft $\varphi$ im Allgemeinen veränderlich, so darf wiederum gefragt werden, welches das Verhältniss des Zuwachses $\Delta\varphi$, den $\varphi$ in der gegebenen Zeit $\Delta t$ erhalten würde, wenn $f'''(t)$ während dieser Zeit constant bliebe, zu $\Delta t$ sein werde, und offenbar ist dieses conditionale Verhältniss $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ in demselben Sinne das Maass der augenblicklichen Aenderung $k$ der beschleunigenden Kraft $\varphi$, in welchem $f'(t)$ das Maass der augenblicklichen Aenderung des Weges, und $f''(t)$ das Maass der augenblicklichen Aenderung der Geschwindigkeit ist. Es findet sich aber unter Anwendung der Maclaurin'schen Bedingungen aus

$$\Delta\varphi=f'''(t)\Delta t+\frac{f^{IV}(t)\Delta t^2}{1.2}+\frac{f^{V}(t)\Delta t^3}{1.2.3}+\ldots \qquad (5)$$

sofort

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=f'''(t)=k, \qquad (6)$$

wobei denn wiederum $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}$ ist, weil der Werth dieser Ausdrücke, $f'''(t)$, für die supponirte Zeit $\Delta t$ constant genommen wird. So ergiebt sich beispielsweise aus der einfachsten Gleichung der schwingenden Saiten $s=a\sin(t\sqrt{m})$ als das Maass der augenblicklichen Aenderung $k$ der beschleunigenden Kraft $\varphi$ der Ausdruck $f'''(t)=-a\sqrt{m^3}\cos(t\sqrt{m})$, worin also $f'''(t)$ oder $k$ das Verhältniss des Zuwachses $\Delta\varphi$, den die beschleunigende Kraft $\varphi$ zu Ende der Zeit $t$ in dem beliebig angenommenen Zeittheile $\Delta t$ erhalten würde, wenn $\varphi$ während dieses Zeittheiles constant bliebe, zu dem Zeittheile $\Delta t$ ausdrückt.

Bei Berücksichtigung vorstehender Ausführungen kann man nicht geneigt bleiben, der von Lagrange befürworteten theoretischen Beschränkung der Taylor'schen Entwickelung von $\Delta s$ auf die beiden ersten Glieder beizutreten. Seine Behauptung, es sei nicht nöthig, in dieser Entwickelung das dritte Glied, $\frac{f'''(t)\Delta t^3}{1.2.3}$, zu berücksichtigen, weil man jede Bewegung aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten zusammengesetzt denken könne, gilt nach seiner eigenen Darstellung nicht allgemein für jedes gegebene $\Delta s$, sondern allgemein nur für sehr kleine,

ja eigentlich nur für unendlich kleine $\Delta s$. Sein anderer Grund aber, dass die Natur uns keine einfache Bewegung von der Art, wie sie die Gleichung $x=ct^3$ fordert, darbiete, und man nicht wisse, was der Coefficient $c$ (der eben durch den dritten Differential-Coefficienten von $x$ gefunden werden würde) an sich darstellen könne [1]), ist kein theoretischer, sondern ein empirischer Grund. Es ist vielmehr die Sache der allgemeinen analytischen Mechanik, aus den Werthen der höhern Differential-Coefficienten, $f'''(t)$, $f^{IV}(t)$ etc., die sie bei der Anwendung auf gegebene empirische Verhältnisse annehmen, nachzuweisen, warum sie in gegebenen Fällen auf die Berechnung der Bewegung keinen Einfluss haben.

Nichts desto weniger können solche Werthe, die auf die Berechnung der Bewegung keinen Einfluss haben, für die physikalische Einsicht in die Natur der Schwere von grosser Bedeutung sein; das zu zeigen bietet aber die Betrachtung der Differentiation der Function $s=f(t)$ grössere Evidenz dar, als die der entsprechenden Differential-Coefficienten, weshalb die nun folgende Untersuchung zu jenen übergeht.

## §. 2.

Es besteht darüber kein Zweifel, dass aus dem Differential $ds=f'(t)dt$, worin $f'(t)$ oder $v$ die veränderliche Geschwindigkeit zu Ende der Zeit $t$ misst, durch Integration der Weg $s$ gefunden wird, den ein Punkt bei geradliniger Bewegung bis zu Ende der Zeit $t$ durchlaufen hat; es ist ferner darüber kein Zweifel, dass aus der Gleichung $dv=f''(t)dt$ oder $d^2s=f''(t)dt^2$, worin $f''(t)=\varphi$ die beschleunigende Kraft zu Ende der Zeit $t$ misst, durch einmalige Integration die Geschwindigkeit $v$ und durch zweimalige der Weg $s$ bestimmt wird.

Ebenso unzweifelhaft aber ist es, dass in der Mechanik und Physik die Geschwindigkeit $f'(t)$ oder $v$, als die Ursache der

---

[1]) Lagrange: Théorie des fonct. anal. Trois. part. Art. 3. Page 313. J. F. Fries giebt in seiner „Mathematischen Naturphilosophie (Heidelberg 1822. Seite 502.)" dieser Bemerkung des Lagrange eine metaphysische Begründung, indem er behauptet, dass eine Bewegungsgleichung, wie $x=ct^3$, eine veränderliche, in der Natur unmögliche Grundkraft fordere. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass diese Grundkraft (die Anziehungskraft), deren Wirkung die Schwere sein soll, der letztern proportional zu nehmen sei, eine Voraussetzung, deren Untauglichkeit unten in §. 6. bewiesen wird.

Grösse des in der Zeit $t$ durchlaufenen Weges $s$, und dass die Grösse dieses Weges $s$ als die Wirkung der Geschwindigkeit $f'(t)$ oder $v$ des bewegten Punktes anerkannt wird; und nicht weniger zweifellos gilt die Grösse der beschleunigenden Kraft, $f''(t)$ oder $\varphi$, als die wirksame Ursache der nach Abfluss der Zeit $t$ eingetretenen Geschwindigkeit $f'(t)$ oder $v$, so wie diese Geschwindigkeit als die Wirkung der beschleunigenden Kraft $f''(t)$ oder $\varphi$.

Daraus folgt aber, dass bei den Differentialien $f'(t)dt$ und $f''(t)dt^2$ die Integration das wissenschaftliche Hülfsmittel ist, aus der Grösse der ursachlichen Wirksamkeit, welche in $f'(t)dt$ und $f''(t)dt^2$ gegeben ist, die Grösse ihrer Wirkung, die durch $\int f'(t)dt$ und $\int\int f''(t)dt^2$ gemessen wird, zu finden; und dass umgekehrt die Operation des Differentiirens bei den Functionen $s = f(t)$ und $v = f'(t)$ das wissenschaftliche Hülfsmittel ist, aus der Grösse der Wirkung die Grösse der ursachlichen Wirksamkeit zu finden.

Dieser Nachweisung gemäss besteht der Unterschied zwischen $v$ oder $f'(t)$ und $vdt$ oder $f'(t)dt$, sowie zwischen $\varphi$ oder $f''(t)$ und $\varphi dt$ oder $f''(t)dt^2$ darin, dass $\varphi$ und $v$, oder $f''(t)$ und $f'(t)$, die arithmetischen Maasse der augenblicklichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige genetische Abhängigkeit, dass hingegen $vdt$ und $\varphi dt$, oder $f'(t)dt$ und $f''(t)dt^2$ eben diese Grössen, aber mit Rücksicht auf ihre gegenseitige, im Differentialcalcul entwickelbare genetische Abhängigkeit darstellen. Demgemäss könnte man $v$ und $\varphi$ oder $f'(t)$ und $f''(t)$ die arithmetischen, dagegen $vdt$ und $\varphi dt$, oder $f'(t)dt$ und $f''(t)dt^2$ die genetischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nennen.

Es ist aber die analytische Abhängigkeit, in welcher $f''(t)$ von $f'''(t)dt$, und überhaupt $f^n(t)$ von $f^{n+1}(t)dt$ steht, genau dieselbe, welche $f(t)$ mit $f'(t)dt$, oder $f'(t)$ mit $f''(t)dt$ verbindet, nämlich diejenige, welche sich allgemein in dem Ausdrucke $d.f^n(t) = f^{n+1}(t)dt$, oder in $\int f^{n+1}(t)dt = f^n(t) + C$ darstellt. Daher bringt nothwendiger Weise $f'''(t)dt$ in Beziehung auf $f''(t)$, und allgemein $f^{n+1}(t)dt$ in Beziehung auf $f^n(t)$ dieselbe physikalische Abhängigkeit in Rechnung, welche $f'(t)dt$ in Beziehung auf $f(t)$, und $f''(t)dt$ in Beziehung auf $f'(t)$ in Rechnung setzt.

Da nun $f'(t)dt$ in Beziehung zu $f(t)$, und $f''(t)dt$ in Beziehung zu $f'(t)$, wie sich oben ergab, das physikalische Verhältniss der Ursachlichkeit oder der Bewirkung in Rechnung bringt, so misst auch $f'''(t)dt$ diejenige ursachliche Wirksamkeit, durch welche die in $f''(t)$ gemessene Grösse erzeugt wird; und überhaupt

wird durch $f^{n+1}(t)dt$ diejenige ursachliche Wirksamkeit, welche die in $f^{n}(t)$ in den Calcul gebrachte physikalische Grösse hervorbringt, unter Bezeichnung ihrer genetischen Abhängigkeit analytisch dargestellt, während $f^{n+1}(t)$ einfach den arithmetischen Werth eben dieser ursachlichen Wirksamkeit bestimmt. Demgemäss könnte man wohl die auf einander folgenden Differential-Coefficienten der Bewegungsfunction $s=f(t)$ die Causalstufen der Bewegung nennen [4]).

## §. 3.

Mit Hülfe der hier nachgewiesenen causalen Bedeutung, welche dem Differential $d\varphi = f'''(t)dt$ in Beziehung auf das Maass der

---

[4]) Man wolle bemerken, dass hier nicht eine besondere Bedeutung des allgemeinen Differential-Calculs vorausgesetzt wird, sondern dass die Discussion eines speciellen Falles auf die genetische Bedeutung der Differentialien für diesen Fall hinleitete. Indess wird nicht verkannt werden, dass die Verallgemeinerung der causalen Betrachtungsweise von $s=f(t)$ und seiner Differentialien auf die Idee der Fluxionsrechnung Newton's führt, bei deren Ausführung nicht nur von der Vorstellung einer physikalischen oder mechanischen Causalität, sondern selbst von der Newton'schen Hülfsvorstellung der Geschwindigkeit abstrahirt werden könnte. Dazu würde die Auffassung des Differentials als des Inceptiv's oder Inchoativ's der veränderlichen Grösse dienen, wie sie Wallis in seiner mathes. univers. cap. 2. und de angulo contactus, 2. Abtheil. cap. 5. und cap. 6., eingeführt hat; nur bediente sich Wallis zu sehr der noch halb scholastischen Ausdrucksweise der damaligen Philosophie seiner Heimath, und hielt sich dem allgemeinen Algorithmus zu fern. Eine kleine Abhandlung des Verfassers in dem Osterprogramm für 1850 des Eisenacher Realgymnasiums suchte die Auffassung des Wallis, die sich ihm von selbst aufgedrängt hatte, zu rechtfertigen und zu erweitern. Mag es nun auch dieser Arbeit an durchgängiger Evidenz mangeln, so ist doch zu wünschen, dass die Inceptiventheorie des Wallis ebensowohl ihre wissenschaftliche Durchführung finden möge, wie der von ihm gleichfalls zuerst gegebenen geometrischen Deutung der imaginären Ausdrücke in der Theorie der lateralen Grössen von Gauss ihre Vollendung geworden ist. Auch möchte sich schon aus einer Analyse des art. 111. coroll. 2. in Maclaurin's treatise of fluxions, wo die Ordinate einer zu quadrirenden Fläche (nach Wallis also das Inceptiv derselben) der Fluxion der Fläche proportional gefunden wird, und der erweiterten Bedeutung der Quadratur, wie sie art. 114. lehrt, mit Evidenz ergeben, dass die genetische oder causale Deutung des Differential-Calculs sich sehr wohl mit der anschaulichen Klarheit, deren Vorbild uns die alten Griechen geben, vereinigen lässt.

beschleunigenden Kraft $\varphi = f''(t)$ zukommt; lässt sich mit Sicherheit entscheiden, ob die Natur der aus dem Gravitationsgesetze hervorgehenden Bewegungen, denen die Gleichung $s = f(t)$ angepasst sein soll, der Annahme einer physikalischen Ursache der Schwere, d. h. einer der Centralmasse eigenthümlichen Kraft der Anziehung, deren Wirkung die Schwere des gegen die Centralmasse gravitirenden Punktes sein soll, entspricht oder widerstreitet. Hat nämlich $\frac{d\varphi}{dt} = f'''(t)$, wenn es dieser Untersuchung angepasst ist, einen angebbaren arithmetischen Werth, so ist die Existenz der Anziehungskraft erwiesen; ist dieser Werth aber der Null gleich, so hat die voraussetzliche Anziehungskraft der Centralmasse keine physikalische Existenz.

Es bietet aber die wissenschaftliche Erfahrung zwei Fälle zur Untersuchung der Schwere in der hier geforderten Richtung an; man kann entweder von der elliptischen Bewegung eines schweren Punktes um sein Gravitationscentrum, oder auch von der geradlinigen Bewegung eines schweren Punktes nach dem Gravitationscentrum hin, also vom allgemeinen Fallgesetze ausgeben. Da aber nach der Hypothese der allgemeinen Anziehungskraft die Ursache der Schwere in derjenigen Richtung zu suchen ist, in welcher die Schwere den gravitirenden Punkt zur Bewegung treibt, so kann auch bei der elliptischen Bewegung des schweren Punktes nur die Annäherung desselben an das Gravitationscentrum, welches bekanntlich einer der Brennpunkte der Ellipse ist, in Frage kommen. Die Gleichung $s = f(t)$ muss also für diesen Fall für die relative Bewegung des schweren Punktes in Beziehung auf sein Gravitationscentrum eingerichtet werden, so dass die Drehung des Radius vector um das Gravitationscentrum aus der Rechnung bleibt, und die grösste Länge von $s$ der doppelten Excentricität der elliptischen Bahn oder dem Unterschiede des grössten und des kleinsten Radius vector gleich wird.

Nun ist die beschleunigende Kraft $\varphi$, welche den gravitirenden Punkt in seiner elliptischen Bahn gegen das Gravitationscentrum hintreibt, wenn $v$ die Geschwindigkeit desselben in der elliptischen Bahn, $\varrho$ sein Krümmungshalbmesser und $\vartheta$ der Winkel zwischen diesem und dem Radius vector $r$ des Punktes ist, wobei $v$, $\varrho$ und $\vartheta$, so wie auch $r$, implicite Functionen von $t$ sind,

$$\varphi = \frac{v^2}{\varrho \cos\vartheta}, \tag{7}$$

also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos\vartheta(2\varrho dv - v d\varrho) + v\varrho \sin\vartheta d\vartheta}{\varrho^2 \cos\vartheta^2 dt} . v. \tag{8}$$

Es hängt aber die Veränderlichkeit von $\varphi$ jedenfalls zu einem Theile von der bekannten geometrischen Eigenschaft der Schwere ab, die man ihr Ausbreitungsgesetz nennt, davon nämlich, dass die Grösse der Schwere eines Punktes im umgekehrten Verhältnisse des quadrirten Abstandes desselben von seinem Gravitationscentrum steht. Dass nun diese räumliche Bedingtheit der Schwere über den Grad der supponirten Anziehungskraft, welche die Centralmasse an sich haben soll, nichts entscheidet, ergiebt sich daraus, dass in einem und demselben Abstande des gravitirenden Punktes von seinem Gravitationscentrum die Schwere des gravitirenden Punktes sich ändern würde, wenn die voraussetzliche Anziehungskraft des Gravitationscentrums eine veränderliche wäre, und dass das Gesetz dieser Veränderung allein eine Function der veränderlichen Anziehungskraft sein würde. Daher kann aus der Schwere eines gravitirenden Punktes nur dann ein Schluss auf den Grad der voraussetzlichen Anziehungskraft des Gravitationscentrums, welche die Ursache der Schwere des gravitirenden Punktes sein soll, gemacht werden, wenn der Abstand des gravitirenden Punktes constant, und bei allen bezüglich ihrer Schwere mit einander zu vergleichenden Punkten gleich gesetzt wird.

Es ist also für die Gleichung (7), in welcher $\varphi$ die Schwere des gravitirenden Punktes misst, der Radius vector $r$ constant zu denken, wenn dieselbe zur Berechnung der Grösse oder Intensität der voraussetzlichen Anziehungskraft des Gravitationscentrums dienen soll. Nach Anleitung des §. 2. giebt dann die Gleichung (8) sofort die Intensität der voraussetzlichen wirksamen Ursache der Schwere des gravitirenden Punktes, wenn man in ihren allgemeinen Ausdruck diejenigen besonderen Werthe von $v$, $\varrho$ und $\vartheta$ einführt, die sich aus der unvermeidlichen Bedingung, dass $r$ constant sein solle, ergeben. Ist aber der Radius vector $r$ constant, so wird die elliptische Bahn ein Kreis, $v$ constant und $\vartheta$, da nun $\varrho$ mit $r$ zusammenfällt, der Null gleich. Dadurch erhält die Gleichung (8) den besondern Werth

$$\frac{d\varphi}{dt}=0, \tag{9}$$

womit der Beweis gegeben ist, dass die Intensität der voraussetzlichen Anziehungskraft der Null gleich ist, dass also eine ursachliche Wirksamkeit, welche die Schwere eines gravitirenden Punktes hervorbringen sollte, für die Physik oder Mechanik nicht existirt.

## §. 4.

Ganz dasselbe Resultat ergiebt sich für den Werth von

$\frac{d\varphi}{dt}$ aus dem Ausdrucke der Schwere im allgemeinen Fallgesetze, welcher bekanntlich

$$\varphi = \frac{g}{(e-s)^2} \tag{10}$$

ist, wenn $g$ die Schwere des gravitirenden oder fallenden Punktes in der Einheit der Entfernung vom Gravitationscentrum, $e$ der anfängliche Abstand des fallenden schweren Punktes und $s$ die veränderliche Entfernung desselben vom Gravitationscentrum misst, wobei man $s$ als eine implicite Function von $t$ zu betrachten hat. Es ist dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2g\,ds}{(e-s)^3\,dt} \tag{11}$$

das Maass der ganzen augenblicklichen Aenderung von $\varphi$ nach §. 1., Gleichung (6). Um daraus den besonderen Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$ zu finden, auf welchen die geometrische Abhängigkeit der Schwere $\varphi$ von dem Abstande des gravitirenden Punktes von dem Gravitationscentrum keinen Einfluss haben soll, muss dieser Abstand, der hier durch $s$ gegeben ist, constant genommen werden; dadurch wird $ds = 0$, also auch

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{12}$$

woraus denn wiederum folgt, dass die allgemeine Anziehungskraft, als Ursache der Schwere gedacht, eine falsche Hypothese ist.

§. 5.

Da bei den Differentiationen in den Gleichungen (8) und (11) die ganze Veränderlichkeit von $\varphi$, dieses als implicite Function von $t$ gedacht, berücksichtigt ist, und erst in diesen allgemeinen Differentialien von $\varphi$ gewisse Grössen der Natur der Sache nach constant gesetzt wurden, so ist gegen die in den Gleichungen (9) und (12) gefundenen besonderen Werthe von $\varphi$ von Seiten des Calculs durchaus nichts einzuwenden. Sollte aber die Reflexion einen Anstoss daran nehmen, dass in den Fällen, für welche $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird, eine Bewegung nach dem Gravitationscentrum hin nicht stattfindet, so könnte man dieses Bedenken durch Hinweisung auf die conditionalen Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie sie in §. 1. nach Maclaurin gegeben wur-

den, für erledigt halten; denn jenes „würde, wenn“ macht keine Anforderung an eine wirkliche Bewegung während des supponirten Zeittheiles $\Delta t$. Indess braucht man sich auf diese logische Erledigung des der Reflexion etwa aufstossenden Bedenkens nicht zu beschränken, da $\varphi$ auch für den Fall, wo $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird, ein arithmetisches Maass findet, welches die empirische Realität der durch $\varphi$ gemessenen Grösse zur Grundlage hat.

Denn was zunächst die Realität von $\varphi$ unter denjenigen Umständen, für welche die Gleichung (9) in §. 3. gilt, angeht, so ist dieselbe durch die aus der Kreisbewegung nothwendig entspringende Centrifugal-Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ erwiesen, so dass zugleich $\frac{v^2}{r}$ als ein reales, von dem Wege $s$ unabhängiges Maass von $\varphi$ gegeben ist.

Dagegen erhält dasjenige $\varphi$, für welches die Gleichung (12) in §. 4. gilt, seine reale Bedeutung in dem Drucke, den ruhende Massen gegen das Hinderniss ihres Fallens ausüben, wodurch wiederum ein von $s$ unabhängiges empirisches Maass für $\varphi$ dargeboten wird. Denn ist $p$ das Gewicht der Masse $m$ und $r$ ihr Abstand vom Gravitationscentrum, so hat man $\varphi = \frac{p}{mr^2}$.

## §. 6.

Die gewöhnliche Hypothese, nach welcher die Schwere eines Punktes der Anziehungskraft der Centralmasse proportional sein soll, ist nicht nur den hier gefundenen analytischen Resultaten entgegen, sondern verstösst auch gegen anerkannte Grundsätze der allgemeinen Physik. Ein solcher Grundsatz ist, dass da, wo eine Ursache wirksam ist, die nothwendige Folge eine Veränderung derjenigen Zustände ist, welche von dieser Ursache abhängig sind, und dass diese Veränderung so lange vor sich geht, als die Ursache derselben wirksam ist. Wäre nun, um der exaktesten Entwickelung der gewöhnlichen Theorie der Anziehungskraft, wie sie J. F. Fries darstellt [*]), zu folgen, $f = km' . \varphi(a)$,

---

[*]) J. F. Fries: Mathematische Naturphilosophie, S. 456, wobei bemerkt werden mag, dass Fries den Ausdruck: beschleunigende Kraft vermieden, und dafür: augenblickliche Beschleunigung, oder: augenblickliche Intensität der stetigen Beschleunigung gesetzt wissen, und den Ausdruck: Kraft nur seiner Grundkraft der Anziehung (oder

worin $f$ die augenblickliche Beschleunigung, $k$ die Anziehungskraft jedes wirkenden Theiles der Masse $m'$ und $\psi(a)$ eine Function des Abstandes des mit der Beschleunigung $f$ gegen $m'$ gravitirenden Punktes von dem in einem Punkte vereinigt gedachten $m'$ bezeichnet: so kann nach obigem Grundsatze $f$ nicht constant bleiben, während die Anziehungskraft der Masse $m'$ wirksam ist. Demgemäss könnte obiger Werth von $f$ nur etwa der Werth der Beschleunigung nach Ablauf der Zeiteinheit sein, und der allgemeine Werth wäre vielmehr $f = km't\psi(a)$. Da aber der Erfahrung gemäss die beschleunigende Kraft der Schwere bei constanter Entfernung constant bleibt, so liegt die Unrichtigkeit der für eine Grundkraft der Anziehung versuchten Hypothese klar vor.

Es hat aber diese falsche Hypothese offenbar ihre reale Quelle, wenn von metaphysischen Deductionen abgesehen wird, in der von Newton bewiesenen Thatsache, dass die Schwere eines gravitirenden Punktes bei gleichen Entfernungen von verschiedenen Centralmassen diesen Massen einfache und gerade proportional ist; denn es liegt der Reflexion sehr nahe, diejenigen Körper, deren Massen, Abstände und Lagen die Schwere jedes gegen dieselben gravitirenden Punktes völlig bestimmt, als die wirksamen Ursachen der Schwere dieser Punkte anzusehen, zumal auch das sogenannte Ausbreitungsgesetz der Schwere wegen seiner Aehnlichkeit mit dem Ausbreitungsgesetze des Lichtes und des Schalles zu einer Hypostasirung der bloss geometrischen Bedingtheit der Schwere in eine von der Centralmasse ausgehende Kraft der Anziehung so leicht verführt.

Uebrigens sind die hier gewonnenen Resultate der analytischen Untersuchung über die Ursache der Schwere von jeder Hypothese über die physikalische Natur der Schwere und deren Bewirkung unabhängig. Wäre die beschleunigende Kraft der Schwere ein mechanisch oder statisch mitgetheilter Druck, wie in der unausführbaren [6]) Aetherdruck-Hypothese Newton's, so würde doch die vorstehende Untersuchung auf die Agentien, welche diesen Druck hervorbringen sollen, in gleicher Weise Anwendung

---

Abstossung) vorbehalten will. Da aber die Beschleunigung nicht bloss ein Maass in der veränderten Bewegung, sondern auch ein statisches Maass hat, welches die Vorstellung einer beschleunigten Bewegung als Merkmal nicht enthält, wie der Schluss des vorigen §. 5. in Erinnerung bringt, so ist in der allgemeinen Definition von $\varphi$ und dem sprachlichen Ausdrucke das Merkmal eines Triebes zur Bewegung, also die Vorstellung einer Kraft, nicht zu entbehren.

[6]) Whewell: Astronomy and general physics. Lond. 1833. pag. 224.

finden und gleiche Resultate geben. Oder wenn etwa Faraday behauptet, die herrschende Theorie der Schwere sei im Widerspruch mit seiner Vorstellung von einem wechselseitigen Uebergehen aller Naturkräfte in einander, unter denen er freilich zunächst die Imponderabilien versteht, so handelt es sich doch in der analytischen Mechanik gar nicht um die qualitative Beschaffenheit der beschleunigenden Kraft, sondern um die Abhängigkeit ihrer quantitativen Verhältnisse.

Als endliches Resultat vorstehender Untersuchungen steht also folgendes fest:

> es ist ein allgemeines Naturgesetz, dass die Masse eines jeden Körpers, nebst dem Abstande und der Lage desselben bezüglich eines gravitirenden Punktes, allerdings die vollständige Bedingung für die Schwere des letzteren ist, ohne aber mit einer Kraft verbunden zu sein, welche die wirksame Ursache der Schwere wäre.

Die Bedeutung dieses allgemeinen Naturgesetzes, welchem die Schwere unterworfen ist, hebt sich dadurch hervor, dass vermöge desselben das Gebiet der gravitirenden Massen mit dem der organischen Gestaltungen unter ein und dasselbe Princip zusammenfällt; denn darin, dass die Gesetze des Lichts die bestimmenden Bedingungen der Einrichtung des Auges, dass die Gesetze der Schallschwingungen die bestimmenden Bedingungen für die Einrichtung des Gehörs, dass die hydrostatischen und hydromechanischen Gesetze des Blutumlaufes die bestimmenden Bedingungen für die Einrichtung des Herzens und des Blutadersystems, u. s. f., sind, ohne dass die vorangestellten Gesetze die wirksamen Ursachen der genannten organischen Einrichtungen enthalten, spricht sich die Natur der organischen Bildungen mit charakteristischer Deutlichkeit aus.

---

# XIX.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

---

Von Herrn Dr. G. Zehfuss in Darmstadt.

1) Wie beweist man, dass die Determinante

$$\begin{array}{cccc} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \ldots\ldots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \ldots\ldots & a_2-b_n \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \ldots\ldots & a_3-b_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & a_n-b_3 \ldots\ldots & a_n-b_n \end{array}$$

gleich Null ist, so oft $n>2$, während sie für $n=2$ den Werth $(a_1-a_2)(b_1-b_2)$ erhält?

2) Die Integrale

$$\int_a^b f(x)\partial x \quad \text{und} \quad \int_a^\infty [f(x)-f(x+b-a)]\partial x$$

sind einander gleich, so oft beide endliche und bestimmte Werthe zulassen. Unter welchen Bedingungen lässt sich ein ganz analoges Resultat erzielen, in welchem für die obere Grenze $\infty$ die untere Grenze $-\infty$ steht?

3) Es ist

$$\iint_0^\infty f(x,y)\partial x\partial y=\int_\beta^\gamma t\partial t\int_0^\alpha \frac{\partial x}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}},$$

wobei rechterhand für $y$ sein Werth aus $f(x,y)=t$ zu setzen ist, und

$$f(\alpha,0)=t;\quad \beta=f(0,0);\quad \gamma=f(\infty,\infty).$$

Insbesondere ist für $f(x,y)=F(x).e^{-y}$:

$$\int_0^\infty F(x)\partial x=\int_0^{F(0)}\psi(t)\partial t,$$

wobei $\psi(t)$ die aus der Auflösung der Gleichung

$$t=f(x,0)=F(x)$$

entstehende Auflösung $x=\psi(t)$ oder die umgekehrte Function von $F$ vorstellt. Die letzte Integralformel lässt sich auch ganz direct ableiten.

4) Das Integral

$$\int_1^{\frac{1}{c}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

kehrt durch die Substitution $x=\frac{1}{ct}$ identisch auf dieselbe Form zurück, und liefert mithin einen Beweis ad oculos, dass die Regeln des Substitutions-Verfahrens richtige Resultate liefern.

5) Es sei

$$F(a)=\int_0^\infty (e^{-ax}-\cos ax)\frac{\partial x}{x}.$$

Setzt man nun $\frac{x}{a}$ für $x$, so entsteht

$$F(a)=\int_0^\infty (e^{-x}-\cos x)\frac{\partial x}{x}=F(1).$$

Da mithin $F(a)$ constant gleich $F(1)$ ist, so ist auch $F(0)=F(1)$, d. h.

$$0=\int_0^\infty (e^{-x}-\cos x)\frac{\partial x}{x}.$$

Obgleich nun, wie man aus der Theorie des Integralcosinus weiss, dieses Resultat richtig ist, so ist doch die Herleitungsweise falsch, weil man auf demselben Wege beweisen könnte, dass auch

$$\int_0^\infty (e^{-nx}-\cos x)\frac{\partial x}{x}=0$$

sein müsste, was unrichtig ist. Wo liegt der Fehler?

6) Bei einem in Süddeutschland, wahrscheinlich aber auch anderwärts gebräuchlichen Würfelspiele werden bei jedem Wurfe dem Spieler so viele Augen angerechnet, als die beiden höchsten gleichen Augenzahlen und ausserdem die höchste unter den übrigen Augenzahlen des mit sechs Würfeln gebräuchlichen Wurfes zusammengenommen anzeigen, so dass z. B. der Wurf 5, 4, 3, 3, 2, 2 als 3+3+5 gezählt wird. Wie ungerecht dies Spiel ist, indem die Gewinnste durchaus nicht in umgekehrtem Verhältniss zur Wahrscheinlichkeit der einzelnen Würfe stehen, möge aus nachstehender Tabelle ersehen werden, zu der wir noch bemerken, dass 6 gleiche Augenzahlen als 19, und die Augen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als 20 gerechnet werden.

Die Berechnung dieser Tabelle ist für Schüler eine nützliche Uebung in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Combinationslehre. Die Columne A. enthält die dem Spieler anzurechnenden Augenzahlen. Dieselben können meist auf mehrere Arten, welche daneben in der Columne B. angemerkt sind, entstehen. So entsteht der Wurf 16, der, beiläufig bemerkt, am häufigsten auftritt,

auf 2 Arten, der Wurf 12 auf drei: 336, 444, 552, welche zur Berechnung der Häufigkeit ihres Vorkommens drei wesentlich verschiedene Formeln erfordern, jenachdem die Zahlen, welche die beiden gleichen Würfel bedeuten, gleich, grösser oder kleiner sind, als die höchste ausserdem. Die Columnen C. und D. enthalten die, den in den Columnen B. und A. begriffenen Zahlen entsprechenden Häufigkeiten des Vorkommens.

| A. | B. | C. | D. |
|---|---|---|---|
| 4 | 112 | 6 | 6 |
| 5 | 113<br>221 | 36<br>15 | 51 |
| 6 | 114<br>222 | 186<br>41 | 227 |
| 7 | 115<br>223<br>331 | 816<br>156<br>15 | 987 |
| 8 | 116<br>224<br>332 | 2286<br>486<br>225 | 2997 |
| 9 | 225<br>333<br>441 | 1296<br>232<br>15 | 1543 |
| 10 | 226<br>334<br>442 | 2946<br>786<br>225 | 3957 |
| 11 | 335<br>443<br>551 | 1776<br>975<br>15 | 2766 |
| 12 | 336<br>444<br>552 | 3606<br>693<br>225 | 4524 |
| 13 | 445<br>553<br>661 | 2256<br>975<br>15 | 3246 |
| 14 | 446<br>554<br>662 | 4266<br>2625<br>225 | 7116 |
| 15 | 555<br>663 | 1544<br>975 | 2519 |
| 16 | 556<br>664 | 4926<br>2625 | 7551 |
| 17 | 665 | 5535 | 5535 |
| 18 | 666 | 2905 | 2905 |
| 19 | 6 gleiche | 6 | 6 |
| 20 | 123456 | 720 | 720 |

Anzahl aller Würfe $= 6^6 = 46656$.

# XX.

## Note sur l'évaluation des intégrales $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$, $\int x^2dm$, $\int y^2dm$, $\int z^2dm$ pour une pyramide triangulaire dont la base est située dans le plan des $xy$, une des arètes etant prise pour axe des $x$.

Par

Monsieur *R. Lobatto*,

Professeur de mathématiques supérieures à l'Académie Royale à Delft.

---

1. Afin de parvenir plus facilement à la valeur de la première de ces intégrales, nous commencerons par chercher celle de l'intégrale double $\iint xydxdy$ étendue a un triangle quelconque situé dans le plan des $xy$. Soit $ABC$ (Taf. V. Fig. 1.) ce triangle; prenons d'abord le sommet $A$ pour origine d'un système d'axes rectangulaires $Ax'$, $Ay'$ parallèles aux axes $Ox$, $Oy$. Soient $m$, $n$ les coordonnées du point $B$ et $m'$, $n'$ celles du point $C$, par rapport au premier des deux systèmes d'axes. En désignant par $V$ le volume du solide produit par la révolution du triangle $ABC$ autour de l'axe $Ax'$, l'on a

$$V = 2\pi\iint y'dx'dy'.$$

D'ailleurs le moment de ce solide relatif à l'origine $A$, ou en d'autres termes le produit de ce solide par la distance de son centre de gravité au point $A$, a, comme l'on sait, pour valeur $2\pi\iint x'y'.dx'dy'$. L'intégrale double $\iint x'y'dx'dy'$ étendue à toute la surface du triangle sera ainsi connue, dès qu'on aura trouvé l'expression du moment du solide de révolution par rapport à

l'origine $A$. Or ce solide se compose évidemment de la somme du cône entier et du cône tronqué produits par la révolution du triangle $ABb$ et du trapèze $BbCc$ autour de l'axe $Ax'$, diminuée du cône provenant du triangle $ACc$.

Les moments des deux cones entiers ont pour valeurs $\frac{\pi}{4}n^2m^2$, $\frac{\pi}{4}n'^2m'^2$. Quant à celui du cône tronqué, on s'assurera sans peine, à l'aide des principes de statique, que son moment pourra être exprimé sous la forme suivante:

$$\frac{\pi}{6}(m'-m)\{n^2m+\tfrac{1}{4}(m+m')(n+n')^2+n'^2m'\}.$$

On aura ainsi

$$2\pi\iint x'y'dx'dy'$$
$$=\pi\left\{\frac{n^2m^2-n'^2m'^2}{4}+\left(\frac{m'-m}{6}\right)\left(n^2m+n'^2m'+\frac{(m+m')(n+n')^2}{2}\right)\right\},$$

donc

$$\iint x'y'dx'dy' \tag{1}$$
$$=\frac{1}{24}\{3(n^2m^2-n'^2m'^2)-2(m'-m)(n^2m+n'^2m')+(n+n')^2(m'^2-m^2)\}$$
$$=\frac{1}{24}\{n^2m'^2-n'^2m^2+2(nm'-mn')(mn+m'n')\}$$
$$=\frac{1}{24}(nm'-n'm)\{nm'+n'm+2(mn+m'n')\}$$
$$=\frac{J}{12}\{(m+m')(n+n')+mn+m'n'\},$$

$J$ représentant l'aire du triangle $ABC$.

Il est aisé maintenant d'obtenir la valeur de cette intégrale relativement au système d'axes parallèles passant par un point quelconque $O$.

Désignons à cet effet les nouvelles coordonnées du point $A$ par $a$, $b$, celles du point $B$ par $a'$, $b'$, et celles du point $C$ par $a''$, $b''$. On aura alors

$$m=a'-a,\quad n=b'-b,\quad m'=a''-a,\quad n'=b''-b.$$

Ensuite

$$\left.\begin{aligned}&\iint xydxdy = \iint (x'+a)(y'+b)dx'dy'\\ &= \iint x'y'dx'dy' + a\iint y'dx'dy' + b\iint x'dx'dy' + ab.J.\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Nommant $X$, $Y$ les coordonnées du centre de gravité du triangle, par rapport aux axes $Ax'$, $Ay'$, on aura:

$$\iint y'dx'dy' = J.Y = \left(\frac{n+n'}{3}\right)J = \left(\frac{b'+b''-2b}{3}\right)J,$$

$$\iint x'dx'dy' = J.X = \left(\frac{m+m'}{3}\right)J = \left(\frac{a'+a''-2a}{3}\right)J.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (2), on obtiendra à l'aide de l'équation (1), pour l'intégrale double dont il s'agit:

$$\iint xydxdy$$
$$= \frac{J}{12}\{(a'+a''-2a)(b'+b''-2b) + (a'-a)(b'-b) + (a''-a)(b''-b)$$
$$+ 4a(b'+b''-2b) + 4b(a'+a''-2a) + 12ab\}$$

expression qui pourra facilement être réduite à la forme symétrique:

(3)

$$\iint xydxdy = \frac{J}{12}\{(a+a')(b+b') + (a+a'')(b+b'') + (a'+a'')(b'+b'')\}.$$

2. Passons actuellement à la recherche de la valeur de $\int xydm$ pour la pyramide $ABCT$ (Taf. V. Fig. 2.) dont une des arêtes $AB$ est prise pour axe des $x$, et la face $ABC$ pour plan des $xy$. Soit $t$ la projection sur ce plan du sommet $T$ de la pyramide. Nommons $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point $t$; $\alpha'$, $\beta'$ celles du point $C$; $\alpha''$ la longueur $AB$, et $h$ la hauteur de la pyramide qui sera ainsi complètement determinée à l'aide de ces six quantités.

Prenant la masse de l'unité de volume pour unité de masse, l'intégrale $\int xydm$, qui exprime alors l'intégrale triple $\iiint xydxdydz$ pourra être présentée sous la forme

$$\int dz \iint xydxdy.$$

Considérons maintenant une section du corps prise parallèlement à la base, ou au plan des $xy$, à une distance quelconque $z$ de celui-ci; et dont la projection sur ce plan soit représentée par le triangle $abc$; semblable à la base $ABC$, nous pourrons, à l'aide

de ce qui a été trouvé au n°. précédent, evaluer l'intégrale $\iint xydxdy$ étendue à la section $abc$, en fonction de la distance $z$, ce qui conduira directement à la valeur de l'intégrale triple qu'il s'agit de trouver.

A cet effet il faudra remplacer dans la form. (3) l'aire $J$ par celle du triangle $abc$, et les six coordonnées $a$, $b$ etc. par celles des trois sommets $a$, $b$, $c$. Soit $A$ l'aire de la face $ABC$, celle du triangle $abc$ s'exprimera évidemment par $\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 A$. Quant aux valeurs des six coordonnées en fonction de $z$, on trouvera facilement, a l'aide de la figure pour celles

| | dans le sens des $x$ | dans le sens des $y$ |
|---|---|---|
| du point $a$ | $\frac{\alpha z}{h}$, | $\frac{\beta z}{h}$; |
| du point $b$ | $\alpha'' - (\alpha'' - \alpha)\frac{z}{h}$, | $\frac{\beta z}{h}$; |
| du point $c$ | $\alpha' - (\alpha' - \alpha)\frac{z}{h}$, | $\beta' - (\beta' - \beta)\frac{z}{h}$ |

Substituant ces valeurs à la place de $a$, $b$, $a'$, $b'$, $a''$, $b''$ dans la form. (3), on obtiendra pour l'intégrale $\iiint xydxdydz$ étendue au volume entier de la pyramide, une expression de la forme

$$\frac{A}{12}\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \left\{P + Q\frac{z}{h} + R\frac{z^2}{h^2}\right\} dz,$$

où les coefficiens $P$, $Q$, $R$ ne dépendent que des cinq coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha''$.

Or puisqu'on a

$$\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 dz = \tfrac{1}{3}h,$$

$$\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \frac{zdz}{h} = \tfrac{1}{12}h,$$

$$\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \frac{z^2}{h^2}dz = \tfrac{1}{30}h,$$

il en résulte;

$$\iiint xydxdydz = \frac{Ah}{720}\{20P + 5Q + 2R\} = \frac{M}{240}\{20P + 5Q + 2R\}, \tag{4}$$

en introduisant la masse $M$ de la pyramide. Il ne nous reste encore qu'a déterminer les valeurs des quantités $P$, $Q$, $R$. Pour cela observons qu'il résulte de la composition symétrique de la form. (3) que lorsque ces valeurs auront été obtenues pour les coordonnées de deux quelconques des trois sommets, par ex. pour les points $a$ et $c$, on en déduira sans peine celles qui se rapportent aux deux autres combinaisons. En effet, la partie de la fonction

$$P+Q\frac{z}{h}+R\frac{z^2}{h^2}$$

relative seulement à ces points $a$ et $c$, aura pour expression

$$(\alpha'-(\alpha'-2\alpha)\frac{z}{h})(\beta'-(\beta'-2\beta)\frac{z}{h})$$

d'où l'on tire:

$$P=\alpha'\beta',$$

$$Q=(2\alpha-\alpha')\beta'+(2\beta-\beta')\alpha'=2(\alpha\beta'+\alpha'\beta-\alpha'\beta'),$$

$$R=\alpha'\beta'+4\alpha\beta-2\alpha'\beta-2\alpha\beta',$$

$$20P+5Q+2R=2\{4\alpha\beta+6\alpha'\beta'+3\alpha\beta'+3\alpha'\beta\}. \qquad (5)$$

Pour la partie relative aux points $b$, $c$, on aura l'expression

$$(\alpha'+\alpha''-(\alpha'+\alpha''-2\alpha)\frac{z}{h})(\beta'-(\beta'-2\beta)\frac{z}{h}).$$

Il ne s'agira donc que de remplacer dans la form. (5) la quantité $\alpha'$ par $\alpha'+\alpha''$ pour en déduire immédiatement la valeur que cette fonction prendra pour la partie relative a ces deux points. On obtiendra ainsi par suite de ce changement

$$2\{4\alpha\beta+6\beta'(\alpha'+\alpha'')+3\alpha\beta'+3(\alpha'+\alpha'')\beta\}. \qquad (6)$$

De même la partie relative aux points $a$, $b$ se déduira de l'expression (5) en changeant $\alpha'$ en $\alpha''$, et faisant $\beta'=0$, ce qui fournira la valeur

$$2(4\alpha\beta+3\alpha''\beta). \qquad (7)$$

Prenant maintenant la somme des quantités (5), (6), (7) il en résultera pour la valeur complète de la fonction

$$20P+5Q+2R$$

l'expression

$$24\alpha\beta+24\alpha'\beta'+12\alpha'\beta+12\alpha\beta'+12\alpha''\beta'+12\alpha''\beta$$

$$=12\{\alpha(2\beta+\beta')+\alpha'(2\beta'+\beta)+\alpha''(\beta+\beta')\},$$

d'où l'on tire finalement pour l'intégrale cherchée:

$$\iiint xydxdydz = \frac{M}{20}\{\alpha(2\beta+\beta')+\alpha'(2\beta'+\beta)+\alpha''(\beta+\beta')\}. \quad (8)$$

**3.** La seconde des trois intégrales à déterminer

$$\iiint xzdxdydz$$

pourra s'obtenir d'une manière plus expéditive que la précédente. En la mettant sous la forme

$$\int zdz \iint xdxdy$$

on remarquera de suite que l'intégrale double qu'elle renferme, exprime pour une section quelconque $abc$ le moment de ce triangle par rapport à l'axe des $y$ ou en d'autres termes le produit de l'aire de ce triangle par la distance de son centre de gravité à l'axe $Ay$. D'après les valeurs indiquées au n°. précédent pour les coordonnées des points $a$, $b$, $c$, on aura pour la distance dont il s'agit

$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{\alpha z}{h}+\alpha''-(\alpha''-\alpha)\frac{z}{h}+\alpha'-(\alpha'-\alpha)\frac{z}{h}\right\}$$

$$=(\alpha-\tfrac{1}{3}(\alpha'+\alpha''))\frac{z}{h}+\tfrac{1}{3}(\alpha'+\alpha'')=(\alpha-\gamma)\frac{z}{h}+\gamma,$$

en mettant pour abréger $\alpha'+\alpha''=3\gamma$. Il en résulte

$$\iint xdxdy = A\left(\frac{h-z}{h}\right)^2((\alpha-\gamma)\frac{z}{h}+\gamma).$$

Partant

$$\iiint xzdxdydz = \frac{A}{h^2}\int_0^h (h-z)^2\{(\alpha-\gamma)\frac{z}{h}+\gamma\}zdz$$

$$=\frac{A}{h^2}\{\tfrac{1}{30}(\alpha-\gamma)h^4+\tfrac{1}{12}\gamma h^4\}$$

$$=\frac{Ah^2}{60}\{2(\alpha-\gamma)+5\gamma\}=\frac{Ah^2}{60}(2\alpha+\alpha'+\alpha'')$$

$$=\frac{Mh}{20}(2\alpha+\alpha'+\alpha'').$$

Quant à la troisième intégrale $\iiint zydxdydz$, que l'on pourra écrire sous la forme

$$\int zdz\iint ydxdy$$

on voit que la double intégrale qu'elle renferme, exprime le produit de l'aire du triangle *abc* par la distance de son centre de gravité à l'axe des $x$, distance qui a pour valeur

$$\tfrac{1}{3}\left\{(3\beta-\beta')\frac{z}{h}+\beta'\right\}.$$

Donc

$$\iiint zydxdydz = \frac{A}{3h^2}\int_0^h (h-z)^2\left\{(3\beta-\beta')\frac{z}{h}+\beta'\right\}zdz$$

$$=\frac{A}{3h^2}\left\{\tfrac{1}{30}(3\beta-\beta')h^4+\tfrac{1}{12}\beta'h^4\right\}$$

$$=\frac{Ah^2}{180}\left\{2(3\beta-\beta')+5\beta'\right\}$$

$$=\frac{Ah^2}{60}(2\beta+\beta')=\frac{Mh}{20}(2\beta+\beta').$$

4. Des trois intégrales $\int x^2dm$, $\int y^2dm$, $\int z^2dm$, qui restent à évaluer, la dernière s'obtient directement en observant qu'on a

$$\int z^2dm=\int z^2dz\iint dxdy,$$

et que la double intégrale $\iint dxdy$ prise en considérant $z$ comme une constante, exprime l'aire d'une section du solide parallèle à la base, et à une distance $z$ de ce plan, ce qui donne de suite

$$\iiint z^2dxdydz=A\int_0^h\left(\frac{h-z}{h}\right)^2z^2dz=\tfrac{1}{30}Ah^3=\frac{Mh^2}{10}.$$

Pour obtenir les valeurs des deux autres intégrales qui reviennent à

$$\int dz\iint x^2dxdy,\quad \int dz\iint y^2dxdy$$

il faudra chercher celles des doubles intégrales $\iint x^2dxdy$, $\iint y^2dxdy$ étendues à toute la surface d'un triangle situé dans le plan des $x, y$ et dont l'un des cotés est dirigé parallèlement à l'axe des $x$. Soit *abc* (Taf. V. Fig. 3.) ce triangle. Evaluons d'abord ces intégrales en prenant le sommet $a$ pour origine des coordonnées que nous désignerons par $x'$, $y'$ en les supposant parallèles aux $x$, $y$. Partageons le triangle en deux triangles rectangles *acd*, *bcd*. Soient

$$ad=a_0,\quad bd=a_1,\quad ab=a_0+a_1=a$$

et la perpendiculaire $cb=b$.

L'intégrale

$$\iint y'^2 dx' dy' = \tfrac{1}{3}\int y'^3 dx'$$

étendue seulement au triangle $acd$, a évidemment pour valeur

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a_0}\right)^3 \int_0^{a_0} x'^3 dx' = \tfrac{1}{12} a_0 b^3.$$

On aura de même pour le triangle $acd$, $\tfrac{1}{12}a_1 b^3$. Par conséquent la valeur de l'intégrale étendue à toute la surface du triangle $abc$, deviendra

$$\tfrac{1}{12}(a_0 + a_1) b^3 = \tfrac{1}{12} ab^3 = \tfrac{1}{6} b^2 J;$$

$J$ désignant l'aire du triangle.

Il est facile maintenant d'en déduire la valeur relative au système d'axes $Ox$, $Oy$, en remplaçant $x$ et $y$ par $x'+p$, $y'+q$, $p$ et $q$ étant les coordonnées du point $A$ par rapport au second système d'axes. On aura ainsi

$$\iint y^2 dx dy = \iint (y'+q)^2 dx' dy' = \iint y'^2 dx' dy' + 2q \iint y' dx' dy' + q^2 J$$

et puisque l'intégrale $\iint y' dx' dy'$ exprime le moment du triangle par rapport à l'axe des $x'$, ayant pour valeur $J + \tfrac{1}{3} b$, il viendra

$$\iint y^2 dx dy = J\{\tfrac{1}{6}\beta^2 + \frac{2qb}{3} + q^2\}. \qquad \text{(A)}$$

Quant à l'intégrale $\iint x'^2 dx' dy' = \int x'^2 y' dx'$ étendue au triangle $acd$, sa valeur est évidemment égale à

$$\frac{b}{a_0} \int_0^{a_0} x'^3 dx' = \tfrac{1}{4} a_0^3 b.$$

Il en résultera pour la surface entière du triangle $abc$

$$\iint x'^2 dx' dy' = \tfrac{1}{4} b (a_0^3 + a_1^3) = \tfrac{1}{2} J \left(\frac{a_0^3 + a_1^3}{a_0 + a_1}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} J (a_0^2 + a_1^2 - a_0 a_1).$$

Partant

$$\iint x^2 dx dy = \iint (x'+p)^2 dx' dy' = \iint x'^2 dx' dy' + 2p \iint x' dx' dy' + p^2 J$$

$$= J\{\tfrac{1}{2}(a_0^2 + a_1^2 - a_0 a_1) + \frac{2p}{3}(a_0 + a) + p^2\}. \qquad \text{(B)}$$

Pour que les intégrales que nous venons de trouver puissent servir à l'évaluation des intégrales $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, il restera à les exprimer en fonction de la variable $z$. A cet effet il faudra y

remplacer l'aire $J$ par $A\left(\frac{h-z}{h}\right)^2$; les coordonnées $p$, $q$ par $\frac{\alpha z}{h}$, $\frac{\beta z}{h}$; les distances $a_0$, $a$ par $\alpha'\frac{(h-z)}{h}$, $\alpha''\frac{(h-z)}{h}$ et la hauteur $b$ par $\beta'\frac{(h-z)}{h}$. A l'aide de ces substitutions on obtiendra:

$$\iiint y^2dxdydz = A\int_0^h\left(\frac{h-z}{h}\right)^2\left\{\frac{\beta'^2}{6}\left(\frac{h-z}{h}\right)^2+\tfrac{1}{3}\beta\beta'\frac{(h-z)z}{h^2}+\frac{\beta^2z^2}{h^2}\right\}dz$$

$$= A\{\tfrac{1}{30}\beta'^2h+\tfrac{1}{30}\beta\beta'h+\tfrac{1}{10}\beta^2h\}$$

$$= \frac{M}{10}\{\beta^2+\beta'^2+\beta\beta'\},$$

$$\iiint x^2dxdydz = A\int_0^h\left(\frac{h-z}{h}\right)^2\left\{\tfrac{1}{3}\left(\frac{h-z}{h}\right)^2(\alpha'^2+(\alpha''-\alpha')^2-\alpha'(\alpha''-\alpha'))\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{3}\frac{\alpha z}{h}(\alpha'+\alpha'')\left(\frac{h-z}{h}\right)+\frac{\alpha^2z^2}{h^2}\right\}dz$$

$$= A\{(3\alpha'^2+\alpha''^2-3\alpha'\alpha'')\frac{h}{10}+\alpha(\alpha'+\alpha'')\frac{h}{30}+\frac{\alpha^2h}{30}\}$$

$$= \frac{M}{10}\{\alpha^2+9\alpha'^2+3\alpha''^2+\alpha\alpha'+\alpha\alpha''-9\alpha'\alpha''\}.$$

En ajoutant deux à deux les trois intégrales $\int x^2dm$, $\int y^2dm$, $\int z^2dm$, on obtiendra les valeurs des moments d'inertie de la pyramide relativement à chacun des trois axes coordonnés.

5. Nous allons examiner en dernier lieu s'il existe une classe particulière de pyramides pour laquelle l'arête $Ax$ puisse devenir un axe principal de rotation. A cet effet, il faudra que les deux premiers intégrales s'evanouissent à la fois, ce qui fournit les deux conditions

$$\alpha(2\beta+\beta')+\alpha'(2\beta'+\beta)+\alpha''(\beta+\beta')=0,\quad 2\alpha+\alpha'+\alpha''=0.$$

En mettant la première de ces équations sous la forme

$$(2\alpha+\alpha')\beta+(\alpha+2\alpha')\beta'+\alpha''(\beta+\beta')=0$$

et y remplaçant $2\alpha+\alpha'$ par sa valeur $-\alpha''$ donnée par la seconde équation, il viendra

$$(\alpha+2\alpha')\beta'+\alpha''\beta'=0 \quad \text{ou} \quad \alpha+\alpha''+2\alpha'=0$$

d'où l'on obtient en éliminant $\alpha''$,

$$\alpha'=\alpha \quad \text{et} \quad \alpha'+3\alpha''=0.$$

Ces résultats montrent en premier lieu que la projection Ct de l'arète $CT$ a une direction perpendiculaire à l'arète $AB$, ou bien que ces deux arètes se croiseront perpendiculairement, et ensuite que la projection du sommet sera située de l'autre coté de l'axe des $y$ à une distance de celle-ci égale au tiers de la longueur $AB$. Telles sont donc les conditions exigées pour que cette dernière arète devienne un axe principal de rotation relativement au sommet $A$.

---

# XXI.

## Ueber das Wetterleuchten.

Von

Herrn *P. Augustin Reslhuber,*

Director der Sternwarte zu Kremsmünster, corresp. Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften.

(Aus dem XXVIII. Bande, Nr. 3. Seite 177. des Jahrganges 1858 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien besonders abgedruckt.)

---

Der Aufsatz, den ich der hohen kais. Akademie vorzulegen mir die Freiheit nehme, wurde zum grossen Theile bereits im Frühlinge des Jahres 1856 niedergeschrieben, aber wegen des Abwartens einer grösseren Zahl von Beobachtungen im Jahre 1856 zur Aufklärung des abgehandelten Gegenstandes erst gegen Ende des Jahres 1857 vollendet. Veranlassung hiezu gab eine Bemerkung des Herrn Dr. Friedmann in München, welcher in seinen mit sehr grosser Gediegenheit und Fachkenntniss geschriebenen meteorologischen Berichten (veröffentlicht in der allgemeinen Augsburger Zeitung) vom Monate Jänner 1856 bemerkte, „dass man am Abende des 24. Jänner zu München bei heiterem Himmel in der Richtung gegen West ein starkes Wetterleuchten beobachtet habe." Der Berichterstatter fügt noch bei, „dass dieses Phänomen noch immer nicht gehörig aufgeklärt sei."

Als ich diese Nachricht las, schlug ich mein Tagebuch auf, in welches ich mir alle auffallenden Erscheinungen, so viele deren zu meiner Kenntniss kommen, sorgfältig einzeichne, und finde eingeschrieben:

„24. Jänner 1856, Stürme mit Blitz und Donner in Antwerpen, Gent, besonders stark in Ostende, St. Willibrod, Courtrai, Verviers, Namur, Huy, Lille, Havre, Frankfurt, Cöln, Bonn, Aachen, Trier, Mainz, Aschaffenburg etc.“;

es kann sonach kaum ein Zweifel sein, dass das in München beobachtete Wetterleuchten in dem so weit verbreiteten Gewitter seinen Grund hatte.

In der Zeitschrift „Wöchentl. Unterhaltungen im Gebiete der Astron., Meteorolog. und Geograph.“, von Dr. G. A. Jahn in Leipzig, befindet sich in Nr. 17. des Jahrg. 1855, S. 135. ein Bericht des Herrn Sulzer, Pfarrers zu Ittendorf am Bodensee, „dass man am 14. April 1855 von $8^h$ $15^m$ Abends bis $10^h$ im Ost über oder hinter einer kaum einige Grade hohen Wolkenschichte ein starkes Wetterleuchten beobachtet habe. Das Aufleuchten folgte sich durchschnittlich in Intervallen von 8—10 Secunden; da ist denn doch nicht wohl anzunehmen, dass dieses der Wiederschein eines fernen Gewitters gewesen sei; denn was müsste das für ein Gewitter sein, wo auf die Minute sechs Blitzschläge fallen“ (es gibt wohl oft noch blitzreichere Gewitter) „und so eine ganze Stunde, und überdies am 14. April.“

Ich beobachtete an demselben Abende bei ganz heiterem Himmel von $8^h$ bis $10^h$ Abends im West und Nordwest häufiges Blitzen; gegen $12^h$ Nachts überzog sich der Himmel mit Haufenwolken, die eine sehr schnelle Bewegung von West gegen Ost hatten, ich vermuthete in ihnen die Ueberreste eines zerstäubten Gewitters; um 2 Uhr Morgens war der Himmel bei uns wieder wolkenfrei. Wir beide Beobachter hatten sonach den Herd der Blitze in unserer Mitte. Bald erfuhr ich aus der allgemeinen Augsburger Zeitung, dass sich an jenem Abende über München und Umgegend ein schweres Gewitter entladen habe. Auch in Bodenbach finde ich an diesem Abende in dem meteorologischen Monatsberichte der k. k. Central-Anstalt ein Gewitter angeführt.

Somit ist das räthselhafte Phänomen in diesem Falle genügend aufgeklärt.

Am 26. Februar 1854 beobachtete man zu Salzburg zwischen 3 und 4 Uhr Morgens im Ost mehrmaliges Blitzen; hier zu gleicher Zeit im West und Nordwest bei fast ganz reinem Himmel, und vernahm sehr fernen Donner; vorher tobte die ganze Nacht ein orkanartiger Südwestwind; um $3^h$ $45^m$ Morgens überzog sich

der Himmel, heftiges Schneegestöber begann und hielt durch eine Stunde an.

Zu Ried im Innkreise entlud sich ein starkes Gewitter, der Blitz schlug in den Pfarrthurm, zertrümmerte alles Holzwerk der ober dem Glockenhause befindlichen Theile, das Gebälk fing Feuer, der Brand konnte nur mit grösster Anstrengung gelöscht werden. Das Gewitter zog an uns auf der Nordseite vorüber.

Ich führte diese drei Fälle umständlicher an, weil diese Gewitter zu ungewöhnlichen Zeiten vorkamen und solche ausserordentliche Erscheinungen gewöhnlich durch Zeitungsberichte in einem grösseren Kreise bekannt werden.

Im Sommer ist man an Gewitter gewöhnt; beobachtet man nun an einem heiteren Abende an irgend einer Stelle des Horizontes das sogenannte Wetterleuchten, so erfährt man selten etwas von Gewittern in entfernteren Gegenden, besonders wenn diese nicht mit auffallenden verheerenden Folgen begleitet sind.

Obgleich ich für meine Person mir aus vieljähriger Erfahrung durch aufmerksames Beobachten aller Verhältnisse die dem Phänomene des Wetterleuchtens vorangehen, dasselbe begleiten und welche dieser Erscheinung nachfolgen, längst die feste Ueberzeugung verschafft habe, in Uebereinstimmung mit dem Urtheile aller aufmerksamen Naturforscher, dass das Wetterleuchten, wenn es sich in irgend einer Gegend des Gesichtskreises mehrere Male wiederholt, jederzeit in einem entfernten Gewitter seinen Grund habe, so entschloss ich mich doch, da es noch so Viele gibt, die den Zusammenhang zwischen Wetterleuchten und Gewittern nicht anerkennen wollen, den Gegenstand einer weiteren Untersuchung zu unterziehen; die Mittel hiezu können natürlich nur Nachrichten aus jenen Gegenden geben, welche in der Richtung des beobachteten Wetterleuchtens liegen.

Die grosse Ausdehnung, welche das Netz von meteorologischen Beobachtungs-Stationen im österreichischen Kaiserstaate unter dem Schutze der kais. Akademie der Wissenschaften durch die rühmliche Thätigkeit der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus seit wenigen Jahren gewonnen hat, und das reiche angesammelte Beobachtungs-Material geben die besten Mittel an die Hand, in diesen Gegenstand gründlich einzugehen und das Manchem noch so räthselhafte Phänomen vollkommen aufzuklären.

Man versteht unter **Wetterleuchten** im **Allgemeinen jedwede blitzähnliche Lichterscheinung, welche von keiner vernehmbaren Detonation begleitet ist.** Von dem eigentlichen Wetterleuchten aber kommen auszuscheiden alle vereinzelten Lichterscheinungen, die von helleren Sternschnuppen.

Feuerkugeln herrühren, kommen auszuscheiden die Erscheinungen des Zodiakallichtes, der Polarlichter, so dass man also unter Wetterleuchten versteht mehrere Male wiederholtes Blitzen in irgend einer Himmelsgegend, ohne dass man zugleich eine Detonation vernimmt, und diese meistentheils bei heiterem Himmel; und solchen Lichterscheinungen liegt nach dem Urtheile und nach vielfacher Erfahrung aufmerksamer Beobachter jederzeit ein entferntes Gewitter zu Grunde.

Wenn der gemeine Mann in irgend einer Richtung das Wetterleuchten beobachtet, so pflegt er zu sagen, und dieses wahrscheinlich nicht ohne einen Erfahrungsgrund, „der Himmel kühle sich ab;“ und er hat Recht, denn es erfolgt in den meisten Fällen eine Depression der Temperatur der Luft. Ist schon das Entstehen der Gewitter durch das Zusammentreffen wärmerer Dunstschichten mit kälteren bedingt, wodurch die Temperatur der ersteren erniedriget wird, die Dünste condensirt und häufige Niederschläge veranlasst werden, so bewirkt in Folge des Gewitters die raschere Verdünstung des Wassers an der Oberfläche der Erde (da durch die Niederschläge die Luft trockener wurde, und nun wieder neue Dünste aufnehmen kann) eine Herabstimmung der Temperatur, indem bei jeder Verdünstung ein gewisses Quantum Wärme gebunden wird. Diese Abkühlung beschränkt sich aber nicht bloss auf den Ort des Gewitters, sondern verbreitet sich wegen des gestörten Gleichgewichtes der Luft einer Gegend auch in einem grösseren Umkreise. Ist das Wetterleuchten in einem entfernten Gewitter begründet, so ist die Abkühlung der Luft eine nothwendige Folge, und der Spruch des gemeinen Mannes gerechtfertiget.

Wenn ein Gewitter von stärkerer Intensität aus einer Gegend abgezogen ist, so sieht man in der Richtung des Weges, den es eingeschlagen, oft noch lange fortblitzen; selbst wenn die Gewitterwolken längst aus unserem Gesichtskreise entschwunden sind und kein Donner mehr vernehmbar ist, leuchten die Blitze noch besonders in dunkler Nacht und bei reinem Himmel am fernen Horizonte herauf; keinem Menschen wird es einfallen, darin etwas Ungewöhnliches zu erblicken.

Sieht man in jener Richtung, woher die Gewitter regelmässig kommen, bei ganz reinem Himmel das Aufleuchten von Blitzen, so löset sich häufig das Räthsel sehr bald; das Gewitter, welches früher unter unserem Horizonte stand, von dem wir nur den Reflex der Blitze in der Luft sahen, steigt allmählich empor und geht den Weg, den die durch dasselbe selbst veranlasste Luft-

strömung es ziehen heisst; wir erhalten die Aufklärung des Phänomens des Wetterleuchtens oft auf die nachdrücklichste und unliebsamste Weise.

Manchmal trifft es sich auch, dass das Gewitter sich früher erschöpft, die mit Lichterscheinungen verbundenen elektrischen Entladungen aufhören, bevor es unseren Ort erreicht (und einmal und in einer Gegend muss ja jedes Donnerwetter ein Ende nehmen), dann ziehen wenigstens die Ueberreste, die Wolken über uns dahin, und bringen nicht selten gedeihlichen Regen.

Das Manchem so problematische Wetterleuchten, über welches wir nicht immer gleich Aufklärung erhalten, sieht man am meisten in jenen Gegenden des Horizontes, woher für einen bestimmten Ort Gewitter in der Regel nicht kommen. Bei uns ist der ordentliche Zug der Donnerwetter aus West, Südwest, Nordwest; ganz nahe Gewitter, die durch das Zenith des Ortes gehen (sogenannte überstehende Gewitter) sind bei uns wenig; im Mittel aus vieljährigen Beobachtungen kommen auf das Jahr 8 nahe und 22 entfernte Gewitter; die meisten ziehen auf der Südseite längs der Alpen, oder auf der Nordseite entlang der Flüsse Traun und Donau vorüber.

Wir sehen daher das Wetterleuchten am öftesten im SW., S., SO., oder im NW., N., NO. Beobachtet man das Phänomen genauer, so bemerkt man ein Weiterrücken der Stelle, wo die Blitze aufleuchten, ganz entsprechend dem gewöhnlichen Zuge eines Gewitters.

Vielfache Erfahrung lehrt, dass man besonders bei heiterem Himmel, wenn kein vorstehendes Gewölk die möglichst weite Fernsicht am Horizonte in einer offenen Gegend hindert, den Reflex der Blitze in der Luft von einem unter unserem Horizonte stehenden Gewitter auf 30 und noch mehr Meilen Entfernung sieht.

Berücksichtigt man die atmosphärischen Verhältnisse, welche dem Phänomene vorangehen, dasselbe begleiten und die demselben folgen, wie den Luft- und Dunstdruck, die Temperatur, die Feuchtigkeit der Luft, den Wind, Wolkenzug, so ist der Schluss, das Wetterleuchten hänge mit einem entfernten Gewitter zusammen, nicht nur kein gewagter, sondern wir erwarteten nach den obwaltenden Verhältnissen der Atmosphäre für die eigene Gegend selbst, was wir über eine fernere, wenn auch nur im Abglanze der Blitze dahinziehen sehen.

Selten ist der Himmel in der Gegend des Wetterleuchtens ganz vollkommen rein; die Dunkelheit der Nacht lässt uns feine

Cirrus von dem gewöhnlichen Dunste oft schwer, höchstens beim Aufleuchten der Blitze unterscheiden, und diese Cirrus sind die Anzeichen, dass noch tiefer unten dichteres Gewölk sich finde, wo die Quelle der Blitze zu suchen ist. Sieht man aber von seinem Beobachtungsorte aus am fernen Horizonte Wolken lagern, aus denen zeitweilig Blitze aufleuchten, so ist es ja doch angemessener, wenn man schon den obersten Theil des Schornsteines vom Feuerherde sieht, die Erscheinung auf die natürliche Weise zu erklären, anstatt zu erzwungenen Hypothesen seine Zuflucht zu nehmen.

Sieht man nach einer Nacht mit Wetterleuchten am Morgen die meteorologischen Instrumente und den Himmel an, so findet man fast durchweg das Barometer gestiegen, die Temperatur erniedrigt, den Himmel mit Wolken umzogen, die uns häufig reichlichen Regen spenden; nur in dem Falle, wenn ich Wetterleuchten tief im SO. oder O. beobachtete, ohne dass von unserer Gegend dahin ein Gewitter abzog, trifft es sich öfters, dass die meteorologischen Instrumente von den Vorgängen im fernen Osten keine Kunde geben, der Himmel heiter bleibt, wenn die Strömung der Luft nach jener Gegend gerichtet ist.

Die zähesten Vertheidiger des Wetterleuchtens als eines selbstständigen, von einem Gewitter unabhängigen Phänomenes berufen sich auf die manchmal gemachte Erfahrung, dass man aus hochstehenden Wolken häufige Blitze fahren gesehen hat, ohne einen Donner vernommen zu haben.

So berichtet R. Stockmann aus Pirna (m. s. **Unterhaltungen im Gebiete der Astronomie, Meteorologie und Geographie von Dr. G. A. Jahn in Leipzig, Jahrg. VIII.** p. 391):

„Am 14. Juni dieses Jahres (1854) genossen wir die seltene Erscheinung, ein wetterleuchtendes Gewölk über unserem Haupte vorbeiziehen zu sehen, die brillanteste Erscheinung der Art, die ich je gesehen. Das häufige aber stets geräuschlose, secundenlange zuckend ausstrahlende Licht aus einzelnen Wolkentheilen, 8 bis 10,000 Fuss über uns, die dann und wann sternschnuppenartig an den Wolkenrändern entlang schiessenden elektrischen Funken, die das ganze innere Gewölk aufschliessende Beleuchtung, so wie die der Landschaft, gaben ein Schauspiel, wie ich es ausserdem in ähnlicher Weise nur dreimal gesehen. Die lange Dauer von $8^h$ $30^m$ bis $12^h$ erlaubte jede Art hierher gehörender Beobachtungen anzustellen, und gerne, sollte es gewünscht werden, stehe ich mit einem Auszuge meines Tagebuches zu Diensten."

Aehnliche Fälle werden auch in **Gehler's** physikalischen Wörterbuche unter dem Artikel „Wetterleuchten“ angeführt.

Ich selbst habe eine ähnliche Erscheinung nie gesehen, aber bei hochgehenden Gewittern schon oft die Bemerkung gemacht, dass man nicht auf jeden Blitz einen Donner vernimmt, wohl aber bei schnell sich folgenden elektrischen Entladungen ein beständiges Rollen des Donners hörbar ist.

**Dass Gewitter oft in einer bedeutenden Höhe vorüberziehen**, ist bekannt; am besten überzeugt man sich hievon im Gebirge. Die Bewohner des Chamouni-Thales versichern, dass Gewitter zuweilen höher als der Montblanc (14,800 Fuss) gehen (**Kämtz** Meteorologie). Ist es nun in einem solchen Falle nicht vielleicht möglich, dass man den Donner wegen der grossen Höhe nicht hören kann? es kommt hier sehr viel auf die Verhältnisse der Umgebung einer solchen Gewitterwolke und auf die Medien an, durch welche der Schall bis zu unserem Ohre gelangen soll. Sind keine den Schall reflektirenden und durch die mehrmalige Reflexion verstärkenden Wolken da, so kann er in der Höhe verhallen, ohne dass wir auf dem Boden etwas vernehmen. Oder kann nicht die oben herrschende Luftströmung den Schall horizontal fortführen, dass zwar wir nichts, aber seitwärts des Gewitters befindliche Beobachter denselben hören können?

Die Luft ist in grossen Höhen bedeutend dünner, während sie gegen die Erdoberfläche an Dichte stetig zunimmt; Schallwellen, in einer dünnen Luft erregt, werden geschwächt, wenn sie in eine dichtere Schichte übergehen, und dieses um so mehr, je stärker die Dichtigkeit der Luft gegen den Boden zunimmt.

**Schiesst man auf einem hohen Berge**, welcher von keinem seiner Nachbaren an Höhe erreicht, viel weniger überragt wird, bei heiterem Himmel und ruhiger Luft **ein Feuergewehr los**, so ist es möglich, dass man im Thale am Fusse des Berges einen schwachen Schall vernimmt; ist aber die Luft nur etwas unruhig und im Thale bedeutend dichter (lagern Wolken oder Nebel unter der Spitze des Berges in den Niederungen), so verhallt der Schuss in den Höhen, ohne dass man in der Tiefe etwas hört.

**Wird in einer ausgedehnten Ebene ziemlich schweres Geschütz bei stark bewegter Luft abgefeuert**, so vernimmt man wohl den Schall sehr gut und weit in der Richtung der Luftströmung, nicht aber, oder nur auf geringe Entfernung auf der entgegengesetzten Seite.

Luftschiffer berichten, dass, wenn sie einmal in eine bedeutende Höhe emporgestiegen waren, sie den Donner der unter ihnen abgefeuerten Kanonen nicht mehr haben vernehmen können, besonders, wenn unter ihnen eine Wolkenschichte sich befand, und doch geht die Fortpflanzung des Schalles nach oben leichter vor sich, als umgekehrt; eine widrige Luftströmung in der Höhe und die Verhältnisse der Bewölkung spielen hier eine wichtige Rolle.

Es ist sonach immerhin möglich, dass Gewitter in grosser Höhe über uns oder seitwärts dahinziehen, und wir keinen Donner ungeachtet reichlicher Blitze vernehmen.

In dem oben von R. Stockmann angeführten Falle finde ich in dem Monatsberichte der k. k. Central-Anstalt in Wien am gleichen Tage Gewitter aufgeführt zu Bodenbach, Pilsen, Prag, Pürglitz, Deutschbrod, Czaslau, Senftenberg, nur ist die Tageszeit des Gewitters nicht beigesetzt.

Seit dem Jahre 1853 veröffentlicht die k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften (mathematisch-naturwissenschaftliche Classe) monatliche Uebersichtstabellen über die Witterung in Oesterreich zugleich mit Bemerkungen über besondere Erscheinungen; aus diesen entnahm ich für die Abende, an welchen wir fernes Blitzen beobachteten, ohne dass über unsere Gegend ein Gewitter herankam, oder ein solches von hier abzog, die Notizen über gleichzeitig an anderen Beobachtungsstationen des österreichischen Kaiserstaates stattgehabte Gewitter. Nur ist bei der folgenden Zusammenstellung noch der Umstand zu erwähnen, dass in den angeführten Tabellen wohl das Datum des Tages, nicht aber die Stunde, zu welcher ein Gewitter stattfand, in allen Fällen angegeben ist. Da jedoch in den meisten Fällen bei uns der Himmel am Tage und Abende vollkommen heiter war und man annehmen kann, dass dieser Zustand der Luft in einem grösseren Umkreise von gleicher Beschaffenheit war, so kann man füglich schliessen, dass erst bei hereinbrechender Nacht die an ferneren Orten aufgeführten Gewitter eingetreten seien. Unser Ort ist in dem grossen Netze der österreichischen Beobachtungsstationen so gelegen, dass wir gegen West und West-Nordwest keine Station mehr haben, an welcher regelmässige Beobachtungen angestellt werden; doch ist dieser Mangel nicht so erheblich, da aus jenen Gegenden unser gewöhnlicher Gewitterzug ist und wir über besondere Vorgänge im benachbarten Baiern häufig Nachrichten durch die allgemeine Augsburger Zeitung erhalten.

| Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | | Zu gleicher Zeit |
|---|---|---|
| 1853. | | |
| 29. Juni | gegen Mitternacht Blitze im NW.; Himmel heiter. | Gew. zu Schössl, Pürglitz, Trautenau in Böhmen. |
| 30. „ | um $10^h$ Ab. Bl. im W., rückt geg. SW., S., trüb. | Gew. zu Lienz, Salzburg, Aussee, Admont. |
| 2. Aug. | um $10^h$ Ab. Bl. im SW. etwas trüb, um $2^h$ M. entf. Gew. im SW. | Gew. zu Bregenz, Lienz, Salzburg. |
| 3. „ | von $9^h$ Ab. bis $2^h$ M. Bl. im W., rückt gegen SW., S., SO., heiter. | Gew. z. Bregenz, Innsbruck, Lienz, Salzburg, Klagenfurt, Laibach, Adelsberg, St. Magdalena, Mürzzuschlag. |
| 26. „ | oftmalig. im Bl. SW., heit. | Gew. zu Bregenz. |
| 24. Sept. | $7^h 30^m$ Ab. Bl. in W. und NW., trüb. | Gew. zu Schössl, Bodenbach, Strakonitz, Trautenau, Deutschbrod, Linz mit Stürmen. |
| 24. „ | bis $11^h$ Nachts Bl. im SW. | Gew. heftig zu Innsbruck. |
| 1854. | | |
| 26. Febr. | $3^h$ M. Bl. im NW., heiter, später Donner vernehmb. | Gew. zu Ried im Innkreise mit SW. Sturm. |
| 14. Mai | nach $9^h$ Ab. Bl. im W., trüb. | ein von O. nach W. abgezogenes Gew. |
| 20. Juni | nach $8^h 45^m$ Ab. im NW. Bl., trüb. | Gew. zu Schössl, Bodenbach, Strakonitz, Pürglitz, Pilsen, Deutschbrod, Linz. |
| 25. Juli | Bl. von $8^h$ bis $9^h$ Ab. im SW., heiter. | Gew. zu Bregenz, Lienz, Alt-Aussee. |
| 1. Sept. | Ab. $7^h$ Bl. im S., heiter. | Gew. zu Admont, Alkus, Lienz. |
| 2. „ | Ab. $6^h$ u. $9^h$ Bl. im NW. heiter. | in der Nacht Gew. zu Linz. |
| 1855. | | |
| 14. April | Ab. $8^h$ bis nach $10^h$ Bl. im W. u. NW., heiter, um $12^h$ Nachts trüb mit Cumulis aus W., um $2^h$ M. wieder heiter. | Gew. in München, Bodenbach. |
| 5. Mai | $9^h$ Ab. tief im NW. Bl., trüb. | Gew. zu Schössl, Deutschbrod. |
| 25. Juni | Ab. $8^h 30^m$ bis $11^h$ im SO. häufige Blitze, heiter. | Gew. zu Laibach. |
| 27. „ | Ab. $10^h$ bis Mittern. Blitze im SW. u. S., fast heiter. | Gew. zu Admont, Jelsva. |

| Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | Zu gleicher Zeit |
|---|---|
| 1855. | |
| 31. Juni in der Nacht Bl. im SW. und S. trüb. | Gew. zu Bregenz, Lienz, Gastein, St. Paul. |
| 3. „ 11h Nachts tief im SW. Bl., heiter. | Gew. zu Bregenz, Admont, Cilli. |
| 7. „ 8h 30m Ab. bis 11h tief im SO. Bl., heiter. | . . . . . . . . |
| 8. „ nach 9h Ab. bis M. N. im SW. Bl., heiter. | Gew. in Wilten, Lienz, Gastein, Aussee, Admont. |
| 9. „ nach 9h Ab. bis M. N. heftiges Bl. im O. und SO., trüb. | Gew. in Korneuburg. |
| 13. „ Nachts 11h im SW. starkes Bl., heiter. | Gew. in Lienz, Gastein. |
| 15. „ unaufhörliches Blitzen v. 10h bis 12h Nachts tief im W., NW. und N., trüb. | Gew. zu Pilsen, Prag, Pürglitz. |
| 4. Juli Ab. tief im SO. sparsame Bl., trüb. | Gew. zu Klagenfurt, Laibach, Adelsberg. |
| 5. „ in der Nacht tief im S. Bl. heiter. | Gew. zu Admont, Klagenfurt, Cilli. |
| 7. „ 10h Ab. tief im S. Bl., trüb. | Gew. zu Aussee, Admont, Klagenfurt, Laibach, Adelsberg. |
| 8. „ 10h Ab. im O. Bl., heiter. | Gew. zu Schemnitz. |
| 8. „ 11h Nachts im S. Bl., heit. | Gew. zu Admont, Adelsberg. |
| 9. „ 10h Ab. Bl. im SO., um 11h im S., heiter. | Gew. in Laibach, Klagenfurt, St. Magdalena, Admont, Aussee. |
| 16. „ 11h Ab. im SW. Bl.; in der Nacht folgte hier Regen. | Gew. zu Salzburg. |
| 19. „ 10h Ab. im SW. Bl., heit. | Gew. zu Salzburg. |
| 23. „ nach 11h Nachts tief im O. einzelne Bl., trüb. | . . . . . . . . |
| 25. „ von 8h 30m bis 11h N. Bl. im NW., N., halb heiter. | Gew. zu Leutschau, Reichenau. |
| 3. Aug. nach 10h Ab. tief im NW. starkes Blitzen, heiter. | Gewitter zu Schössl, Pilsen, Deutschbrod, Trautenau. |
| 8. „ Ab. 9h im W., später im NW., N. heftig. Bl., trüb, nach M. N. Regen. | Gew. zu Reichenau, Linz. |
| 28. „ gegen 10h Ab. im SW. Bl., heiter. | Gew. zu Aussee. |

| | Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | Zu gleicher Zeit |
|---|---|---|
| **1855.** | | |
| 30. Aug. | von $10^h$ Ab. an häufiges Bl. im SW., heiter. | Gew. zu Bregenz, Cilli. |
| 1. Sept. | Ab. $8^h$ im SW. Bl. heiter. | Gew. zu Laibach. |
| 6. Oct. | von $8^h 15^m$ Ab. an oftmaliges Bl. im SW., rückt langsam gegen S. vor, fast heiter. | Gew. zu Adelsberg. |
| 7. „ | von $7^h$ Ab. bis M. N. tief im SSW., S. u. SO. häufiges Bl., Himmel heiter, nur in der Gegend der Bl. tief am Horizonte eine Cirrostratus-Bank. | Gew. zu Laibach, Adelsberg, St. Magdalena. |
| 27. „ | von $7^h$ Ab. bis M. N. tief im SW., später im S. u. SO., häufiges Bl., trüb. | Gew. zu Kals. |
| 28. „ | von $7^h$ Ab. bis gegen M. N. Bl., tief im SW., rückt vor gegen S. u. SO., heiter. | Gew. in Lienz, Gastein, Laibach, Adelsberg, Unter-Tilliach, Alkus, Inner-Villgratten, Wien fernes Gewitter. |
| 30. „ | von $7^h$ Ab. bis gegen M. N. Bl, im S. u. SO., heiter. | Gew. in Adelsberg. |
| **1856.** | | |
| 15. April | von $7^h 30^m$ bis $8^h$ Ab. Bl. im NO., später im O. | Gew. zu Mölk, Gresten. |
| 15. „ | nach $9^h$ Ab. öfteres Bl. im S. | Gew. zu Admont. |
| 29. „ | von $8^h 45^m$ bis $9^h 30^m$ starkes Bl. im SW., rückt langsam gegen W. und NW., wo man nach $10^h$ noch sparsam Bl. aufleuchten sieht. | Gew. zu Trautenau mit Sturm. |
| 26. Mai | Ab. $8^h 30^m$ im SO. Bl., so auch im N. aus einer tiefstehenden Gewitterw. | Gew. zu Wien, Bodenbach von $4^h$ bis $5^h$ Ab. zu Pürglitz $5^h$ Ab. |
| 30. „ | Ab. $9^h 30^m$ im NW. öfteres Bl. | Gew. zu Pilsen $10^h$ Ab. |
| 4. Juni | von $8^h 50^m$ Ab. bis $1^h 30^m$ M. Bl. anfangs im SW., dann im S. u. SO.; Him- | Gew. südöstlich von Lienz. Gew. zu Kirchdorf von $10^h$–$12^h$ N. |

| | Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | Zu gleicher Zeit |
|---|---|---|
| 1856. | mel in jener Gegend mit Cirrus bedeckt; gegen M. N. auch hier trüb. | |
| 5. Juni | 9h Ab. bis lange nach M. N. Bl. anfangs einzeln tief im W., geg. 10h im WNW. gegen 11h im NW. mit ungemeiner Heftigkeit (auf die Minute kamen über 60 Bl.); nach 11h im N.; die Gewitterwolke reicht 8—10 Grade über den Horizont, hier im übrigen heiter, nur einzelne flüchtige Cumuli kamen aus der Gegend des Gew. | Gew. zu München 9h Ab., zu Böhm.-Leipa 10h Ab., von 10h 40m bis 1h 30m Gew. zu Pilsen, Prag, Senftenberg, Olmüz. |
| 10. „ | von 9h Ab. bis M. N. im NW. einzelne Bl. in Intervallen von 1 Min.; sehr tief am Horizonte lagern einzelne Cirrus. | Gew. in fast ganz Böhmen mit der Richtung von NW. nach SO.; zu Schüssl 5h 10m Ab., zu Pilsen, Prag um 10h Ab. etc. |
| 11. „ | Nachts 10h Bl. sehr tief im SW. u. S., Cirrus an jener Stelle, im übrigen hier heiter. | Gew. zu Botzen, Trient, Meran von 6h bis 9h Ab., zu Tröpolach, Ober-Vellach, St. Paul, Klagenfurt, St. Magdalena. |
| 28. „ | Ab. 9h Bl. im NW. fast ohne Pause rückt geg. N., woselbst Cirrostratus in einer Höhe von 10 Graden lagern; übrigens heiter. | Gew. zu Böhm.-Leipa 9h Ab., zu Pilsen 9h 30m Ab., zu Prag. |
| 28. „ | 11h Nachts Bl. im SW., rückt langsam gegen S. und SO.; in jener Gegend Cumuli bis zu einer Höhe von 10—12 Graden, Bl. in Intervallen von 30 Sec.; übrigens heiter. | Gew. zu Innichen, Meran heftig, Inner-Villgratten, St. Jakob bei Gurk, Ober-Vellach, Tröpolach, Unter-Tilliach. |
| 30. „ | 10h Ab. zu gleicher Zeit Bl. im SW., SO. bis M. N.; in jener Gegend Cir- | Gew. mehrere zu Lienz von 7 bis 12h, zu Meran heftig, zu Gastein, Kals, Inner-Villgratten, Kalk- |

| 1856. | Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | Zu gleicher Zeit |
|---|---|---|
| | rostratus bis zu 10 Graden Höhe, sonst heiter. | stein, zu Plan heftiges Gew. um 9h; zu Tröpolach Unt.-Tilliach. |
| 2. Juli | 10h Ab. Bl. tief im SW. u. SO.; daselbst wenige Cirrus von 4—5 Graden Höhe, sonst heiter. | Gew. zu Innichen, Inner-Villgratten, Kalkstein, Kals, Lienz, Trient, Unter-Tilliach, Klagenfurt. |
| 4. „ | 10h Ab. und später Bl. im WSW. und SSW. in Intervallen v. 10—14 Sec.; Cirrus daselbst in einer Höhe 8—10 Graden; der übrige Himmel heiter. | Gew. zu Trient, Lienz 6h Ab., zu Inner-Villgratten, Kalkstein, Kals, Gastein von 6h 30m bis 7h, zu Klagenfurt, Unter-Tilliach. |
| 12. „ | Ab. 10h im W. öfteres Bl. worauf hier Regen folgt. | . . . . . . . . . |
| 16. „ | Ab. 8h bis 11h sparsames Bl. tief im W., rückt gegen SW., woselbst Cumuli lagern. | Von 3—5h Ab. furchtbares Gew. mit Hagel, Wolkenbruch im Berner Oberlande, am Vierwaldstädter See, zu Zürich etc. |
| 16. „ | von 8—11h Bl. im SW. u. S., wo Cumuli und Cirrus angehäuft sind. | Gew. zu Trient, Innichen, Aussee, Admont. |
| 24. „ | vom Dunkelwerden bis über M. N. hinaus starkes Bl. im SW., gegen Ende im S. in Intervallen von 3—5 Sec.; daselbst Cumuli bis zu einer Höhe von 10—15 Graden, oben lagern dünne Cirrus; der übrige Himmel heiter. | Gew. zu Innichen, Wilten, Kalkstein, Lienz, Admont. |
| 31. „ | 11h Nachts sehr tief im WSW. schwaches Bl. | Gew. südwestlich von Bludenz. |
| 2. Aug. | 9h Ab. im SW. schwach. Blitzen. | Gew. zu Kirchdorf entfernt im SW. |
| 3. „ | von 7h 30m bis 10h Bl im SW., rückt langsam gegen S. u. SO.; in jener Gegend Cumuli bis zu 10 Graden Höhe; sonst heit. | Gew. zu Lienz, Botzen, Pregratten, Luschariberg, St. Paul. |
| 4. „ | Ab. 8h fast um den ganzen Horizont Bl. bis geg. M. N. | SW. Gew. zu Botzen, Lienz, Wilten, Gastein. |

| 1856. | Blitzen beobachtet zu Kremsmünster. | Zu gleicher Zeit |
|---|---|---|
| | | S. Gew. zu St. Paul Klagenfurt. |
| | | NW. Gew. zu Schössl, Pilsen $10^h$ bis $12^h$. |
| | | N. Gew. zu Prag $11^h$ N., Deutschbrod. |
| | | O. Gew. zu Melk, Gresten, Wien, Pressburg. |
| 10. Aug. | Ab. $10^h$ bis M. N. Bl. im SW. | Gew. an mehreren Orten Tirols, zu Gastein. |
| 11. „ | Ab. $10^h$ bis M. N. Bl. tief im NNO., später im NO., wo eine Cirrostratus-Bank von 8—10 Graden Höhe lagert. | Gew. zu Schössl, Prag, Deutschbrod um $11^h$, Olmüz $9^h$—$12^h$ N., Brünn. |
| 12. „ | $7^h$ bis $9^h$ Ab. Bl. im SW., und später im S.; Himmel heiter. | Gew. zu Innichen, Wilten $7^h$ Ab., Alt-Aussee $7^h$—$9^h$ Ab., Gratz $8^h$—$9^h$ $30^m$, Cilli $8^h$ $30^m$. |
| 17. „ | Ab. $10^h$ im N. durch einige Zeit Bl. | Gew. zu Pilsen, Trautenau, Pürglitz, Schössl. |
| 18. „ | Nach $9^h$ Ab. im N. durch eine Stunde Bl. mit grosser Heftigkeit. | Gew. zu Pilsen, Leutschau, Pürglitz, Prag, Reichenau. |
| 1. Sept. | Ab. $10^h$ bis $11^h$ $30^m$ Bl. tief im NW., rückt gegen N. vor; Himmel hier heit. | Gew. zu Schössl Ab. $7^h$; zu Czaslau. |
| 3. „ | Ab. $7^h$ $30^m$ im W. mehrmal. Bl., worauf hier Regen folgt. | . . . . . . . . |
| 28. „ | Ab. $7^h$ im SW., später im S. Bl. mit grosser Lebhaftigkeit. | Gew. zu Botzen, Innichen, Alkus, Lienz $10^h$ N.; Gastein, Kirchdorf. |
| 2. Oct. | Ab. $7^h$ tief im S. öfteres Bl., Cirrostratus in jener Gegend. Tag ungewöhnlich warm, Maximum der Temperatur 21°.3 R. | Gew. zu Alkus, Lienz, Botzen, Pregratten, Tröpolach. |

In den hier aufgeführten 76 Fällen trifft es sich nur viermal:

am 7. Juni 1855 im SO.,
„ 23. Juli 1855 im O.,
„ 12. Juli 1856 im W.,
„ 3. Sept. 1856 im W.,

wo ich gar keine Nachricht von einem gleichzeitigen Gewitter habe auffinden können. In Betreff der beiden letzten Fälle bemerke ich, dass im Westen von Kremsmünster keine meteorologische Beobachtungsstation besteht und die Beobachtungen in Salzburg nicht vollständig zu meiner Kenntniss gelangten.

Einen weiteren Beleg für den Zusammenhang des Wetterleuchtens mit einem entfernten unter dem Horizonte des Beobachtungsortes stehenden Gewitter geben die Beobachtungen zu Wien in den Jahren 1853 bis 1857, wo es sich in mehr als fünfzig Fällen trifft, dass jedesmal wenn man in Wien am äussersten West, Südwest oder Nordwest Wetterleuchten beobachtete, bei uns oder in den Nachbargegenden gleichzeitig Gewitter stattfanden.

Durch diese Beobachtungen gelangt man zugleich zur Kenntniss, bis auf welche Entfernung das Aufleuchten der Blitze noch wahrgenommen werden kann.

Es wird in den oben angeführten Fällen öfters der Umstand eintreten, das die Zeit des in Kremsmünster beobachteten Wetterleuchtens wegen der mangelhaften Zeitangaben von stattgehabten Gewittern an andern Orten nicht genau mit der zusammenfällt, zu welcher an einem zweiten Orte das Gewitter im Zenithe stand, oder über jener Gegend sich entlud; aber man erlangt dennoch einen Anhaltspunkt zur genäherten Bestimmung der Entfernungen.

Es folgen hier in geographischen Meilen die beiläufigen Entfernungen der im obigen Verzeichnisse aufgeführten am weitesten von Kremsmünster abstehenden Orte, an welchen gleich- oder nahe gleichzeitig mit dem in Kremsmünster beobachteten Wetterleuchten Donnerwetter stattgefunden haben.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Im | W. | München | entfernt | von | Kremsmünster | 37 | geogr. | Meilen. |
| „ | SW. | Bregenz | „ | „ | „ | 64 | „ | „ |
| „ | „ | Innsbruck | „ | „ | „ | 44 | „ | „ |
| „ | „ | Lienz | „ | „ | „ | 33 | „ | „ |
| „ | „ | Gastein | „ | „ | „ | 26 | „ | „ |
| „ | „ | Salzburg | „ | „ | „ | 16 | „ | „ |

Im SW. Brixen entfernt von Kremsmünster 31 geogr. Meilen.
„ „ Botzen „ „ „ 37 „ „
„ „ Trient „ „ „ 44 „ „
„ S. Adelsberg „ „ „ 50 „ „
„ SSO. Klagenfurt „ „ „ 31 „ „
„ „ Laibach „ „ „ 45 „ „
„ SO. Cilli „ „ „ 44 „ „
„ „ Gratz „ „ „ 26 „ „
„ O. Wien „ „ „ 34 „ „
„ „ Schemnitz „ „ „ 68 „ „
„ NO. Brünn „ „ „ 32 „ „
„ N. Prag „ „ „ 44 „ „
„ „ Bodenbach „ „ „ 61 „ „
„ NW. Schössl „ „ „ 50 „ „
„ „ Deutschbrod „ „ „ 44 „ „
„ „ Pürglitz „ „ „ 42 „ „
„ „ Pilsen „ „ „ 37 „ „

Im Mittel von 23 Orten ergiebt sich . . = 40m.9 geogr. Meilen.
Mit Hinweglassung der drei entferntesten
Orte: Bregenz, Schemnitz, Bodenbach = 37.1 „ „

## XXII.

# Ueber die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch unendliche Reihen.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

Die Fourier'schen Reihen bilden ein Beispiel einer Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch unendliche Reihen; ähnliche Beispiele bietet die mathematische Physik eine ganze Menge dar, wobei freilich anzuführen ist, dass in den meisten Fällen der direkte Beweis noch nicht geführt ist, vielleicht auch nicht nothwendig ist, ihn zu führen, wie wenigstens Lamé in seinem neuesten Werke meint. Dem sei nun, wie man will; im Folgenden will ich, indem ich eine Reihe Abhandlungen von Sturm und Liouville, die früher in des letztern Journal erschienen sind, zusammenfasse, für einen besondern Fall, der namentlich in der analytischen Theorie der Wärme vorkommt, diesen Beweis wiederholen. Ich glaube hiedurch den Lesern des Archivs in so ferne einen Dienst zu leisten, als ich sie der Mühe überhebe, aus einer grössern Anzahl zerstreuter Abhandlungen sich die Dinge erst zurecht legen zu müssen.

### I.

Angenommen, $g$, $k$, $l$ seien drei Funktionen von $x$, die von $x=\alpha$ bis $x=\beta(\beta>\alpha \overline{\gtrless} 0)$ immer positiv seien; $r$ sei eine unbestimmte, von $x$ unabhängige Grösse; $V$ sei eine Funktion von $x$ und $r$, für welche

$$\frac{\partial[k\frac{\partial V}{\partial x}]}{\partial x}+(rg-l)V=0, \qquad (1)$$

so wie

$$\frac{\partial V}{\partial x}-hV=0 \text{ für } x=\alpha, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}+HV=0 \text{ für } x=\beta; \qquad (3)$$

wo $h$ und $H$ positive Zahlen sind, und wo die letzte Gleichung den oder die Werthe von $r$ bestimmt, während die erste die durch die Integration eintretende Konstante bestimmen hilft. Bezeichnen wir $\frac{\partial V}{\partial x}+HV$ für $x=\beta$ durch $F(r)$, so hat man also, wenn $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $F(r)=0$ sind:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial[k\frac{\partial V_n}{\partial x}]}{\partial x}+(r_n g-l)V_n=0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial x}-hV_n=0\ (x=\alpha), \\ \frac{\partial V_n}{\partial x}+HV_n=0\ (x=\beta)\end{array}\right\} \qquad (4)$$

wo $V_n$ den Werth von $V$ für $r=r_n$ bedeutet. Aus (1) und (4) folgt:

$$V_n\frac{\partial[k\frac{\partial V}{\partial x}]}{\partial x}+(gr-l)VV_n-V\frac{\partial[k\frac{\partial V_n}{\partial x}]}{\partial x}-(gr_n-l)VV_n=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial[k(V_n\frac{\partial V}{\partial x}-V\frac{\partial V_n}{\partial x})]}{\partial x}=g(r_n-r)VV_n,$$

woraus sofort

$$(r-r_n)\int VV_n\partial x=k[V\frac{\partial V_n}{\partial x}-V_n\frac{\partial V}{\partial x}]+C,$$

und, da für $x=\alpha$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=hV, \quad \frac{\partial V_n}{\partial x}=hV_n$$

ist:

$$\int_\alpha^x VV_n\partial x=\frac{k}{r-r_n}[V\frac{\partial V_n}{\partial x}-V_n\frac{\partial V}{\partial x}]. \qquad (5)$$

Diese Gleichung setzt natürlich voraus, dass nicht $r=r_n$ ist, d. h. dass $r$ und $r_n$ zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $F(r)=0$ seien, so dass man dieselbe auch schreiben kann:

$$\int_\alpha^x V_m V_n \partial x = \frac{k}{r_m - r_n}\left[V_m \frac{\partial V_n}{\partial x} - V_n \frac{\partial V_m}{\partial x}\right], \qquad (5')$$

wenn nicht $n=m$. In diesem letzteren Falle verfährt man etwa in folgender Weise. Aus (1) folgt, indem man nach $r$ differenzirt:

$$\frac{\partial\left[k\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r}\right]}{\partial x} + (gr-l)\frac{\partial V}{\partial r} + gV = 0;$$

multiplizirt man nun (1) mit $\frac{\partial V}{\partial r}$, die letzte Gleichung mit $V$, und subtrahirt, so erhält man:

$$gV^2 = \frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{\partial\left[k\frac{\partial V}{\partial x}\right]}{\partial x} - V\frac{\partial\left[k\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial r}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[k\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r}\right)\right]}{\partial x},$$

$$\int gV^2\partial x = k\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial r}\right) + C.$$

Für $x=\alpha$ aber folgt aus (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = hV, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r} = h\frac{\partial V}{\partial r},$$

so dass hiernach:

$$\int_\alpha^x gV_n^2\partial x = k\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial r}\right) \text{ für } r=r_n. \qquad (6)$$

Setzt man in (5') $x=\beta$, so wird wegen (3) die zweite Seite Null; was die zweite Seite von (6) anbelangt, so ist für $x=\beta$:

$$k\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial r}\right)$$

$$= -kV\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + HV\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + HV\right)k\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$= -kV\frac{\partial F(r)}{\partial r} + F(r)k\frac{\partial V}{\partial r} = -kVF'(r), \text{ wenn } r=r_n,$$

so dass

$$\int_\alpha^\beta gV_nV_m\partial x = 0, \qquad (7)$$

$$\int_\alpha^\beta gV_n^2\partial x = -kV_nF'(r_n) \text{ für } x=\beta. \qquad (8)$$

## II.

Was nun die Gleichung $F(r)=0$ anbelangt, so kann sie keine imaginäre Wurzel der Form $\varrho+\varrho'i$ haben. Sonst hätte sie nämlich nothwendig auch eine imaginäre Wurzel der Form $\varrho-\varrho'i$, so dass also etwa $r_n=\varrho+\varrho'i$, $r_m=\varrho-\varrho'i$ wäre, und dann $V_n=P+Qi$, $V_m=P-Qi$, woraus nach (7):

$$\int_\alpha^\beta g(P^2+Q^2)\partial x = 0,$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist, da alle Elemente des bestimmten Integrals dasselbe (positive) Zeichen haben. Eben so hat $F(r)=0$ keine gleichen Wurzeln. Denn wäre $r_n$ mehrfach Wurzel, so wäre $F'(r_n)=0$, so dass nach (8) $\int_\alpha^\beta gV_n^2\partial x=0$, was wieder unmöglich ist. Aber es lässt sich auch leicht zeigen, dass $F(r)=0$ keine negativen Wurzeln haben kann. Denn aus (1) folgt:

$$\int_\alpha^x V\frac{\partial(k\frac{\partial V}{\partial x})}{\partial x}\partial x = \int_\alpha^x (l-rg)V^2\partial x,$$

$$Vk\frac{\partial V}{\partial x}-(kV\frac{\partial V}{\partial x})_{x=\alpha}-\int_\alpha^x k(\frac{\partial V}{\partial x})^2\partial x = \int_\alpha^x (l-rg)V^2\partial x,$$

$$Vk\frac{\partial V}{\partial x} = (kV\frac{\partial V}{\partial x})_{x=\alpha}+\int_\alpha^x k(\frac{\partial V}{\partial x})^2\partial x+\int_\alpha^x (l-rg)V^2\partial x.$$

Nun ist nach (2)

$$(kV\frac{\partial V}{\partial x})_{x=\alpha} = (hkV^2)_{x=\alpha},$$

also positiv; wäre also $r$ negativ, so wäre hiernach $Vk\frac{\partial V}{\partial x}$ sicher

positiv, d. h. es hätten $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ immer dasselbe Zeichen, und es könnte also $V+H\frac{\partial V}{\partial x}$ nie Null sein, was gegen (3) streitet. Darnach hat $F(r)=0$ keine negativen Wurzeln. Ist nicht $l=0$, so kann aus demselben Grunde auch $r=0$ nicht Wurzel sein; für $l=0$ wäre es jedoch möglich, dass $r=0$ sein könnte.

Die Gleichung $F(r)=0$ hat also hiernach lauter reelle positive, von einander verschiedene Wurzeln. Für $l=0$ kann sie 0 zur Wurzel haben. Die Konstanten $h$ und $H$ in (2) und (3) können auch 0 oder $\infty$ sein. $h=0$ heisst, es sei $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ für $x=\alpha$; $h=\infty$: $V$ sei 0 für $x=\alpha$; $H=0$: $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ für $x=\beta$; $H=\alpha$: $V=0$ für $x=\beta$. Selbst, wenn $h=0$ oder $\infty$, bleibt die Behauptung des gegenwärtigen Paragraphen in Kraft. Denn dann ist nur $(kV\frac{\partial V}{\partial x})_{x=\alpha}$ Null, statt positiv.

## III.

Wir wollen nun die (1) umformen, indem wir statt $x$ die neue Veränderliche $z$ einführen, so dass $z=\int_\alpha^x\sqrt{\frac{g}{k}}\partial x$, wo also $z$ wächst mit $x$, indem $\sqrt{\frac{g}{k}}>0$; für $x=\beta$ sei $z=b$, während für $x=\alpha$: $z=0$. Alsdann wird allgemein

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial z}\sqrt{\frac{g}{k}},$$

also die (1):

$$\frac{\partial[k\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{\partial V}{\partial z}]}{\partial z}\sqrt{\frac{g}{k}}+(gr-l)V=0,$$

$$\frac{\partial[\sqrt{gk}\frac{\partial V}{\partial z}]}{\partial z}+(r\sqrt{gk}-l\sqrt{\frac{k}{g}})V=0,$$

oder

$$\sqrt{gk}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\sqrt{gk}}{\partial z}+(r\sqrt{gk}-l\sqrt{\frac{k}{g}})V=0. \qquad (10)$$

Wir wollen nun setzen

$$V = \Theta U, \quad \Theta = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}};$$

so wird die (10) zu:

$$\sqrt{gk}\left(U\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} + 2\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \Theta\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \left(U\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \Theta\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial(\sqrt{gk})}{\partial z}$$

$$+\left(r\sqrt{gk} - l\sqrt{\frac{k}{g}}\right)\Theta U = 0.$$

Der Koeffizient von $\frac{\partial U}{\partial z}$ ist hierin:

$$2\sqrt{gk}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \Theta\frac{\partial(\sqrt{gk})}{\partial z} = \frac{2}{\Theta^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \Theta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Theta^2}\right) = 0,$$

so dass, wenn

$$l\sqrt{\frac{k}{g}}\Theta - \frac{\partial(\sqrt{gk})}{\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \sqrt{gk}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = \Theta\sqrt{gk}.\lambda$$

ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varrho^2 U = \lambda U, \qquad (10')$$

wo $\varrho^2 = r$, welch letztere Bezeichnungsweise gestattet ist, da $r > 0$. Die (2) und (3) sind jetzt:

(11)

$$\frac{\partial V}{\partial z} - h\sqrt{\frac{k}{g}}V = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} + H\sqrt{\frac{k}{g}}V = 0 \text{ für } z = b,$$

d. h. wenn $U$ eingeführt wird:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - h'U = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} + H'U = 0 \text{ für } z = b, \qquad (11')$$

wo

$$h' = h\sqrt{\frac{k}{g}}\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial z}, \quad H' = H\sqrt{\frac{k}{g}} + \frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

je für die betreffenden Werthe von $z$. Aus (10') folgt, wenn man mit $\sin\varrho z$ multiplizirt und dann integrirt:

$$\sin\varrho z\frac{\partial U}{\partial z} - \varrho U\cos\varrho z = C + \int_0^z \lambda U \sin\varrho z \partial z,$$

wo

$$C = \left[\sin \varrho z \frac{\partial U}{\partial z} - \varrho U \cos \varrho z\right]_{z=0} = -\varrho U_0,$$

wenn $U_0$ der Werth von $U$ für $z=0$ ist. Diese Grösse bleibt aber hier ganz willkürlich, und wir wollen sie desshalb $=1$ setzen, so dass wir schreiben können:

$$\sin \varrho z \frac{\partial U}{\partial z} - \varrho U \cos \varrho z = -\varrho + \int_0^z \lambda U \sin \varrho z \partial z. \qquad (12)$$

Ist aber $U_0 = 1$, so ist nach (11') $\frac{\partial U}{\partial z} = h'$ für $z=0$, so dass wir in ähnlicher Weise erhalten:

$$\cos \varrho z \frac{\partial U}{\partial z} + \varrho U \sin \varrho z = h' + \int_0^z \lambda U \cos \varrho z \partial z. \qquad (12')$$

Aus (12) und (12') folgt:

$$U = \cos \varrho z + \frac{h' \sin \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \sin \varrho z \int_0^z \lambda U \cos \varrho z \partial z$$
$$- \frac{1}{\varrho} \cos \varrho z \int_0^z \lambda U \sin \varrho z \partial z,$$

so dass, wenn $\lambda'$, $U'$ die Werthe von $\lambda$, $U$ sind, wenn man $z'$ für $z$ setzt, man hat:

$$U = \cos \varrho z + \frac{h' \sin \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho (z - z') \partial z'. \qquad (13)$$

Anmerkung. Dass $U_0$ willkürlich bleibt, unterliegt wohl keinem Anstande, da die erste Gleichung (11') eine Gleichung zwischen $U_0$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0$ ist, diese letzteren Grössen aber wegen (10') beide sollten bekannt sein, wenn (10') die $U$ völlig bestimmen soll, so dass eben eine willkürlich bleibt. Die zweite (11') bestimmt ja nur $r$, nicht auch die durch Integration von (10') eintretenden zwei Konstanten.

## IV.

Die Grösse $V$ wird nie unendlich innerhalb der Gränzen $\alpha$ und $\beta$ von $x$, also auch $U$ nicht unendlich von $z=0$ bis $z=b$; hiernach giebt es einen grössten endlichen Werth von $U$ zwischen

diesen Gränzen; heisst derselbe $Q$ und ist eben so $L$ der grösste Werth von $\lambda$ in demselben Intervall, so ist der Werth des Integrals

$$\int_0^z \lambda' U' \sin\varrho(z-z')\partial z'$$

sicher kleiner als $LQ\int_0^z \partial z'$ oder kleiner als $LQb$, wo alle Grössen nur absolut zu nehmen sind. Ferner ist der grösste Werth, den $\cos\varrho z + \frac{h'}{\varrho}\sin\varrho z$ erreicht: $\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$, so dass also die zweite Seite von (13) kleiner ist als $\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}+\frac{LQb}{\varrho}$, und also immer $U$ unter diesem Werthe bleibt. Daraus folgt aber sofort, dass auch $Q$ unter diesem Werthe ist, d. h. dass

$$Q<\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}+\frac{LQb}{\varrho},\quad Q<\frac{\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}}{1-\frac{Lb}{\varrho}},$$

wenn $\varrho > Lb$.

Wäre $\varrho>2Lb$, so wäre $\frac{LQb}{\varrho}<\frac{1}{2}Q$, also $Q<\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}+\frac{1}{2}Q$, d. h. sogar $Q<2\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$. Nimmt man also $\varrho$ gross genug, was immer möglich, wenn man grosse Wurzeln von $F(r)=0$ betrachtet, so wird man diese Beziehung gelten lassen und folglich dann $U<2\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$ haben. Da $V=\Theta U$, so folgt hieraus, dass, wenn $\delta$ der grösste Werth von $\Theta$ ist, man habe $V<2\delta\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$, immerhin jedoch für $\varrho>2Lb$.

Ist endlich $F$ das Maximum von $f(x)$, wenn $x$ geht von $\alpha$ bis $\beta$, wo $f(x)$ eine beliebige Funktion von $x$ ist, so ist hiernach

(14)

$$V\int_\alpha^\beta gVf(x)\partial x<2\delta\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}\int_\alpha^\beta 2G\delta\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}F\partial x,$$

$$\text{d. h.}\ <4\delta^2\left[1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2\right]GF(\beta-\alpha),$$

wenn $G$ der Maximumwerth von $g$ (zwischen $\alpha$ und $\beta$) ist.

Betrachten wir nun das Integral

$$\int_\alpha^\beta gV^2\partial x = \int_0^b U^2\partial z.$$

Da in (13) das Integral zweiter Seite $< LQb$, so kann man, wenn $\varepsilon$ endlich, setzen:

$$U = \cos\varrho z + \frac{k'}{\varrho}\sin\varrho z + \frac{\varepsilon}{\varrho},$$

$$\int_0^b U^2\partial z = \frac{b}{2}[1 + \left(\frac{k'}{\varrho}\right)^2] + \frac{\sin 2\varrho b}{4\varrho} + \frac{k'\sin^2\varrho b}{2\varrho^2} - \frac{k'^2\sin 2\varrho b}{4\varrho^3}$$

$$+ \frac{2}{\varrho}\int_0^b \varepsilon\cos\varrho z\partial z + \frac{2}{\varrho^2}\int_0^b \varepsilon k'\sin\varrho z\partial z + \frac{1}{\varrho^2}\int_0^b \varepsilon^2\partial z,$$

d. h.

$$\int_0^b U^2\partial z = \frac{b}{2}[1 + \left(\frac{k'}{\varrho}\right)^2] + \frac{\eta}{\varrho},$$

wo $\eta$ endlich ist, so dass für grosse $\varrho$ der Bruch $\frac{\eta}{\varrho}$ beliebig klein wird, also etwa $< \frac{b}{4}[1 + \left(\frac{k'}{\varrho}\right)^2]$, mithin sicher für grosse $\varrho$:

(15)

$$\int_0^b U^2\partial z > \frac{b}{4}[1 + \left(\frac{k'}{\varrho}\right)^2], \quad \text{d. h.} \int_\alpha^\beta gV^2\partial x > \frac{b}{4}[1 + \left(\frac{k'}{\varrho}\right)^2].$$

Aus (14) und (15) folgt nun:

$$\frac{V\int_\alpha^\beta gVf(x)\partial x}{\int_\alpha^\beta gV^2\partial x} < \frac{16(\beta-\alpha)\delta^2 GF}{b},$$

freilich immer wenn $\varrho$ gross genug. Setzt man aber

$$f_1(x) = lf(x) - \frac{\partial}{\partial x}[k\frac{\partial f}{\partial x}]$$

und nimmt an, es sei

(16)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - hf(x) = 0 \text{ für } x = \alpha, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} + Hf(x) = 0 \text{ für } x = \beta,$$

so ist aus (1):

$$\int gVf(x)\partial x = \frac{1}{r}\int lVf(x)\partial x - \frac{1}{r}\int f(x)\frac{\partial(k\frac{\partial V}{\partial x})}{\partial x}\partial x$$

$$= \frac{1}{r}\int lVf(x)\partial x - \frac{k}{r}[f(x)\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial f(x)}{\partial x}] - \frac{1}{r}\int V\frac{\partial}{\partial x}[k\frac{\partial f(x)}{\partial x}]\partial x,$$

also wegen (16), (2), (3):

$$\int_\alpha^\beta gVf(x)\partial x = \frac{1}{r}\int_\alpha^\beta lVf(x)\partial x - \frac{1}{r}\int_\alpha^\beta V\frac{\partial}{\partial x}[k\frac{\partial f(x)}{\partial x}]\partial x$$

$$= \frac{1}{r}\int_\alpha^\beta Vf_1(x)\partial x.$$

Ist demnach $F_1$ das Maximum von $f_1(x)$, so ist, wie in (14):

$$V\int_\alpha^\beta Vf_1(x)\partial x < 4\delta^2[1 + \left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2]F_1(\beta - \alpha),$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} &\frac{V\int_\alpha^\beta Vf_1(x)\partial x}{r\int_\alpha^\beta gV^2\partial x} < \frac{16(\beta-\alpha)\delta^2F_1}{rb}, \\ \text{d. h.} \quad &\frac{V\int_\alpha^\beta gVf(x)\partial x}{\int_\alpha^\beta gV^2\partial x} < \frac{16(\beta-\alpha)\delta^2F_1}{b\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

## V.

Was nun aber die Werthe von $\varrho$ (bezüglich $r$) anbelangt, so ist nach (13):

$$U=\cos\varrho z[1-\frac{1}{\varrho}\int_0^z \lambda' U' \sin\varrho z' \partial z']$$

$$+\sin\varrho z[\frac{h'}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\int_0^z \lambda' U' \cos\varrho z' \partial z'],$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\sin\varrho z[\varrho-\int_0^z \lambda' U' \sin\varrho z' \partial z']$$

$$+\cos\varrho z[h'+\int_0^z \lambda' U' \cos\varrho z' \partial z'].$$

Da für $z=b$:

$$\frac{\partial U}{\partial z}+H'U=0$$

sein soll, so folgt hieraus, wenn

$$P=h'+H'+\int_0^b \lambda' U'[\cos\varrho z'-\frac{H'\sin\varrho z'}{\varrho}]\partial z',$$

$$P'=\frac{H'h'}{\varrho}+\int_0^b \lambda' U'[\frac{H'\cos\varrho z'}{\varrho}+\sin\varrho z']\partial z'$$

gesetzt wird:

$$P\cos\varrho b-(\varrho-P')\sin\varrho b=0,\ \ \operatorname{tg}\varrho b=\frac{P}{\varrho-P'}. \tag{18}$$

Die Grösse $P$ ändert ihr Zeichen nicht, wenn $\varrho$ sein Zeichen ändert; dagegen ändert $P'$ ihr Zeichen mit $\varrho$. Konstruiren wir nun die beiden Kurven, deren Gleichungen

$$y=\operatorname{tg}\varrho b,\ y=\frac{P}{\varrho-P'},$$

in denen $\varrho$ als Abszisse betrachtet wird, so hat die letztere die Abszissenaxe als Asymptote, nähert sich ihr also mehr und mehr, während die erste in unendlich vielen Zweigen verläuft; es giebt demnach unendlich viele Durchschnittspunkte beider Kurven, d. h. unendlich viele Werthe von $\varrho$, für welche die Gleichung (18) erfüllt ist, so dass dieselbe unendlich viele Wurzeln hat. Ist nun $\varrho$ einmal gross, so wird $P$ und $P'$ endlich, und also die zweite Seite von (18) klein; da nun aus (18) folgt

$$\varrho b=m\pi+\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\frac{P}{\varrho-P'}),$$

so ist also bei grossem (positivem ganzem) $m$ die Grösse

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{P}{\varrho - P'}\right)$$

klein, etwa $= \varepsilon$, so dass

$$\varrho b = m\pi + \varepsilon, \quad \varrho = \frac{m\pi}{b} + \varepsilon',$$

wo $\varepsilon'$ klein; dies kann man auch schreiben:

$$\varrho = \frac{3m}{b} + \frac{(\pi - 3)m}{b} + \varepsilon',$$

und da $\pi > 3$, so ist $\varrho > \frac{3m}{b}$, wenn $m$ gross genug ist. Daraus folgt in (17):

$$\frac{V \int_\alpha^\beta g V f(x) \partial x}{\int_\alpha^\beta g V^2 \partial x} < \frac{16(\beta - \alpha)\delta^2 F_1 b}{9m^2}, \tag{17'}$$

wenn nur $m$, d. h. $\varrho$ sehr gross. Dabei ist $m$ gewissermassen die Ordnungszahl der Wurzeln von (18), d. h. die grossen Wurzeln dieser Gleichung sind nahezu:

$$\frac{m\pi}{b}, \quad \frac{(m+1)\pi}{b}, \quad \frac{(m+2)\pi}{b}, \ldots\ldots$$

Wir wollen nun die unendliche Reihe

$$\Sigma \frac{V \int_\alpha^\beta g V f(x) \partial x}{\int_\alpha^\beta g V^2 \partial x} \tag{19}$$

betrachten, die man erhält, wenn man in der Grösse unter dem $\Sigma$, welche $r$ enthält, für $r$ nach einander die Wurzeln der Gleichung $F(r) = 0$ setzt, d. h. für $\varrho$ nach einander die Wurzeln von (18), so wird von einem gewissen Gliede an der Rest nach (17') kleiner sein als

$$\frac{16(\beta - \alpha)\delta^2 F_1 b}{9}\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots\right];$$

und da diese Reihe endlich ist, so konvergirt mithin die

Reihe (19). Sei also, wenn wir die Bezeichnung des §. I. wieder aufzunehmen:

$$\varphi(x) = \frac{V_1 \int_\alpha^\beta g V_1 f(x) \partial x}{\int_\alpha^\beta g V_1^2 \partial x} + \frac{V_2 \int_\alpha^\beta g V_2 f(x) \partial x}{\int_\alpha^\beta g V_2^2 \partial x} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{V_n \int_\alpha^\beta g V_n f(x) \partial x}{\int_\alpha^\beta g V_n^2 \partial x} + \ldots,$$

so erhält man hieraus, wenn man beiderseitig mit $V_m$ multiplizirt und hierauf nach $x$ zwischen den Gränzen $\alpha$ und $\beta$ integrirt, nach (7):

(20)

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) V_m \partial x = \int_\alpha^\beta g V_m f(x) \partial x\,, \quad \int_\alpha^\beta g V_m [\varphi(x) - f(x)] \partial x = 0,$$

welche Gleichung für alle Werthe von $m$ richtig ist, d. h. welche Wurzel von $F(r) = 0$ man in $V$ einsetze.

## VI.

Wir wollen nun die Eigenschaften der Funktion $V$ noch etwas näher untersuchen.

1. $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ kann nicht zugleich Null sein. Denn sonst, da $k$ nicht Null ist, gäbe die (1) auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$, und dann, wie man leicht sieht, auch $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}, \ldots$ sämmtlich 0, was darauf zurückkäme, dass $V$ immer Null ist. — Man kann übrigens den Satz auch noch anders beweisen. Der Werth von $V$ aus (1) hat die Form $AV_1 + BV_2$, wo $A$ und $B$ zwei Konstanten, $V_1$ und $V_2$ zwei partikulare Integrale von (1) sind, worin man nun etwa $A$ und $B$ aus den bekannten Werthen von $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x = a$ bestimmen

kann. Bezeichnet man also mit $V'$, $\frac{\partial V'}{\partial x}$, $V_1'$, $V_2'$ die Werthe von $V, \ldots, V_2$ für $x=a$, so hat man:

$$V = AV_1 + BV_2,\quad V' = AV_1' + BV_2',\quad \frac{\partial V}{\partial x} = A\frac{\partial V_1}{\partial x} + B\frac{\partial V_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = A\frac{\partial V_1'}{\partial x} + B\frac{\partial V_2'}{\partial x}.$$

Gäbe es also einen Werth $x=b$, für den $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, und bezeichnet man mit $V_1'', \ldots$ die zugehörigen Werthe von $V_1, \ldots,$ so wäre:

$$AV_1'' + BV_2'' = 0,\quad A\frac{\partial V_1''}{\partial x} + B\frac{\partial V_2''}{\partial x} = 0;$$

$$B = -\frac{AV_1''}{V_2''},\quad V_2''\frac{\partial V_1''}{\partial x} - V_1''\frac{\partial V_2''}{\partial x} = 0.$$

Aber $V_1$ und $V_2$ genügen der (1), so dass

$$\frac{\partial(k\frac{\partial V_1}{\partial x})}{\partial x} + (gr-l)V_1 = 0,\quad \frac{\partial(k\frac{\partial V_2}{\partial x})}{\partial x} + (gr-l)V_2 = 0;$$

woraus

$$V_2\frac{\partial(k\frac{\partial V_1}{\partial x})}{\partial x} - V_1\frac{\partial(k\frac{\partial V_2}{\partial x})}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[k(V_2\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V_2}{\partial x})] = 0,$$

d. h.

$$k(V_2\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V_2}{\partial x}) = C,$$

wo $C$ konstant. Da nun für $x=b$ die Grösse

$$V_2\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

sein sollte, so wäre allgemein $C=0$, d. h.

$$V_2\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

Aber es ist

$$V\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V}{\partial x} = B\left(V_2\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V_2}{\partial V}\right),$$

also wäre auch

$$V\frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1\frac{\partial V}{\partial x}.$$

immer Null; ebenso

$$V\frac{\partial V_2}{\partial x} - V_2\frac{\partial V}{\partial x}$$

immer Null. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$\frac{1}{V_1}\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{1}{V_2}\frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad l(V_1) = cl(V_2), \quad V_1 = cV_2,$$

was nicht sein darf, wenn

$$AV_1 + BV_2$$

das allgemeine Integral ist. Daraus folgt nun die Behauptung.

Sind aber $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ niemals zugleich Null, so muss $V$ sein Zeichen wechseln, wenn es durch 0 geht, da $\frac{\partial V}{\partial x}$ alsdann sein Zeichen behält, also $V$ im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist. Geht also $V$ von $+$ zu $-$, so ist $\frac{\partial V}{\partial x}$ negativ; geht $V$ von $-$ zu $+$, so ist $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$, und man hat also:

$$\begin{array}{lcc} V: & +\ 0\ - & \qquad -\ 0\ + \\ & & \text{oder} \\ \frac{\partial V}{\partial x}: & -\ -\ - & \qquad +\ +\ + \end{array}$$

2. $V$ ist eine Funktion von $x$ und $r$, die mit $V(x, r)$ bezeichnet werden soll. Sind nun $\varrho$, $\varrho'$ zwei Werthe von $r$, von denen $\varrho' > \varrho$, wenn auch nur um unendlich wenig, so sage ich, dass $V(x, \varrho')$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ (§. I.) zum mindesten eben so viele Male Null wird als $V(x, \varrho)$. Sei $\xi$ ein Werth von $x$, für den $V(x, \varrho) = 0$, so folgt aus der Gleichung (6), in der $r_n$ ganz wohl den Werth $\varrho$ haben kann, da die erste Seite positiv ist, dass für $x = \xi$ nothwendig $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial r}$ dasselbe Zeichen haben

(indem $V \pm 0$). Ist also $a < \xi$, aber nahe genug an $\xi$, so dass $V(x, \varrho)$ nicht 0 ist von $x = a$ bis $x = \xi$; also $V$ für Werthe zwischen $a$ und $\xi$ dasselbe Zeichen hat, so wird nach Nr. 1. $\frac{\partial V}{\partial x}$ das entgegengesetzte Zeichen haben für dieselben Werthe. Ist $\varrho'$ nahe an $\varrho$, so haben $V(x, \varrho')$ und $V(x, \varrho)$ dasselbe Zeichen, also das entgegengesetzte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x = \xi$, immer unter der Voraussetzung, es sei $x$ zwischen $a$ und $\xi$. Nun ist

$$V(\xi, \varrho') = V(\xi, \varrho) + (\varrho' - \varrho)\frac{\partial V(\xi, \varrho)}{\partial \varrho} + \dots = (\varrho' - \varrho)\frac{\partial V(\xi, \varrho)}{\partial \varrho} + \dots,$$

so dass für kleine $\varrho' - \varrho$ immer $V(\xi, \varrho')$ dasselbe Zeichen hat wie $\frac{\partial V(\xi, \varrho)}{\partial \varrho}$, d. h. dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x = \xi$, $r = \varrho$. Darnach also haben $V(a, \varrho')$ und $V(\xi, \varrho')$ verschiedenes Zeichen, so dass $V(x, \varrho')$ mindestens einmal durch 0 geht, wenn $x$ von $a$ bis $\xi$ geht. Also sind die Wurzeln von $V(x, \varrho') = 0$ mindestens in derselben Anzahl, wie die von $V(x, \varrho)$, aber je etwas kleiner.

Sei nun $V(x, \varrho') = 0$ für $x = \xi'$, $b > \xi'$; aber so, dass $V(x, \varrho')$ nicht Null wird, wenn $x$ von $\xi'$ bis $b$ geht. Alsdann hat $V(x, \varrho')$ in diesen Gränzen dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x = \xi'$, $r = \varrho'$ (nach Nr. 1.); die Grössen $V(b, \varrho)$, $V(b, \varrho')$ haben dasselbe Zeichen, wenn $\varrho' - \varrho$ klein genug, und da

$$V(\xi', \varrho) = V(\xi', \varrho') + (\varrho - \varrho')\frac{\partial V(\xi', \varrho')}{\partial \varrho'} + \dots = (\varrho - \varrho')\frac{\partial V(\xi', \varrho')}{\partial \varrho'} + \dots,$$

so haben $V(\xi', \varrho)$ und $\frac{\partial V(\xi', \varrho')}{\partial \varrho'}$ verschiedenes Zeichen, also auch $V(\xi', \varrho)$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x = \xi'$, $r = \varrho'$. Da nun $V(b, \varrho)$, $V(b, \varrho')$ dasselbe Zeichen haben, wie $\frac{\partial V}{\partial x}$, $V(\xi', \varrho)$ verschiedenes, so wird $V(x, \varrho)$ Null zwischen $x = \xi'$ und $x = b$. Ist also $\varrho'$ nur wenig grösser als $\varrho$, so sind die Wurzeln von $V(x, \varrho) = 0$ je um etwas grösser als die von $V(x, \varrho') = 0$.

3. Angenommen $V(x, \varrho)$ und $V(x, \varrho')$ haben dasselbe Zeichen für $x = \alpha$, ohne Null zu sein, und es gelte dasselbe für $x = \beta$, so müssen, wenn $x$ von $\alpha$ bis $\beta$ geht, nach Nr. 2., beide gleich vielmal durch 0 gehen, je aber die letzte etwas früher als die

erste. Ist $V(\beta, \varrho) = 0$, so gilt dasselbe; ist $V(\beta, \varrho') = 0$, so geht $V(x, \varrho)$ einmal weniger durch 0 als $V(x, \varrho')$.

Wir wollen nun $r$ gehen lassen von $\mu$ bis $\mu'(\mu' > \mu)$, so werden $V(x, \mu)$, $V(x, r)$ zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ so lange gleich vielmal durch 0 gehen, als keine Wurzel der Gleichung $V(\beta, r) = 0$ erreicht ist; sobald aber eine erreicht ist, findet jedesmal ein weiteres Verschwinden Statt. Also so viel Wurzeln der Gleichung $V(\beta, r) = 0$ zwischen $\mu$ und $\mu'$ liegen, so vielmal mehr verschwindet $V(x, \mu')$ als $V(x, \mu)$, wenn $x$ von $\alpha$ bis $\beta$ geht. Dabei sind die Fälle, da $V(\alpha, r)$ verschwindet, nicht eingerechnet, d. h. diese Grösse soll nicht 0 werden. Wäre dies doch der Fall, so müsste von der eben genannten Zahl die Zahl der Wurzeln von $V(\alpha, r) = 0$, die zwischen $\mu$ und $\mu'$ liegen, abgezogen werden. Aber $V$ ist nicht 0 für $x = \alpha$, da sonst nach (2) auch $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ wäre für $x = \alpha$, was Nr. 1. widerstreitet; demnach bleibt der eben gegebene Satz bestehen.

4. Wir wollen die Werthe von $V(x, r)$, $\frac{\partial V(x, r)}{\partial x}$ für $x = \beta$ durch $V(\beta, r)$, $\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial \beta}$ bezeichnen, und seien $r'$, $r''$ zwei auf einander folgende Wurzeln der Gleichung $V(\beta, r) = 0$. Alsdann muss nothwendig $\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial r}$ sein Zeichen wechseln zwischen $r = r'$ und $r = r''$, so dass die Werthe dieser Grösse von verschiedenem Zeichen an diesen Gränzen sind; da aber $V(\beta, r) = 0$ an diesen Gränzen, so haben $\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial r}$ und $\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial \beta}$ alsdann dasselbe Zeichen (Nr. 2.), so dass auch $\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial \beta}$ verschiedenes Zeichen hat für $r = r'$ und $r = r''$, und also auch durch Null geht zwischen diesen Werthen; die Grösse

$$\frac{\partial V(\beta, r)}{\partial \beta} + HV(\beta, r)$$

ist an diesen Gränzen gleich $\frac{\partial V(\beta, r')}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial V(\beta, r'')}{\partial \beta}$, und da diese beiden von verschiedenem Zeichen sind, so ist jene Grösse durch 0 gegangen. Es liegt also eine Wurzel der Gleichung (3) zwischen $r'$ und $r''$. Aber auch zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln von (3) liegt eine Wurzel von $V(\beta, r) = 0$. Denn sind $r_n$, $r_{n+1}$, zwei solche, so werden (§. I., II.)

$F'(r_n)$ und $F'(r_{n+1})$ von verschiedenem Zeichen sein, also, da nach Gleichung (8)

$$-kV(\beta, r_n)F'(r_n), \quad -kV(\beta, r_{n+1})F'(r_{n+1})$$

positiv sind, $k$ ebenfalls positiv ist, so müssen $V(\beta, r_n)$, $V(\beta, r_{n+1})$ von verschiedenem Zeichen sein. Daraus folgt, dass von den Gleichungen (3) und $V(\beta, r)=0$ je eine Wurzel zwischen zweien der andern liegt, aber auch nur je eine.

5. Die Gleichung (3) hat bloss positive Wurzeln (§. II.); sind $r_1, r_2, \ldots$ dieselben, so liegt also keine ihrer Wurzeln zwischen $-\infty$ und $r_1$; die Gleichung $V(\beta, r)=0$ hat $r=-\infty$ zur Wurzel, da $V(x, r)$ (oder $V$) nach (1) Null ist für $r=-\infty$; zwischen $-\infty$ und $r_1$ liegt also keine weitere Wurzel von $V(\beta, r)=0$; zwischen $r_1$ und $r_2$ liegt aber eine Wurzel dieser Gleichung, dessgleichen zwischen $r_2$ und $r_3$, u. s. w.

Betrachten wir nun die Grössen $V(x, r_1)$ und $V(x, -\infty)$, so wird die erste, nach Nr. 3., keinmal mehr verschwinden, als die zweite, wenn $x$ von $\alpha$ bis $\beta$ geht; für negative grosse $r$ müssen aber nach (1) $V$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ immer dasselbe Zeichen haben, woraus nach Nr. 1. folgt, dass $V$ für solche $r$ nie Null ist. Demgemäss ist auch $V(x, r_1)$ nie Null von $x=\alpha$ bis $x=\beta$. Aus demselben Grunde ist $V(x, r_2)$ ein Mal Null, $V(x, r_3)$ zwei Mal, ...., $V(x, r_n)$ dagegen $n-1$ Male u. s. w. Für $H=\infty$ reduzirt sich (3) auf $V(\beta, r)=0$; in diesem Falle ist hier das Nullwerden bei $x=\beta$ nicht eingerechnet.

6. Seien $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ beliebige Konstanten und

$$U=A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots + A_n V_n, \tag{21}$$

so ist nach (7)

$$\int_\alpha^\beta gUV_p \partial x = 0,$$

wenn $p$ nicht von $m$ bis $n$ liegt, oder

$$= A_p \int_\alpha^\beta V_p^2 \partial x$$

im andern Falle, welche Grösse nicht 0 ist, wenn nicht $A_p=0$. Sind also nicht alle $A=0$, so kann $U$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ für $x$

nicht identisch Null sein, da sonst $\int_\alpha^\beta gUV_p\partial x$ es wäre. Nun behaupte ich, $U$ werde höchstens $(n-1)$mal Null zwischen $\alpha$ und $\beta$, wobei etwa gleiche Wurzeln von $U=0$ für eine gezählt werden.

Es ist nämlich nach (7) und (5):

$$(r_1-r_p)\int_\beta^x gV_1V_p\partial x = kV_1^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_p}{V_1}\right),$$

woraus

(22)

$$\int_\beta^x gV_1(a_mV_m+a_{m+1}V_{m+1}+\ldots+a_nV_n)\partial x = kV_1\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

wenn

$$a_p=(r_1-r_p)A_p, \quad \Psi=\frac{A_mV_m+\ldots+A_nV_n}{V_1}=\frac{U}{V_1}.$$

Nun ist $V_1$ nicht Null zwischen $\alpha$ und $\beta$ (Nr. 5.), so dass $\Psi=0$ und $U=0$ dieselben Wurzeln haben zwischen diesen Gränzen; $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ ist Null für $x=\alpha$ wegen (7), was auch für $m=1$ wahr ist, da dann $a_1=0$; ebenso ist $\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0$ für $x=\beta$, Alles gemäss (22). Für mehrfache Wurzeln von $\Psi=0$ ist jedesmal $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ auch $=0$; für einfache Wurzeln wird $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ zwischen je zweien Null; hat also $\Psi=0$, d.h. $U=0$, $\mu$ Wurzeln zwischen $\alpha$ und $\beta$, so geht $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ zwischen diesen Gränzen mindesten $(\mu-1)$mal durch Null; da aber $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ Null ist für $\alpha$ und $\beta$, so muss eben so $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$ mindestens $\mu$mal Null sein zwischen den Gränzen $\alpha$ und $\beta$, d. h. wegen (22), es ist $a_mV_m+\ldots+a_nV_n$ mindestens $\mu$mal Null. Daraus folgt: hat

$$A_mV_m+A_{m+1}V_{m+1}+\ldots+A_nV_n=0$$

$\mu$ Wurzeln zwischen $\alpha$ und $\beta$, so hat

$$A_m(r_m-r_1)V_m+A_{m+1}(r_{m+1}-r_1)V_{m+1}+\ldots+A_n(r_n-r_1)V_n=0$$

mindestens eben so viele; eben so dann

$$A_m(r_m-r_1)^2 V_m + \ldots + A_n(r_n-r_1)^2 V_n = 0, \ldots$$

$$A_m(r_m-r_1)^\varrho V_m + \ldots + A_n(r_n-r_1)^\varrho V_n = 0,$$

oder

$$A_m\left(\frac{r_m-r_1}{r_n-r_1}\right)^\varrho V_m + \ldots + A_{n-1}\left(\frac{r_{n-1}-r_1}{r_n-r_1}\right)^\varrho V_{n-1} + A_n V_n = 0$$

mindestens $\mu$ Wurzeln zwischen $\alpha$ und $\beta$. Ist $\varrho$ sehr gross, so reduzirt sich diese Gleichung, wegen $r_n > r_{n-1} \ldots$, nahezu auf $V_n = 0$, welche Gleichung nur $n-1$ Wurzeln hat (Nr. 5.), so dass die Gleichung $U=0$ nicht mehr als $n-1$ Wurzeln haben kann.

Man sieht leicht, dass man rückgehend auch schliessen kann (wobei $A_m, \ldots$ durch $A_m(r_m-r_1)^{-\varrho}, \ldots$ ersetzt sind):

$$A_m V_m + \ldots + A_n V_n = 0$$

hat mindestens eben so viele Wurzeln als

$$A_m(r_m-r_1)^{-\varrho} V_m + \ldots + A_n(r_n-r_1)^{-\varrho} V_n = 0,$$

d. h. als

$$A_m V_m + A_{m+1}\left(\frac{r_m-r_1}{r_{m+1}-r_1}\right)^\varrho V_{m+1} + \ldots + A_n\left(\frac{r_m-r_1}{r_n-r_1}\right)^\varrho V_n = 0,$$

woraus für grosse $\varrho$ folgt, dass $U=0$ mindestens $m-1$ Wurzeln hat. Alles dies gilt auch für $m=1$.

## VII.

Gesetzt es sei

$$\int_\alpha^\beta g V \psi(x) \partial x$$

Null für alle Werthe von $r$, die aus der Gleichung (3) folgen, so muss identisch $\psi(x)=0$ sein.

Denn gesetzt es wechsele $\psi(x)$ sein Zeichen nicht zwischen $\alpha$ und $\beta$, so kann diese Gleichung nicht bestehen für $r=r_1$, indem $V_1$ sein Zeichen nicht wechselt (§. VI. 5.); wechselt aber $\psi(x)$ sein Zeichen $(m-1)$mal zwischen $\alpha$ und $\beta$, so erhält man aus der Annahme:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g\psi(x)[A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_m V_m]\partial x = 0. \qquad (23)$$

Sind nun $\varrho_1, \dots, \varrho_{m-1}$ die Wurzeln von $\psi(x)=0$, so bestimme man $A_1, \dots, A_m$ so, dass $A_1 V_1 + \dots + A_m V_m$ Null ist für $x=\varrho_1, \dots, \varrho_{m-1}$; da weiter $A_1 V_1 + \dots + A_m V_m$ höchstens $(m-1)$mal Null werden kann (§. VI. 6.), so hat man dadurch alle Wurzeln von

$$A_1 V_1 + \dots + A_m V_m = 0,$$

die wir sämmtlich ungleich annehmen, woraus sofort folgt, dass

$$\psi(x)[A_1 V_1 + \dots + A_m V_m]$$

immer dasselbe Zeichen behält, und also die Gleichung (23) nicht möglich ist, wenn nicht $\psi(x)=0$. Da dies für beliebige $m$ gilt, und $\psi(x)$ nicht unendlich viele Male sein Zeichen wechseln kann, so ergiebt sich hieraus unsere Behauptung.

Hiernach folgt aus der Gleichung (20), dass $\varphi(x)-f(x)=0$, $\varphi(x)=f(x)$ sein müsse, so dass endlich:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{V_m \int_{\alpha}^{\beta} g V_m f(x)\partial x}{\int_{\alpha}^{\beta} g V_m^2 \partial x} \qquad (24)$$

ist. Die Bedingungen (16) sind hiernach durch $f(x)$ erfüllt.

Man kann aus den vorstehenden Entwickelungen wohl ersehen, in wie weit Lamé Recht oder Unrecht hat, wenn er sich in seinen „Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes" u. s. w. S. 223. so ausspricht: „Ces développements hybrides et composés, qui ont pu être l'occassion de recherches intéressantes au point de vue purement analytique, ne sauraient être d'aucune utilité en physique mathématique."

# XXIII.

## Zum Fermat'schen Lehrsatze.

Von

Herrn Doctor *Robert Blindow*,

Oberlehrer an der Realschule zu Fraustadt.

---

Es sei $AB$ (Taf. V. Fig. 4.), der Durchmesser des Kreises $ARBP$, die Grundlinie eines Rechtecks $ABCD$, dessen Höhe $AD$ gleich der zu dem Quadranten des Kreises gehörigen Sehne ist. Durch $O$, den Mittelpunkt des Kreises, und $J$, den Durchschnittspunkt der Diagonalen des Rechtecks, sei die Linie $OJ$ gezogen, welche auf $DC$ im Punkte $Q$ senkrecht steht und den Kreis in den Punkten $R$ und $P$ schneidet.

Dann sind die vier Punkte $R$, $J$, $P$, $Q$ harmonische Punkte.

Es ist nämlich:

$$JP = OP - OJ = r - \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$QP = JQ - JP = \frac{r}{2}\sqrt{2} - (r - \frac{r}{2}\sqrt{2}) = r\sqrt{2} - r,$$

$$JR = RP - JP = 2r - (r - \frac{r}{2}\sqrt{2}) = r + \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$QR = RP + QP = 2r + (r\sqrt{2} - r) = r + r\sqrt{2};$$

es verhält sich aber:

$$r - \frac{r}{2}\sqrt{2} : r\sqrt{2} - r = r + \frac{r}{2}\sqrt{2} : r + r\sqrt{2},$$

und daher auch

$$JP:QP = JR:QR.$$

Nun ist $DC$ die Harmonische des Punktes $J$; $DA$ die Harmonische des Punktes $A$; und daher $AJ$ oder $AC$ die Harmonische des Punktes $D$, ebenso $DB$ die Harmonische des Punktes $C$.

Verbindet man jetzt irgend einen Punkt $E$ des Kreises $ARBP$ mit $D$ durch die Linie $ED$, welche den Durchmesser $AB$ in $M$, die Diagonale $AC$ in $S$ und den Kreis zum zweiten Male in $G$ schneidet, verbindet man ferner $E$ mit $C$ durch die Linie $EC$, welche den Durchmesser $AB$ in $N$ und den Kreis zum zweiten Male in $F$ schneidet, und endlich $F$ mit $D$ durch die Linie $FD$, welche die Verlängerung des Durchmessers $AB$ in $L$, die Diagonale $AC$ in $T$ und den Kreis zum zweiten Male in $H$ schneidet, so werden die Linien $DE$ und $DF$ durch den Kreis und die Diagonale $AC$ harmonisch geschnitten, so dass sowohl $D, G, S, E$ als $D, H, T, F$ harmonische Punkte sind.

In Folge hiervon muss die Linie $GH$, welche die Verlängerung des Durchmessers $AB$ in $K$ und $DB$ in $Y$ schneidet, durch $C$, den Durchschnittspunkt der Linien $ST$ oder $AC$ und $EF$, gehen.

Die vier Punkte $E, G, H, F$, in welchen sich die Linien $DE$, $DF$, $CG$ und $CE$ schneiden, bestimmen also ein dem Kreise $ARBP$ eingeschriebenes Viereck. Man ziehe in demselben die Diagonalen $HE$ und $GF$, so ist ihr Durchschnittspunkt, wie bekannt, der Pol der Linie $DC$; da nun vorher gezeigt worden war, dass der Pol der Linie $DC$ in den Durchschnittspunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ fällt, so folgt daraus, dass der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Vierecks $EGHF$ immer mit dem Durchschnittspunkte $J$ der Diagonalen des Rechtecks zusammenfällt, wo auch der Punkt $E$ auf der Peripherie des Kreises $ARBP$ angenommen worden sein mag.

Da die Punkte $D, H, T, F$ einerseits und $C, H, Y, G$ andererseits harmonische Punkte sind, so sind auch die Strahlen $CD$, $CH$, $CT$, $CF$ einerseits und $DC$, $DH$, $DY$, $DG$ andererseits harmonische Strahlen. Man ziehe die Linie $DN$, welche $GH$ in $U$ und $AC$ in $V$ schneidet, ebenso $CM$, welche $HF$ in $X$ und $DB$ in $W$ schneidet, so sind die Punkte $D, U, V, N$ einerseits und $C, X, W, M$ andererseits harmonische Punkte. Nun müssen aber die Linien $GL$ und $MH$ in dem vollständigen Vierseit $DHGVML$ die Diagonale $DN$ in dem Punkte $V$ schneiden; der

zu den drei Punkten $D$, $U$, $N$ der vierte dem $D$ zugeordnete harmonische Punkt ist. Die Diagonalen des Vierecks $GMLH$ und des Vierecks $ANCD$ haben daher einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $V$. Ebenso durchschneiden die Diagonalen der Vierecke $BMDC$ und $KNFH$ einander in einem und demselben Punkte $W$.

In Folge davon sind sowohl die Strahlen $HD$, $HU$, $HM$, $HN$, als die Strahlen $HC$, $HX$, $HN$, $HM$ harmonisch. Diese Strahlen schneiden den Durchmesser $AB$ oder seine Verlängerungen in denselben Punkten, in welchen diese Linie auch von den vier Seiten des Vierecks $EGHF$ geschnitten wird.

Daher sind die vier Punkte $K$, $M$, $N$, $L$, in welchen der Durchmesser $AB$ oder seine Verlängerungen von den vier Seiten des Vierecks $EGHF$ geschnitten werden, harmonische Punkte, und es verhält sich:

$$MK:MN=LK:LN.$$

Da, wie oben bemerkt wurde, $CD$, $CH$, $CT$, $CF$ harmonische Strahlen sind und $CD$ parallel $KL$ ist, so halbirt der dem Strahle $CD$ zugeordnete Strahl $AC$ die Strecke $KN$, welche zwischen den beiden Punkten $K$ und $N$ liegt, in welchen $KL$ von den beiden andern zugeordneten Strahlen $CH$ und $CF$ geschnitten wird, d. h. es ist

$$AK=AN.$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass

$$BM=BL.$$

In Folge hiervon kann die oben abgeleitete Proportion

$$MK:MN=LK:LN$$

auch so geschrieben werden:

$$(AB+AN)-BM:(AB+AN)+BM$$
$$=BM-(AB-AN):BM+(AB-AN).$$

Daher ist auch

$$AB+AN:BM=BM:AB-AN$$

oder

$$AB^2=BM^2+AN^2.$$

Da aber, wie oben gezeigt wurde, $BM=BL$ und $AN=AK$ ist, so ist auch:

$$AB^2 = BL^2 + AN^2,$$
$$AB^2 = BL^2 + AK^2,$$
$$AB^2 = BM^2 + AK^2.$$

---

Die in dem Vorangegangenen abgeleiteten Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Construirt man über dem Durchmesser $AB$ eines Kreises $ARBP$ als Grundlinie ein Rechteck $ABCD$, dessen Höhe $AD$ gleich der zu dem Bogen des Quadranten gehörigen Sehne ist, verbindet dann einen beliebigen Punkt $E$ auf der Peripherie dieses Kreises mit den Punkten $D$ und $C$ durch die Linien $ED$ und $EC$, welche den Kreis zum zweiten Male bezüglich in $G$ und $F$ schneiden, verbindet endlich $G$ mit $C$ und $F$ mit $D$; so findet Folgendes Statt:

1) Die Linien $GC$ und $FD$ schneiden einander immer auf der Peripherie des Kreises $ARBP$. Ihr Durchschnittspunkt $H$ bestimmt also mit den Punkten $E$, $G$, $F$ ein dem Kreise eingeschriebenes Viereck $HEGF$*).

2) Die Diagonalen $EH$ und $GF$ dieses Vierecks schneiden einander immer in $J$, dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.

3) Die Punkte $A$, $D$, $C$ und der Punkt $N$, in welchem $EC$ den Durchmesser $AB$ schneidet, bestimmen das Viereck $ADCN$. Die Punkte $G$, $H$, $M$, $L$, in welchen die beiden von $D$ ausgehenden Strahlen $DE$ und $DF$ den Kreis und seinen Durchmesser schneiden, bestimmen das Viereck $GHLM$. Die Diagonalen dieser beiden Vierecke durchschneiden einander in einem und demselben Punkte $V$. Dem entsprechend schneiden die Diagonalen der Vierecke $DMBC$ und $HFNK$ einander in einem und demselben Punkte $W$.

4) Die vier von $C$ und $D$ ausgehenden Strahlen $CE$, $CG$, $DE$, $DF$ schneiden den Durchmesser $AB$ in vier harmonischen Punkten $N$, $K$, $M$, $L$.

5) Es ist

$$AB^2 = AN^2 + BM^2, \quad \text{(Fermat'scher Satz)}$$

---

*) Dieser Satz wurde mir durch Herrn Krüger, Director der Realschule in Fraustadt, mitgetheilt, der denselben mit Hülfe der analytischen Geometrie bewiesen hatte.

aber auch:

$$AB^2 = AN^2 + BL^2$$
$$= AK^2 + BM^2$$
$$= AK^2 + BL^2,$$

d. h. der Fermat'sche Satz gilt auch für solche Punkte des Kreises *ARBP*, welche, wie *H*, *G*, *F*, innerhalb des Rechtecks *ABCD* liegen.

---

# XXIV.

# Versuch einer Erweiterung der Begriffe von $\cos x$ und $\sin x$.

Von

Herrn Doctor *Beyssell*,

Lehrer der Mathematik an der Provinzial-Gewerbeschule zu Crefeld.

---

Aus den Gleichungen

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots,$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

und ihren Entwickelungen geht hervor, dass zu ihrer Feststellung die zweiten Wurzeln der negativen Einheit in einem Bezuge stehen, den man auf beliebige andere Wurzeln der negativen Einheit übertragen kann. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{2m+1}{n}\pi + i \sin \frac{2m+1}{n}\pi$$

und

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2m}{n}\pi + i\sin\frac{2m}{n}\pi,$$

und man kann zur Verkürzung des Ausdrucks eine beliebige $n$te Wurzel aus $+1$ oder $-1$ durch $N_p$ bezeichnen, wo $N$ den Grad der Wurzel und $p$ den im Winkel vorkommenden Zähler bedeuten.

Man betrachte nunmehr die $n$ Reihen, welche der Ausdruck $e^{N_p x}$ bedeutet, wenn $p$ eine ungerade Zahl bezeichnet; sie sind:

$$\left.\begin{array}{l} e^{N_1 x} \quad = 1 + N_1 x + \frac{N_1{}^2 x^2}{2!} + \frac{N_1{}^3 x^3}{3!} \ldots\ldots \\ e^{N_3 x} \quad = 1 + N_3 x + \frac{N_3{}^2 x^2}{2!} + \frac{N_3{}^3 x^3}{3!} \ldots\ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{N_{2n-1} x} = 1 + N_{2n-1} x + \frac{N_{2n-1}{}^2 x^2}{2!} + \frac{N_{2n-1}{}^3 x^3}{3!} \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Zunächst sieht man, wenn man durch $x_0$ den $n$ten Theil der Summe der Reihen (1) bezeichnet, dass man erhält:

$$x_0 = 1 - \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ldots\ldots = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{N_{2p+1} x};$$

denn bei der Addition dieser Reihen fallen alle Glieder, deren Exponent nicht durch $n$ theilbar ist, fort, weil

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{2p+1}{}^a = 0,$$

wenn $a$ nicht durch $n$ theilbar ist. Ist aber $a$ durch $n$ theilbar, so ergiebt sich für den obigen Ausdruck für jeden ungeraden Quotienten $\frac{a}{n}$ der Werth $-1$ und für jeden geraden Quotienten $\frac{a}{n}$ der Werth $+1$; ebenso ergiebt sich für $a=0$ der Werth $+1$.

Multiplizirt man ferner die erste der Reihen (1) mit $N_{-1}$, die zweite mit $N_{-3}$ und so fortfahrend die letzte mit $N_{-(2n-1)}$, addirt sie sodann und nennt den $n$ten Theil ihrer Summe $x_1$, so erhält man, da $N_a . N_{-a} = 1$ ist:

$$x_1 = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots\ldots = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}\, e^{N_{2p+1} x}.$$

In der angegebenen Art fortfahrend bestimme man die Grössen $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, welche der Reihe nach folgende Bedeutungen haben:

$$x_2 = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \ldots = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}^{\;2} \, e^{N_{2p+1} x},$$

$$x_3 = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \ldots = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}^{\;3} \, e^{N_{2p+1} x},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}^{\;n-1} \, e^{N_{2p+1} x}.$$

Im Allgemeinen könnte man daher für die Grösse $x_q$ folgende Gleichung aufstellen:

$$x_q = \frac{x^q}{q!} - \frac{x^{n+q}}{(n+q)!} + \frac{x^{2n+q}}{(2n+q)!} \ldots = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}^{\;q} \, e^{N_{2p+1} x}. \quad (2)$$

Nach der Analogie, welche zwischen diesen Reihen oder Ausdrücken und den trigonometrischen Funktionen sin $x$ und cos $x$ besteht, könnte man dieselben die Funktionen *n*ten Grades für $x$ nennen und die trigonometrischen Funktionen sin $x$ und cos $x$ könnten alsdann die Funktionen zweiten Grades heissen.

Nach diesen Annahmen hätte man sodann $n$ Funktionen *n*ten Grades.

Es ist leicht zu zeigen, dass, wenn man $n = 2$ setzt, die trigonometrischen Funktionen cos $x$ und sin $x$ aus der allgemeinen Formel (2) hervorgehen; denn man hat in diesem Falle:

$$x_0 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = \tfrac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=1} e^{2_{2p+1} x},$$

$$x_1 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots = \tfrac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=1} 2_{-2p-1} \, e^{2_{2p+1} x};$$

und es ist

$$\tfrac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=1} e^{2_{2p+1} x} = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x$$

und

$$\tfrac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=1} 2_{-2p-1} \, e^{2_{2p+1} x} = \frac{-ie^{xi} + ie^{-xi}}{2} = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \sin x.$$

Um näher auf die Funktionen dritten Grades einzugehen, deren es drei giebt, welche mit $x_0$, $x_1$, $x_2$ bezeichnet werden, bemerke man zunächst die Bedeutung folgender Zeichen. Es ist:

$$3_0 = 1$$

$$3_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$3_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$3_3 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1$$

$$3_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$3_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Darnach ist:

$$x_0 = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} \ldots = \tfrac{1}{3}\sum_{p=0}^{p=2} e^{3_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(e^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x} + e^{-x} + e^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x}\right),$$

$$x_1 = x - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} \ldots = \tfrac{1}{3}\sum_{p=0}^{p=2} 3_{2p-1}\, e^{3_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2} e^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x} - e^{-x} + \frac{1+\sqrt{-3}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x}\right),$$

$$x_2 = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} \ldots = \tfrac{1}{3}\sum_{p=0}^{p=2} (3_{-2p-1})^2\, e^{3_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} e^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x} + e^{-x} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x}\right).$$

Die drei gefundenen Grössen $x_0$, $x_1$, $x_2$ haben, wie die betreffenden Reihen zeigen, reelle Werthe, welche sich unter folgender Form darstellen. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{3}\left(e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right) \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}\left(-e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right) \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}\left(e^{-x} - e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

welche Formen man auch auf folgende anderen bringen kann:

$$x_0 = \tfrac{1}{3}\left(e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right),$$

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\left[-e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}} \cos\left(x\sqrt{\tfrac{3}{4}} - \tfrac{1}{3}\pi\right)\right],$$

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\left[e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}} \cos\left(x\sqrt{\tfrac{3}{4}} - \tfrac{2}{3}\pi\right)\right].$$

**Nach derselben Art sollen hier noch die Funktionen vierten Grades, deren es vier: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ giebt, aufgestellt werden. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass $4_p$ in den einzelnen Fällen folgende Bedeutung hat:**

| | |
|---|---|
| $4_0 = 1$ | $4_4 = -1$ |
| $4_1 = (1+i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ | $4_5 = (-1-i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ |
| $4_2 = i$ | $4_6 = -i$ |
| $4_3 = (-1+i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ | $4_7 = (1-i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. |

**Darnach ist:**

$$x_0 = 1 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} \dots = \tfrac{1}{4}\sum_{p=0}^{p=3} e^{4_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + e^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + e^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + e^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x}\right),$$

$$x_1 = x - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} \dots = \tfrac{1}{4}\sum_{p=0}^{p=3} 4_{-2p-1}\, e^{4_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{-1+i}{2} e^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{1+i}{2} e^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x}\right),$$

$$x_2 = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} \dots = \tfrac{1}{4}\sum_{p=0}^{p=3} 4_{-2p-1}^{2}\, e^{4_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(-ie^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + ie^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + ie^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + ie^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x}\right),$$

$$x_3 = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} \dots = \tfrac{1}{4}\sum_{p=0}^{p=3} 4_{-2p-1}^{3}\, e^{4_{2p+1}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot x}\right).$$

**Die reellen Ausdrücke für diese Grössen sind folgende:**

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\cos x\sqrt{\tfrac{1}{2}},\\
x_1 &= \left(\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}},\\
x_2 &= \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}},\\
x_3 &= \left(\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Gehen wir zur Allgemeinheit zurück, so existiren manche Analogien zwischen den aufgestellten Funktionen und den trigonometrischen.

Die Eigenthümlichkeit, dass

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x$$

und

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x,$$

tritt auch, etwas verändert, bei den Funktionen höherer Grade auf und nimmt folgende Gestalt an:

Für irgend welchen Grad ist für $q > 0$

$$\frac{\partial x_q}{\partial x} = x_{q-1};$$

für $q = 0$ und die Funktionen $n$ten Grades ist

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = -x_{n-1}.$$

Um das Erste zu zeigen, ist

$$x_q = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}{}^q\, e^{N_{2p+1}x},$$

$$\frac{\partial x_q}{\partial x} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}{}^{q-1}\, e^{N_{2p+1}x} = x_{q-1};$$

und für den zweiten Fall ist:

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{N_{2p+1}x} = -\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}{}^n\, e^{N_{2p+1}x},$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = -\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} N_{-2p-1}{}^{n-1}\, e^{N_{2p+1}x} = -x_{n-1}.$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen ist für die Funktion des dritten Grades:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x}=x_1,\quad \frac{\partial x_1}{\partial x}=x_0,\quad \frac{\partial x_0}{\partial x}=-x_2,$$

und diese Eigenschaften lassen sich aus den reellen Ausdrücken (3) herleiten; denn nach jenen Formeln ist

$$x_2=\tfrac{1}{3}(e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

also

$$\frac{\partial x_2}{\partial x}=\tfrac{1}{3}(-e^{-x}-\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$$+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\tfrac{3}{4}}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$

$$=\tfrac{1}{3}(-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}})=x_1;$$

ferner

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}=\tfrac{1}{3}(e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$$-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\tfrac{3}{4}}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$

$$=\tfrac{1}{3}(e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}})=x_0;$$

endlich

$$\frac{\partial x_0}{\partial x}=\tfrac{1}{3}(-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}})=-x_2.$$

Ebenso lassen sich die für die Funktionen vierten Grades bestehenden Gleichungen

$$\frac{\partial x_3}{\partial x}=x_2,\quad \frac{\partial x_2}{\partial x}=x_1,\quad \frac{\partial x_1}{\partial x}=x_0,\quad \frac{\partial x_0}{\partial x}=-x_3$$

aus den Ausdrücken (4) derselben herleiten; denn man hat aus denselben:

$$x_3=\left(\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}}+e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}}-e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}\cos x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

**deren Produkt auf die Gleichung führt:**

$$x_0^3 - x_1^3 + x_2^3 + 3x_0 x_1 x_2 = 1.$$

**Um die zweite Gleichung ohne $x$ zu erhalten, potenzire man die oberen Gleichungen der Reihe mit $3_1$, $3_3$ und $3_5$. Dies liefert, wenn man das Produkt aller Gleichungen nimmt:**

$$\left(x_0 + \frac{3+\sqrt{-3}}{2} x_1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} x_2\right)^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$$

$$\times (x_0 - x_1 + x_2)^{-1} \left(x_0 + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} x_1 + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} x_2\right)^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = 1.$$

**Es ist mir trotz vieler angewendeten Mittel bis jetzt nicht gelungen, diese Gleichung in eine Gleichung reeller Grössen zu verwandeln.**

**Für die Funktionen vierten Grades liefern die Gleichungen (6):**

$$x_0 + 4_1 x_1 + 4_1^2 x_2 + 4_1^3 x_3 = e^{4_1 x},$$

$$x_0 + 4_3 x_1 + 4_3^2 x_2 + 4_3^3 x_3 = e^{4_3 x},$$

$$x_0 + 4_5 x_1 + 4_5^2 x_2 + 4_5^3 x_3 = e^{4_5 x},$$

$$x_0 + 4_7 x_1 + 4_7^2 x_2 + 4_7^3 x_3 = e^{4_7 x}.$$

**Die Multiplikation dieser Gleichungen kann man sich durch folgende Betrachtung erleichtern.**

**Es ist**

$$4_1 = (1+i)\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad \text{und} \quad 4_5 = (-1-i)\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

**demnach liefert das Produkt der ersten und dritten Gleichung $e^0 = 1$. Ebenso ist**

$$4_3 = (-1+i)\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad \text{und} \quad 4_7 = (1-i)\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

**also liefert das Produkt der zweiten und vierten Gleichung wiederum $e^0 = 1$.**

**Die erste und dritte Reihe geben**

$$x_0 + \frac{1+i}{\sqrt{2}} x_1 + i x_2 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} x_3 = e^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot x},$$

$$x_0 + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} x_1 + i x_2 + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} x_3 = e^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot x};$$

**und ihr Produkt liefert**

$$x_0^2+2ix_0x_2-ix_1^2+2x_1x_3-x_2^2+ix_3^2=1$$

oder

$$x_0^2+2x_1x_3-x_2^2+i(x_3^2+2x_0x_2-x_1^2)=1.$$

Die zweite und vierte Gleichung entstehen, wenn man in der dritten und ersten $-i$ statt $i$ setzt, und müssen deshalb als Produkt liefern:

$$x_0^2+2x_1x_3-x_2^2-i(x_3^2+2x_0x_2-x_1^2)=1.$$

Demnach ist das Produkt aller vier Gleichungen:

$$(x_0^2+2x_1x_3-x_2^2)^2+(x_3^2+2x_0x_2-x_1^2)^2=1,$$

welches in die beiden Gleichungen zerfällt:

$$x_0^2+2x_1x_3-x_2^2=1,$$
$$x_3^2+2x_0x_2-x_1^2=0.$$

Schreibt man für die vier obigen Gleichungen

$$A=e^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}.x},$$
$$B=e^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}.x},$$
$$C=e^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}.x},$$
$$D=e^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}.x};$$

so erhält man die Gleichung

$$A^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}.B^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}.C^{(-1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}}.D^{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}}=1$$

oder

$$\left(\frac{A}{C}\right)^{(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}.\left(\frac{B}{D}\right)^{(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}=1,$$

und, weil sowohl $AC$ als $BD$ gleich 1 ist:

$$A^{2(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}.B^{2(-1+i)\sqrt{\frac{1}{2}}}=1,$$
$$A^{1+i}B^{-1+i}=1,$$
$$\frac{A}{B}(AB)^i=1,$$
$$AD(AB)^i=1;$$

welche Gleichung in Hinsicht ihrer Zurückführung auf reelle Grössen dieselbe Schwierigkeit darbietet, wie jene bei den Grössen 3. Grades.

Endlich erhält man noch die Gleichung

$$A^i B^{-i} C^i D^{-i} = 1,$$

deren Richtigkeit sich aus den beiden früheren Gleichungen $AC=1$ und $BD=1$ herausstellt.

Die Formeln

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

lassen sich ebenfalls für die Funktionen höherer Grade aufstellen; denn man erhält aus den Gleichungen (6):

$$(x_0 + N_1 x_1 + N_1^2 x_2 \ldots . N_1^{n-1} x_{n-1})(y_0 + N_1 y_1 + N_1^2 y_2 \ldots . N_1^{n-1} y_{n-1})$$
$$= e^{N_1(x+y)},$$

$$(x_0 + N_3 x_1 + N_3^2 x_2 \ldots . N_3^{n-1} x_{n-1})(y_0 + N_3 y_1 + N_3^2 y_2 \ldots . N_3^{n-1} y_{n-1})$$
$$= e^{N_3(x+y)},$$

. . . . . . . . .

$$(x_0 + N_{2n-1} x_1 \ldots . N_{2n-1}^{n-1} x_{n-1})(y_0 + N_{2n-1} y_1 \ldots . N_{2n-1}^{n-1} y_{n-1})$$
$$= e^{N_{2n-1}(x+y)};$$

führt man die Multiplikation in der ersten dieser Gleichungen aus, so erhält man:

$$x_0 y_0 + N_1(x_0 y_1 + x_1 y_0) + N_1^2(x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) \ldots .$$
$$+ N_1^{2n-3}(x_{n-2} y_{n-1} + x_{n-1} y_{n-2}) + N_1^{2n-2} x_{n-1} y_{n-1} = e^{N_1(x+y)}.$$

Aus der Zusammensetzung dieser Ausdrücke kann man die der folgenden, welche man erhält, indem man für $N_1$ : $N_3$, $N_5$,.... setzt, ersehen.

Addirt man nun sämmtliche Gleichungen und nimmt den $n$ten Theil der Summe, so erhält man

$$(x+y)_0 = x_0 y_0 - x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} \ldots . x_{n-1} y_1;$$

durch Multiplikation der auf einander folgenden Reihen mit $N_{-1}$, $N_{-3} \ldots . N_{-2n+1}$ erhält man, wenn man wieder addirt und den $n$ten Theil der Summe nimmt,

$$(x+y)_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_{n-1} - x_3 y_{n-2} \ldots . x_{n-1} y_2.$$

Es ist nicht schwierig, die folgenden Formeln zu bilden, und man erhält:

$$(x+y)_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 - x_3y_{n-1} - x_4y_{n-2} \dots x_{n-1}y_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(x+y)_{n-1} = x_0y_{n-1} + x_1y_{n-2} \dots x_{n-1}y_0.$$

Jede dieser Gleichungen hat auf der rechten Seite $n$ Glieder.

Um die Formeln für die Funktionen von $x+y$ für die ersten Grade zu bilden, beziehe man die betreffenden Formeln auf diese Grade. Man erhält alsdann für $n=2$:

$$x_0y_0 + 2_1(x_0y_1 + x_1y_0) + 2_1{}^2x_1y_1 = e^{2_1(x+y)},$$

$$x_0y_0 + 2_3(x_0y_1 + x_1y_0) + 2_3{}^2x_1y_1 = e^{2_3(x+y)}.$$

Durch Addition beider Ausdrücke ergiebt sich nach dem Halbiren:

$$(x+y)_0 = x_0y_0 - x_1y_1,$$

welches, in die übliche Form übertragen, die Formel giebt:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Multiplizirt man die erste Gleichung mit $2_{-1}$, die zweite mit $2_{-3}$, und nimmt sodann die Hälfte ihrer Summe, so ergiebt sich:

$$(x+y)_1 = x_0y_1 + x_1y_0,$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

Für die Funktionen dritten Grades ergeben sich die drei Formeln:

$$(x+y)_0 = x_0y_0 - x_1y_2 - x_2y_1,$$

$$(x+y)_1 = x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_2,$$

$$(x+y)_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0.$$

Für die Funktionen des vierten Grades endlich hat man:

$$(x+y)_0 = x_0y_0 - x_1y_3 - x_2y_2 - x_3y_1,$$

$$(x+y)_1 = x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

$$(x+y)_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 - x_3y_3,$$

$$(x+y)_3 = x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0.$$

Von diesen Formeln lassen sich zahlreiche Anwendungen machen, von denen folgende hier einen Platz finden mögen.

Für die Funktionen dritten Grades erhält man:

$$(2x)_0 = x_0^2 - 2x_1x_2,$$
$$(2x)_1 = 2x_0x_1 - x_2^2,$$
$$(2x)_2 = 2x_0x_2 + x_1^2,$$

wenn man $x$ für $y$ einsetzt.

Setzt man ferner $2x$ für $y$ ein, so erhält man:

$$(3x)_0 = x_0^3 - x_1^3 + x_2^3 - 6x_0x_1x_2 = 1 - 9x_0x_1x_2,$$
$$(3x)_1 = 3(x_0^2x_1 - x_0x_2^2 - x_1^2x_2),$$
$$(3x)_2 = 3(x_0x_1^2 + x_0^2x_2 - x_1x_2^2).$$

Setzt man ferner in den Gleichungen der Funktionen für $x+y$, $x = -x$ und $y = x$, wodurch $x+y=0$ wird, und bedenkt, dass $x_0^3 - x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 1$, und dass $0_0 = 1$, $0_1 = 0$, $0_2 = 0$ ist, so erhält man:

$$(-x)_0 = \quad x_0^2 + x_1x_2,$$
$$(-x)_1 = -x_2^2 - x_0x_1,$$
$$(-x)_2 = \quad x_1^2 - x_0x_2.$$

Hierdurch werden die Werthe folgender Reihen gegeben:

$$(-x)_0 = x_0^2 + x_1x_2 = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} \dots,$$
$$(-x)_1 = -x_2^2 + x_0x_1 = -x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^7}{7!} \dots,$$
$$(-x)_2 = x_1^2 - x_0x_2 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

Aus den gefundenen Formeln für die Funktionen von $2x$ und $-x$ stellen sich leicht folgende Formeln zusammen:

$$(2x)_0 - (-x)_0 = -3x_1x_2,$$
$$(2x)_1 - (-x)_1 = \quad 3x_0x_2,$$
$$(2x)_2 - (-x)_2 = \quad 3x_0x_1.$$

Aus den Formeln für die Funktionen vierten Grades von $x+y$ entwickeln sich für die Funktionen von $2x$ folgende Ausdrücke:

$$(2x)_0 = x_0^2 - 2x_1x_3 - x_2^2 = 1 - 4x_1x_3,$$

$$(2x)_1 = 2x_0x_1 - 2x_2x_3,$$

$$(2x)_2 = 2x_0x_2 + x_1^2 - x_3^2 = 4x_0x_2,$$

$$(2x)_3 = 2x_0x_3 + 2x_1x_2.$$

Aus den anfänglich aufgestellten Reihen ersieht man, dass für den vierten Grad ist:

$$(-x)_0 = x_0,\ (-x)_1 = -x_1,\ (-x)_2 = x_2,\ (-x)_3 = -x_3.$$

Die Formeln für die Funktionen von $x+y$ geben, wenn man in dieselben $y=-x$ und $x+y=0$ setzt, vermöge der Gleichungen $x_0^2+2x_1x_3-x_2^2=1$ und $x_3^2+2x_0x_2-x_1^2=0$ richtige Resultate, denn man weiss, dass $0_0=1$, $0_1=0$, $0_2=0$, $0_3=0$ ist.

Setzt man $-y$ für $y$, so erhält man:

$$(x-y)_0 = \quad x_0y_0 + x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1,$$

$$(x-y)_1 = -x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2,$$

$$(x-y)_2 = \quad x_0y_2 - x_1y_1 + x_2y_0 + x_3y_3,$$

$$(x-y)_3 = -x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0.$$

Endlich sind einige eigenthümliche geometrische Beziehungen bei den Funktionen dritten und vierten Grades zu bemerken.

Man hat für die Funktionen dritten Grades

$$x_0 = \tfrac{1}{3}(e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

$$x_2 = \tfrac{1}{3}(e^{-x} - e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}\sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}});$$

denkt man nun irgend einen Winkel $\alpha = x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$, so lassen sich diejenigen Theile dieser Funktionen, welche nicht $e^{-x}$ enthalten, folgender Massen construiren. Man nehme (Taf. V. Fig 5.) an, $BAC$ sei gleich $\angle\alpha$ und $AB$ bei einer beliebig gewählten Einheit $e^{\frac{x}{2}}$, so erhält man, wenn man das Loth $BD$ von $B$ auf $AC$ fällt, die Linie $AD$ in drei Theile theilt und zwei dieser Theile auf $AE$ nimmt.

$$AE = \tfrac{2}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Macht man nun den Winkel $BCA = 60^0$ und construirt über $EC$ ein gleichseitiges Dreieck $EFC$, so hat man

$$EF = \tfrac{1}{3}(e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3} \sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$

und

$$FB = \tfrac{1}{3}(-e^{\frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3} \sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

was man leicht ermessen kann, wenn man die Linie $DH$ parallel $EF$ zieht, deren Länge ist

$$DH = DC = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3} \sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}}{3}.$$

Könnte man, ohne die Einheit zu kennen, $e^{-x}$ aus $e^{\frac{x}{2}}$ construiren, so liesen sich die Grössen $x_0$, $x_1$, $x_2$ construiren; denn, wenn man $AE$ um $\frac{e^{-x}}{3}$ verlängert und von dem dann erhaltenen Endpunkt eine Parallele mit $EF$ zieht, so ist diese um $\frac{e^{-x}}{3}$ kürzer als $EF$ und stellt alsdann $x_1$ wirklich dar, so wie die Linie von $B$ bis zum Endpunkte von $x_1$ in der Linie $BC$ um $\frac{e^{-x}}{3}$ länger als $BF$ ist und also $x_2$ wirklich darstellt.

Bei zwei Winkeln $\alpha$ und $\alpha'$, welche sich um $2\pi$ unterscheiden, sind die Dreiecke $ABC$ ähnlich; denn wenn

$$\alpha' = 2\pi + \alpha = 2\pi + x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

ist, und man durch $x'$ den zu $\alpha'$ gehörigen Werth von $x$ bezeichnet, so hat man:

$$x' = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + x,$$

$$x_0' = \tfrac{1}{3}[e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - x} + 2e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}} \cos(2\pi + x\sqrt{\tfrac{3}{4}})]$$

$$= \tfrac{1}{3}(e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - x} + 2e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

und ebenso:

$$x_1' = \tfrac{1}{3}(-e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - x} + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}}\sqrt{3} \sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}),$$

$$x_2' = \tfrac{1}{3}(e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - x} - e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}} \cos x\sqrt{\tfrac{3}{4}} + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2}}\sqrt{3} \sin x\sqrt{\tfrac{3}{4}}).$$

Alsdann kann man die von $e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}-x}$ unabhängigen Glieder wie früher construiren, indem man $AB$ nicht mehr gleich $e^{\frac{x}{2}}$, sondern gleich $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+\frac{x}{2}}$ macht. Denkt man sich wiederum für diese Construction das Dreieck $ABC$ (Taf. V. Fig. 5.) gewählt, so sind $x_0'$ und $x_2'$ um gleiche Stücke kürzer als $x_0$ und $x_2$, weil $e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}-x}$ kleiner ist als $e^{-x}$, und $x_1'$ ist parallel mit $x_1$ und grösser als dasselbe, also der Linie $EF$ näher gerückt. Denkt man sich den Winkel $\alpha$ um unendlichmal $2\pi$ gewachsen, so verschwindet die Potenz mit negativem Exponenten von $e$, und man hat mithin in den Linien $AE$, $EF$ und $FB$ diejenigen Linien, welchen sich die Grössen $x_0$, $x_1$, $x_2$ nähern, wenn $\alpha' = 2m\pi + \alpha$ ist, und $m$ durch alle ganzen Zahlen bis zur Unendlichkeit wächst und $AB = e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{3}}+\frac{x}{2}}$ ist.

Stellt man eine Tabelle auf, indem man den Winkel $\alpha$ von Null ausgehend immer um $30^0$ wachsen lässt, so ergiebt sich:

| $\alpha = x\sqrt{\frac{3}{4}}$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| 0° | 1 | 0 | 0 |
| 30° | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{e^{-x}}{3}$ |
| 60° | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 90° | $\frac{e^{-x}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ |
| 120° | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 150° | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}}{3}$ | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ |
| 180° | $\frac{e^{-x}-2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 210° | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{e^{-x}}{3}$ |
| 240° | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}-2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 270° | $\frac{e^{-x}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ |
| 300° | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}-2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 330° | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}}{3}$ | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ |
| 360° | $\frac{e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{3}$ | $\frac{e^{-x}-e^{\frac{x}{2}}}{3}$ |
| 390° | $\frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{-e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{e^{-x}}{3}$ |

Die aufgestellten Werthe finden ihre geometrische Erklärung, wenn man sich durch den Punkt $A$ (Taf. V. Fig. 5) drei Axen $UU'$, $VV'$, $WW'$ unter 60° Grad legt. Die Linien $x_0$, $x_1$, $x_2$ bilden nämlich eine gebrochene Linie, in welcher $x_0$ in $UU'$ fällt und $x_1$ und $x_2$ den Axen $VV'$, $WW'$ parallel sind. Die Linie $x_0$ ist nun positiv, jenachdem sie auf $AU$ oder auf $AU'$ abgetragen werden muss. Ebenso ist $x_1$ positiv oder negativ, jenachdem sie nach der Richtung $AV$ oder $AV'$ liegt und $x_2$, wenn sie nach $AW$ oder $AW'$ gerichtet ist.

Ferner zeigt die aufgestellte Tabelle manche interessante Eigenthümlichkeit. So sind für die Winkel 60° und 240° die Grössen $x_0$ und $x_2$ einander gleich, weil bei diesen Winkeln die Linie $EF$ und also auch $x_1$ parallel mit $AB$ ist. Bei 120° und 300° sind $x_0$ und $x_1$ einander gleich, aber entgegengesetzt, und für diese Winkel fällt $AB$ mit $BC$ zusammen.

Sodann kann man vermittelst dieser Tabelle sich über den Lauf der drei Funktionen in den ersten vier Quadraten einige Aufklärung verschaffen.

$x_0$ geht vom Positiven zum Negativen über zwischen den Werthen 90° und 120°, es bleibt sodann negativ bis 270° und geht zwischen den Winkeln 270° und 300° wieder zum Positiven über.

$x_1$ geht vom Positiven zum Negativen über zwischen den Winkeln 120° und 150° und bleibt sodann negativ, bis es zwischen den Winkeln 330° und 360° wieder zum Positiven übergeht.

$x_2$ geht vom Positiven zum Negativen zwischen 210° und 240° über und ist sodann negativ, bis es zwischen 390° und 420° wieder zum Positiven übergeht.

Fasst man zunächst den Winkel ins Auge, für welchen $x_0 = 0$ ist, und nennt denselben $\beta$, so ist aus der Tabelle ersichtlich, dass $120° > \beta > 90°$ ist.

Zur genaueren Bestimmung des Winkels $\beta$ wähle man die Reihe für $x_0$, welche sich in folgenden Ausdruck verwandeln lässt:

$$x_0 = 0 = 1 - \left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^6 \frac{1}{6!} - R.$$

Dieser Ausdruck liefert

$$\left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 = 60 \pm \sqrt{3600 - 720 + 720R},$$

und da $\beta$ zwischen 90° und 120° liegen muss, so darf man nur das untere Zeichen der Wurzel anwenden und erhält somit:

$$\left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 = 60 - \sqrt{2880 + 720\,R};$$

lässt man das Glied $720\,R$ der Wurzel fort, so erhält man, da der Subtrahend verkleinert wird, ein grösseres Resultat als man erhalten sollte und kann also schreiben:

$$\left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 < 60 - \sqrt{2880} = \left(\frac{2\gamma}{\sqrt{3}}\right)^3,$$

wonach der durch die Gleichung:

$$\left(\frac{2\gamma}{\sqrt{3}}\right)^3 = 60 - \sqrt{2880}$$

zu berechnende Werth von $\gamma$ grösser als $\beta$ ist. Die Berechnung dieses Werthes ist folgende:

$$\begin{array}{rl} \log 2880 = & 3{,}4593925 \\ & 2)1{,}7296963 \\ & 911 \\ & 52 \\ & 49 \\ & 30 \\ & 32 \end{array} \qquad 53{,}66564 = \sqrt{2880}$$

demnach ist:

$$\gamma = \frac{\sqrt[3]{6{,}33436}\,\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{rl} \log 6{,}33436 = & 0{,}8016986 \\ & 41 \\ & 0{,}8017027 \\ & 3)0{,}2672342 \\ \log\sqrt{3} = & 0{,}2385607 \\ \log 2 = & 0{,}3010300 \\ & 0{,}2047649 \\ & 7438 \\ & 211 \\ & 190 \\ & .210 \end{array} \qquad 1{,}602378 = \gamma$$

$$\begin{array}{rl} \gamma = & 1{,}602378 \\ 91^0 = & 1{,}588250 \\ & 0{,}014128 \\ 48' = & 0{,}013963 \\ & 0{,}000165 \\ 34'' = & 0{,}000165 \\ & 0{,}000000 \end{array} \qquad \gamma = 91^0\,48'\,34'' > \beta$$

Durch die Reihe für $x_0$, welche in den Ausdruck übergeht:

$$x_0 = 0 = 1 - \left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 + R$$

findet man ferner einen Werth $\delta$, welcher zwischen $90^0$ und $\beta$ liegt; denn es ist:

$$\left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 = 6 + 6R$$

also

$$\left(\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\right)^3 > 6 = \left(\frac{2\delta}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Die Ausrechnung des Werthes $\delta$ ist folgende:

$$\delta = \frac{\sqrt[3]{6}\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{rr}
\log 6 = & 0,7781513 \\
 & 3)\overline{0,2593838} \\
\log \sqrt{3} = & 0,2385607 \\
 & -0,3010300 \\
 & \overline{0,1969145} \\
 & 8943 \\
 & 202 \\
 & 193 \\
 & \overline{90} \\
 & 83
\end{array} \qquad 1,573673 = \delta$$

$$\begin{array}{rl}
\delta = & 1,573673 \\
90^0 = & 1,570796 \\
 & \overline{0,002877} \\
9' = & 0,002618 \\
 & \overline{0,000259} \\
53'' = & 0,000257
\end{array} \qquad \delta = 90^0 9' 53'' < \beta$$

Es liegt mithin $\beta$ zwischen $91^0 48' 34''$ und $90^0 9' 53''$.

Um den Winkel $\beta$ genauer zu bestimmen, berechne man $x_0$ für den Winkel $91^0 48'$:

$$\alpha = 91^0 48' \qquad \begin{array}{rl}
91^0 = & 1,588250 \\
48' = & 0,013963 \\
 & \overline{1,602213}
\end{array}$$

also

$$x = \frac{3,204426}{\sqrt{3}}.$$

Man berechne zuerst den Ausdruck:

$$-A = 2e^{\frac{x}{2}} \cos 91^\circ\, 48' = -2e^{\frac{x}{2}} \sin 1^\circ\, 48',$$

$$\log A = \log 2 + \log \sin 1^\circ 48' + \frac{x}{2} \log e,$$

$$\frac{x}{2} \log e = B, \quad \log x + \log(\log e) - \log 2 = \log B,$$

$$\begin{array}{rl}
\log 3{,}204426 = & 0{,}5057467 \\
 & \phantom{0{,}50574}27 \\
 & \phantom{0{,}505746}8 \\
\log \sqrt{3} = & 0{,}2385607 \\
\hline
\log x = & 0{,}2671895 \\
\log(\log e) = \log 0{,}4342945 = & 0{,}6377798 - 1 \\
 & \phantom{0{,}63777}45 \\
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\hline
 & 0{,}6039438 - 1 \qquad 0{,}4017388 = B \\
 & \phantom{0{,}6039}343 \\
\hline
 & \phantom{0{,}60394}95 \\
 & \phantom{0{,}60394}86
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\log \sin 1^\circ 48' = & 0{,}4970784 - 2 \\
\log B = & 0{,}4017388 \\
\hline
 & 0{,}1998472 \qquad -0{,}1584336 = 2e^{\frac{x}{2}} \cos 91^\circ 48' \\
 & \phantom{0{,}1998}374 \\
\hline
 & \phantom{0{,}19984}98 \\
 & \phantom{0{,}19984}82 \\
\hline
 & \phantom{0{,}19984}160 \\
 & \phantom{0{,}19984}164
\end{array}$$

Nunmehr berechne man $e^{-x} = C$, dann ist $\log C = -x \log e$: man setze $x \log e = D$, so hat man $\log x + \log(\log e) = \log D$

$$\begin{array}{rl}
\log x = & 0{,}2671895 \\
\log(\log e) = & 0{,}6377843 - 1 \\
\hline
 & 0{,}9049738 - 1 \\
 & \phantom{0{,}90}9697 \\
\hline
 & \phantom{0{,}904}41 \\
 & \phantom{0{,}904}38 \\
\hline
 & \phantom{0{,}9049}30 \\
 & \phantom{0{,}9049}32
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 1 \qquad\quad -1 \\
 & -0{,}8034776 \quad = \log C \\
\hline
 & 0{,}1965224 - 1 \\
 & \phantom{0{,}1965}078 \\
\hline
 & \phantom{0{,}1965}146 \\
 & \phantom{0{,}1965}138 \\
\hline
 & \phantom{0{,}19652}80 \\
 & \phantom{0{,}19652}83
\end{array}$$

$$e^{-x} = 0{,}1572253.$$

Es ist mithin $x_0$ für den Winkel $91^\circ 48' = -0{,}0012085$, also ist $91^\circ 48' > \beta$.

Ebenso berechne man $x_0$ für $91^\circ 47'$:

$$
\begin{array}{r}
91^\circ = 1{,}588250 \\
47' = 0{,}013672 \\
\hline
1{,}601922 \\
\hline
3{,}203844
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 3{,}203844 = & 0{,}5056654 \\
 & \phantom{0{,}50566}54 \\
 & \phantom{0{,}505665}4 \\
\log \sqrt{3} = & 0{,}2385607 \\
\hline
\log x = & 0{,}2671106 \\
\log(\log e) = & 0{,}6377843 - 1 \\
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\hline
 & 0{,}6038649 - 1 \\
 & \phantom{0{,}60}8586 \\
\hline
 & \phantom{0{,}6038}63 \\
 & \phantom{0{,}6038}54 \\
\hline
 & \phantom{0{,}60386}90 \\
 & \phantom{0{,}60386}86
\end{array}
\qquad 0{,}4016658 = B
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\log \sin 1' 47' = & 0{,}4930398 - 2 \\
B = & 0{,}4016658 \\
\hline
 & 0{,}1957356 - 1 \\
 & \phantom{0{,}1957}336 \\
\hline
 & \phantom{0{,}1957}200 \\
 & \phantom{0{,}1957}194
\end{array}
\qquad 0{,}1569407 = 2e^{\frac{x}{2}} \cos 91^\circ 47'
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log x = & 0{,}2671106 \\
\log(\log e) = & 0{,}6377843 \\
\hline
 & 0{,}9048949 \\
 & \phantom{0{,}90}8940 \\
\hline
 & \phantom{0{,}90489}9 \\
 & \phantom{0{,}90489}5 \\
\hline
 & \phantom{0{,}9048}40 \\
 & \phantom{0{,}9048}38
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
1 & \quad -1 \\
-0{,}8033317 & \quad = \log C \\
\hline
0{,}1966683 - 1 & \\
6495 & \\
\hline
188 & \\
166 & \\
\hline
220 & \\
221 &
\end{array}
$$

$$e^{-x} = 0{,}15722768$$

Mithin ist $x_0$ für den Winkel $91^\circ 47' = 0{,}0003361$, also ist $\beta > 91^\circ 47'$.

Der Winkel $\beta$ ist mithin auf eine Minute genau berechnet gleich $91^\circ 47'$.

Auf sehr ähnliche Weise findet man für das $x_1$ des Winkels $149^\circ 41'$:

$$2e^{\frac{x}{2}}\cos(x\sqrt{\tfrac{3}{4}}-60)=0{,}04995080$$

$$e^{-x} \qquad\qquad =0{,}04897000,$$

mithin ist $Bx_1$ für den Winkel $149^\circ 41'=0{,}0009808$ und auch dieser Winkel ist auf eine Minute derjenige, für welchen $x_1=0$ wird.

Man kann sich nach dem Früheren eine Idee über den allgemeinen Gang der Funktionen $x_0$, $x_1$, $x_2$ bilden, wenn man $x$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen lässt.

Die Funktion $x_0$ ist für $x=-\infty$ positiv $\infty$ und nimmt mit wachsendem $x$ stets ab, bis dieselbe für den Winkel $\alpha=x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ von $91^\circ 47'$ gleich Null wird und ins Negative übergeht. Bei diesem stetigen Abnehmen erreicht sie für $x=0$ den Werth 1; sie ist mithin, wie auch die Reihe

$$x_0=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}\cdots$$

zeigt, für alle negativen Werthe von $x$ grösser als 1. Auch daraus, dass für $x=0$ die beiden ersten Differenzialquotienten $-x_2$ und $-x_1$ gleich Null sind, der dritte jedoch $-x_0$ den negativen Werth $-1$ hat, sieht man, dass der Werth 1 für $x_0$ bei $x=0$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist, und dass $x_0$ für wachsende Werthe von $x$ im Abnehmen begriffen ist. Für positive Werthe von $x$ nimmt also $x_0$ ab, bis es bei dem vorgenannten Werthe von $x$, welcher dem Winkel $\alpha=x\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ von $91^\circ 47'$ entspricht, Null wird, und nahe bei $x\sqrt{\tfrac{3}{4}}=\alpha=210^\circ$ und zwar bei einem etwas grösseren Werthe dieses Winkels sein Minimum erreicht. Von da ab beginnt $x_0$ zu wachsen und geht bei einem Werthe von $x$, welcher um weniges kleiner ist als der, welcher dem Winkel $\alpha=270^\circ$ entspricht, durch 0 zum Positiven über. Der Gang von $x_0$ bleibt nunmehr für grössere positive Werthe von $x$ periodisch und zwar in folgender Weise: Bei den Werthen von $x$, welche den Winkeln $\alpha=2m\pi+\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ entsprechen, wo $\varepsilon$ ein kleiner positiver Winkel ist und $m$ alle ganzen Zahlen zwischen 0 und $\infty$ bedeutet, und wo ferner der Winkel $\varepsilon$ mit wachsendem $m$ abnimmt, geht $x_0$ vom Positiven zum Negativen durch Null über.

Bei allen Werthen von $x$, welche den Winkeln

$$\alpha = (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

entsprechen, findet für $x_0$ ein Uebergang vom Negativen zum Positiven durch 0 statt.

Bei allen Werthen von $x$, welche den Winkeln

$$\alpha = (2m+1)\pi + 1\tfrac{1}{6}\pi - \varepsilon$$

entsprechen, hat $x_0$ ein Maximum und diese Maxima wachsen mit $m$, indem sie für ein unendlich grosses $m$ unendlich gross werden.

Bei allen Werthen von $x$, welche den Winkeln

$$\alpha = 2m\pi + 1\tfrac{1}{6}\pi + \varepsilon$$

entsprechen, hat $x_0$ ein Minimum und diese Minima nehmen mit wachsendem $m$ ab, indem sie für ein unendlich grosses $m$ unendlich negativ werden.

Die Funktion $x_1$ ist für einen negativen unendlichen Werth von $x$ negativ unendlich und wächst, da ihr Differentialquotient $x_0$ für negative Werthe von $x$ stets positiv ist, für derartige Werthe von $x$ beständig, bis sie bei $x=0$ den Werth Null erreicht und ins Positive übergeht. Wächst $x$ von 0 an, so wächst auch $x_1$, bis es bei dem Winkel $\alpha = 91^\circ 47'$ sein Maximum erreicht. Von da ab nimmt $x_1$ ab, bis es für das $x$, welches $\alpha = 149^\circ 41'$ entspricht, durch Null ins Negative übergeht. Von da ab nimmt auch $x_1$ einen periodischen Gang an, indem es für die den folgenden Winkeln von $\alpha$ entsprechenden Werthe von $x$ folgende Eigenschaften hat.

Bei $\alpha = (2m+1)\pi + \frac{5}{6}\pi + \varepsilon$ geht $x_1$ aus dem Negativen durch Null zum Positiven über.

Bei $\alpha = 2m\pi + \frac{5}{6}\pi - \varepsilon$ geht $x_1$ aus dem Positiven ins Negative über.

Bei $\alpha = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ erlangt es seine Maxima, welche mit $m$ wachsen und für $m$ gleich unendlich positiv unendlich sind.

Bei $\alpha = (m+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ erlangt es seine Minima, welche mit wachsendem $m$ abnehmen und für $m$ gleich unendlich negativ unendlich sind.

Bei diesen Betrachtungen ist wiederum $\varepsilon$ ein kleiner positiver Winkel, welcher mit wachsendem $m$ abnimmt. $m$ geht durch alle ganzen Zahlen von 0 bis $\infty$.

Die Funktion $x_2$ endlich ist für $x = -\infty$ positiv unendlich und nimmt für alle negativen Werthe von $x$, da ihr Differentialquotient $x_1$ negativ ist, ab, bis sie für $x$ gleich Null den Werth Null erhält. Bei diesem Werthe geht sie jedoch, da ihr erster Differentialquotient Null und ihr zweiter gleich $+1$ ist, nicht ins Negative über, sondern der Werth Null ist ein Minimum und die Funktion $x_2$ wächst bis zu ihrem Maximum, welches für das dem Werthe von $\alpha = 149^\circ 41'$ entsprechende $x$ eintritt. Von nun an geht auch $x_2$ periodisch fort und seine besonderen Werthe sind folgende:

Bei $\alpha = (2m+1)\pi + 1\frac{1}{6}\pi - \varepsilon$ geht es aus dem Negativen ins Positive durch Null über.

Bei $\alpha = 2m\pi + 1\frac{1}{6}\pi + \varepsilon$ geht es vom Positiven ins Negative über.

Bei $\alpha = 2m\pi + \frac{5}{6}\pi - \varepsilon$ hat es ein Maximum und diese Maxima wachsen mit $m$ und sind für $m = \infty$ positiv unendlich.

Bei $\alpha = (2m+1)\pi + \frac{5}{6}\pi + \varepsilon$ hat es ein Minimum und diese Minima nehmen mit wachsendem $m$ ab und sind für $m = \infty$ negativ unendlich.

In diesen Formeln ist $m$ jede positive ganze Zahl mit Einschluss der Null und $\varepsilon$ ein Winkel, welcher sich mit wachsendem $m$ der Null nähert.

Wie die Funktionen dritten Grades, so lassen auch die Funktionen vierten Grades eine geometrische Deutung zu.

Man hat für die Funktionen vierten Grades:

$$x_0 = \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \cos x\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x_1 = \left(\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \cos x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x_2 = \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(\frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \sin x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{e^{x\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2} \cos x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Um diese Funktionen für einen spitzen Winkel $\alpha = x\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ zu construiren, zeichne man den Winkel $\alpha$ als $BAC$ (Taf. V. Fig. 6.) und nenne seinen Schenkel $AB$ $e^{\alpha}$, was geschehen kann, da noch keine Einheit gewählt ist.

Da nun $e^{\alpha}$ für $\alpha > 0$ grösser ist als $e^{-\alpha}$, so giebt es in der Linie $AB$ einen Punkt $D$, welcher näher an $B$ als an $A$ liegt, so dass $AD = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$ und $BD = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ ist. Denkt man diesen Punkt, zu dessen Auffindung man jedoch zunächst die Einheit zeichnen müsste, construirt und zeichnet sodann die beiden rechtwinkligen Dreiecke $ADE$ und $ABF$, deren Katheten in die Richtung $AC$ fallen oder rechtwinklig auf $AC$ sind, so hat man zunächst

$$x_0 = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \cos\alpha = AE.$$

Zieht man darauf die Linie $BC$, welche mit $AC$ einen Winkel von $45^0$ bildet und fällt von $E$ das Loth $EG$ auf $BC$, von $F$ das Loth $FH$ auf $EG$ und zieht von $H$ eine Parallele mit $BF$, welche $BC$ in $J$ trifft, so ist $EH = x_1$, $HJ = x_2$ und $JB = x_3$.

Wächst der Winkel $\alpha$ um $2\pi$, so vergrössert sich $e^{\alpha}$, jedoch bleibt das Dreieck $ABC$ dem in Taf. V. Fig. 6. ähnlich. Nur der Punkt $D$ nähert sich, da $e^{-\alpha}$ im Verhältniss zu $e^{\alpha}$ kleiner wird, der Mitte von $AB$. Für den Winkel $2m\pi + \alpha$, wo $m$ unendlich genommen wird, hat endlich $D$ die Mitte von $AB$ erreicht.

Für alle Winkel $\alpha$ zwischen Null und $2\pi$ passt die angegebene Construction der Linien $x_0$, $x_1$, $x_2$ und $x_3$, wenn man sich durch $AB$ Linien gelegt denkt, welche $AC$ unter $45^0$, $90^0$ und $135^0$ schneiden, und die Funktionen nach diesen betreffenden Linien misst, indem man sie positiv nimmt, wenn sie in diese Linien, und negativ, wenn sie in ihre Verlängerungen fallen.

Um den allgemeinen Gang der Funktionen vierten Grades festzustellen, betrachte man dieselben zunächst, während der Winkel $\alpha = x\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ von Null bis $2\pi$ wächst. Die Funktion $x_0$ verschwindet für $\alpha = 90^0$ und für $\alpha = 270^0$. Die Funktion $x_2$ verschwindet für $\alpha = 0$, $\alpha = 180^0$ und $\alpha = 360^0$. Die Funktion $x_1$ verschwindet in der Nähe der Winkel $135^0$ und $315^0$. Bestimmt man diese Winkel näher, so findet man dieselben auf Minuten genau zu $135^0 30'$ und $315^0 0'$.

Die Funktion $x_3$ verschwindet in der Nähe des Winkels $225^0$, und wenn man diesen Winkel näher bestimmt, so ergiebt sich für denselben $224^0 59'$.

Ausserdem verschwinden noch $x_1$ und $x_3$ für den Winkel $\alpha = 0$.

Für $x_3$, welches zunächst über 360° in der Nähe von 405°, ist für diesen Winkel $e^{-\alpha}$ so klein im Verhältniss zu $e^{\alpha}$, dass es auf die siebente Stelle dieser Grösse nur noch durch Schätzung einen Einfluss hat.

Da die Funktionen vierten Grades so zusammenhängen, dass die eine der Differentialquotient der nächst folgenden ist, so lässt sich leicht bestimmen, wo die Maxima und Minima derselben liegen, während der Winkel $\alpha$ in einem der vier ersten Quadranten liegt.

Für Winkel $\alpha$, welche grösser sind als $2\pi$, lassen sich folgende Gesetze über die Funktionen vierten Grades aufstellen.

Die Funktionen $x_0$ und $x_2$ verschwinden stets, wenn der $\cos\alpha$ oder der $\sin\alpha$ gleich Null sind.

Die Funktionen $x_1$ und $x_3$ verschwinden, wenn $\operatorname{tg}\alpha = -1$ oder $= +1$ ist. Dieses Gesetz gilt nicht genau und zwar verschwindet $x_1$ bei einem etwas grösseren, $x_3$ bei einem etwas kleineren als dem angegebenen Winkel, jedoch ist der Untershied der wirklichen Winkel von dem angegebenen nicht über einige Sekunden.

Wiederum lässt sich leicht, vermöge des früher entwickelten Gesetzes der Differentialrechnung, für die Funktionen vierten Grades die Lage der Maxima und Minima für dieselben bestimmen.

Um den Gang der Funktionen vierten Grades für negative Werthe von $x$ kennen zu lernen, ist es nur nöthig zu bedenken, dass $(-x)_0 = x_0$, $(-x)_1 = -x_1$, $(-x)_2 = x_2$ und $(-x)_3 = -x_3$ ist.

# XXV.

## Vom Krümmungs-Halbmesser.

Von
Herrn Dr. *Schlechter*
am Grossherzoglich Badischen Gymnasium zu Bruchsal.

---

Es sei $ABC$ (Taf. V. Fig. 7.) irgend eine in einer Ebene liegende beliebige Curve; wenn sich nun eine gerade Linie $mn$ so um die Curve bewegt, dass sie stets tangirend ist, ohne eine Bewegung nach $mn$ machend, so wird jeder Punkt $p$ der geraden Linie $mn$ eine krumme Linie $qp_1u$ beschreiben von folgender Eigenthümlichkeit:

Jeder unendlich kleine Theil $pq$ dieser Linie steht in jeder Lage auf $mn$ senkrecht; denn dieses kleine Linienelement hat in $pq$ dieselbe Richtung, wie ein unendlich kleiner Kreisbogen, der von $A$ aus beschrieben worden wäre, und dieser wird um so mehr mit der Krümmung der Curve übereinstimmen, je kleiner er genommen wird. Mithin ist $pm$ und $qm$ senkrecht auf dem unendlich kleinen Linientheil $pq$ und jede Tangente der Curve $ABC$ ist auf einem entsprechenden Linientheile senkrecht.

Bekanntlich wird die Curve $ABC$ Evolute und $pqp_1u$ Evolvente genannt.

Wir haben nun gesehen, wie die Evolventen aus den Evoluten erzeugt werden und es wäre jetzt unmittelbar die Aufgabe, zu zeigen, wie aus den Evolventen die Evoluten gebildet werden.

Da die Tangenten der Evoluten allemal senkrecht auf den Evolventen stehen, so werden alle Durchschnitte der Normalen zur Evolventen Punkte der Evoluten sein. Construirt man also

unendlich viele Normalen zur Evolventen, so erhält man in steti-ger Folge die Punkte der Evoluten.

Aus dem bisher Gesagten geht noch hervor, dass wenn man durch zwei aufeinanderfolgende unendlich nahe liegende Punkte $p$ und $q$ zwei Normalen $pm$ und $qx$ zieht der Punkt $A$ der Durchschnitt der Normalen als Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreisbogens betrachtet werden kann, der, mit dem Radius $Ap=Aq$ beschrieben, dieselbe Krümmung hat, wie ein unendlich kleiner Theil der Evolventen. Der Kreisbogen mit dem Halbmesser $Ap=Aq$ beschrieben heisst Krümmungskreis dieses Bogens (circulus curvaturae); der Punkt $A$ Krümmungsmittelpunkt und $Ap$ Krümmungshalbmesser. Zwei Kreise sind überall gleichgekrümmt. Von zwei beliebigen Kreisen ist der am stärksten gekrümmt, der den kleinsten Durchmesser hat. Je grösser der Durchmesser wird, je mehr nähert sich die Kreislinie einer geraden Linie. Wird der Radius unendlich gross, so wird die Krümmung 0 und die Kreislinie eine gerade Linie.

Bei anderen Curven ändert sich die Krümmung von Punkt zu Punkt und es kann um so mehr jeder unendlich kleine Theil als Kreisbogen angesehen werden. — Hieraus folgt, dass die Krümmungshalbmesser einer Curve in ihren verschiedenen Punkten im umgekehrten Verhältnisse mit der Grösse der diesen Punkten entsprechenden Krümmungen stehen.

Denken wir uns im Raume eine beliebige Curve und stellen uns vor, sie sei in unendlich kleine Theile getheilt und man denkt sich nun an jeden unendlich kleinen Theil eine Tangente gezogen, so entsteht eine Fläche, welche zwei gleiche, entgegenstehende und durch die krumme Linie selbst getrennte Netze hat. Die krumme Linie selbst kann als Rückkehrkante bezeichnet werden. Irgend eine tangirende Ebene an diese Fläche gelegt enthält offenbar zwei sich schneidende Tangenten. Jede dieser zwei Tangenten hat aber ein Linienelement mit der Curve gemein und es liegt daher zwischen je zwei Punkten ein unendlich kleiner Linientheil, der als Kreisbogen (Krümmungskreis) aus dem Durchschnitt der Tangenten beschrieben werden kann. Der Durchschnitt der Tangenten ist der Krümmungsmittelpunkt und die Entfernung vom Krümmungsmittelpunkt bis zur Curve eines Linienelements ist der Krümmungshalbmesser.

Bei einer ebenen Curve wird jeder Krümmungshalbmesser vom zunächst vorhergehenden geschnitten und die Reihe dieser Mittelpunkte ist die Evolute.

Bei den doppelt-, zweifach u. s. w. gekrümmten Linien, bei Curven also, die im Raume liegen, liegen zwei auf einander folgende Krümmungsmittelpunkte in zwei verschiedenen tangirenden Ebenen. Die Normalen liegen ebenfalls in verschiedenen Ebenen, schneiden sich also hier nicht gegenseitig; denn wenn diess geschehen sollte, so könnte es nur im Durchschnitt zweier auf einander folgenden tangirenden Ebenen geschehen; da aber dieser Durchschnitt selbst Tangente zur Curve ist, so ist diess unmöglich.

Demzufolge haben alle Curven in jedem ihrer Punkte wirklich nur eine einzige Krümmung *), nur einen Krümmungsmittelpunkt und nur einen Krümmungshalbmesser.

Eine Kreislinie kann offenbar auch dadurch erzeugt werden, indem man eine Linie als Axe (Pollinie) annimmt und auf dieser zwei feste Punkte; durch diese zwei Punkte zwei schneidende Linien führt und alsdann das System dieser zwei geraden Linien sich so um die Axe drehen lässt, dass ihr Durchschnitt fest bleibt, so beschreibt der Durchschnittspunkt beider Linien den Umfang eines Kreises. Die Pollinie geht durch den Mittelpunkt der Kreisfläche.

$\varkappa\alpha\delta$ sei irgend eine Curve von doppelter Krümmung. Denkt man sich nun im Berührungspunkte $\alpha$ irgend einer Tangente eine senkrechte Ebene geführt und ebenso auf einer sehr nahe liegenden $\beta$ eine zweite, so schneiden sich beide Ebenen in einer geraden Linie, welche als Axe des Kreises betrachtet werden kann, von welchem der unendlich kleine Bogen $\alpha\beta$ ein Theil ist, so dass, wenn man aus $\alpha$ und $\beta$ Senkrechte auf die Axe errichtet, sich diese in einem Punkte treffen müssen, und dieses ist der Mittelpunkt des Kreises, von welchem Bogen $\alpha\beta$ ein unendlich kleiner Theil ist; überhaupt werden alle Punkte der geraden Linie als Pole des Bogens betrachtet werden können. Alle Linien von der Axe nach $\alpha\beta$ gezogen sind gleich und bilden gleiche Winkel an derselben. Will man daher die Krümmung bestimmen, so muss der Krümmungshalbmesser und die Lage des Krümmungsmittelpunktes in der Pollinie im Raume bekannt sein. Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man die ganze Curve.

Die erste senkrechte Ebene wird die zweite, die zweite die dritte u. s. w. schneiden. Verbindet man die Durchschnitte je eines Krümmungshalbmessers mit seiner Pollinie, so bilden die Punkte stetig auf einander folgend die Evolute der Curve.

---

*) M. s. übrigens meine Abhandlung in Thl. XXX. Nr. XL. Wie der Herr Verfasser die Sache verstanden wissen will, scheint nicht zweifelhaft zu sein. G.

Aus diesem geht hervor, dass sich die ebenen krummen Linien von denen doppelter Krümmung nur dadurch unterscheiden, dass die erstern alle ihre Krümmungen in einer Ebene haben, währenddem bei Curven im Raume die Ebenen der Krümmung unaufhörlich wechseln. Es wird also unter „Krümmungshalbmesser" bei allen Curven ohne Ausnahme stets dasselbe in der That bezeichnet.

Es soll nun zunächst bewiesen werden, dass sich die **Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte verhalten, wie die Cuben ihrer Normallinie.**

Es sei $\alpha\beta$ (Taf. V. Fig. 8.) irgend eine Curve; $\gamma\Delta$ ein unendlich kleines Linienelement; $\varphi\delta$ und $\varepsilon\gamma$ Tangenten an den Endpunkten desselben; $\gamma\omega$, $\Delta\omega$ Normalen zur Curve; also $\gamma\omega$ senkrecht auf $\varepsilon\gamma$; $\varphi\Delta$ senkrecht auf $\Delta\omega$; $\omega$ ist dann der Krümmungsmittelpunkt; $\omega\gamma = \Delta\omega$ der Krümmungshalbmesser und $\gamma\Delta$ der Krümmungskreis. Es kann also mit dem Radius $\gamma\omega$ Bogen $\gamma\Delta$ aus $\omega$ beschrieben werden.

$\psi\varkappa$ sei die Abscissenlinie für rechtwinklige Coordinaten; $\gamma\omega = \varrho$; $\gamma\delta = \sigma$. Der Bogen zu $\angle\gamma\varepsilon\varkappa = a$ und zu $\angle\Delta\varphi\varkappa = b$ für den Radius 1. Dann ist Bogen $\omega = a - b$ ebenfalls für den Radius 1, und es verhält sich

$$\varrho : 1 = \sigma : a - b,$$

also

$$\varrho = \frac{\sigma}{a-b}.$$

Da der Bogen $a-b$ offenbar sehr klein ist, so kann auch Bogen $a-b = \text{tg}(a-b)$ gesetzt werden; daher auch

$$\varrho = \frac{\sigma}{\text{tg}(a-b)}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\text{tg}(a-b)} = \frac{1+\text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b};$$

so folgt

$$\varrho = \frac{\sigma(1+\text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b)}{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}.$$

Es soll nun zunächst die Ellipse und die Hyperbel betrachtet werden. Die Coordinaten für $\gamma$ seien $x$ und $y$ vom Mittelpunkt aus genommen. Die halbe grosse und kleine Axe seien mit $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet, so ist

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\pm(\alpha^2 - x^2)};$$

das obere Zeichen unter dem Wurzelzeichen gehört der Ellipse und das untere der Hyperbel an. Wächst nun $x$ um die unendlich kleine Grösse $h$ und die entsprechende Zunahme von $y$ ist $g$, so ergibt sich:

$$y + g = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\pm(\alpha^2 - x^2 - 2xh - h^2)},$$

und wenn man die höheren Potenzen von $g$ ausser Acht lässt, so folgt hieraus:

$$g = \pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{-xh}{\sqrt{\pm(\alpha^2 - x^2)}}.$$

Es sei $\gamma n = y$, $\varepsilon n = x$, $\varepsilon m = x + h$, $m\Delta = y + g$. Zieht man nun $\gamma f \parallel \psi x$, so ist $\gamma f = h$ und $\Delta f = g$; dann ist offenbar

$$\sigma^2 = h^2 + g^2, \quad \sigma = \sqrt{h^2 + g^2}.$$

Für $g^2$ den Werth eingesetzt gibt:

$$\sigma = \sqrt{h^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x^2h^2}{\pm(\alpha^2 - x^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pm h^2\alpha^2(\alpha^2 - x^2) + \beta^2x^2h^2}{\alpha^2(\alpha^2 - x^2)}},$$

$$\sigma = \frac{h}{\alpha}\sqrt{\frac{\pm\alpha^2(\alpha^2 - x^2) + \beta^2x^2}{\pm(\alpha^2 - x^2)}}.$$

Es ist aber auch $\frac{\Delta f}{\gamma f} = \frac{g}{h} = \operatorname{tg} f\gamma\Delta$; ferner ist $\angle\gamma\varepsilon x = \angle f\gamma\Delta = a$; somit $\operatorname{tg} a = \frac{g}{h}$. Den Werth für $g$ eingesetzt gibt:

$$\operatorname{tg} a = \pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{-x}{\sqrt{\pm(\alpha^2 - x^2)}}.$$

Dessgleichen ist $\angle\Delta\varphi x = \angle\gamma\Delta f = b$, also $\frac{\gamma f}{\Delta f} = \frac{h}{g} = \operatorname{tg} b$, folglich

$$\operatorname{tg} b = \pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{-(x+h)}{\sqrt{\pm(\alpha^2 - (x+h)^2)}};$$

also

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{g}{h} - \frac{h}{g}$$

$$= \pm \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{-x}{\sqrt{\pm(\alpha^2-x^2)}} + \frac{(x+h)}{\sqrt{\pm(\alpha^2-(x+h)^2)}}\right],$$

und in bequemerer Form:

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \pm \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 h^2}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{\pm(\alpha^2-x^2)}}.$$

Setzt man nun die Werthe von $\sigma$, $\operatorname{tg} a$ und $\operatorname{tg} b$ in die Gleichung für $\varrho$, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{\frac{h}{\alpha}\sqrt{\frac{\pm\alpha(\alpha^2-x^2)+\beta^2x^2}{\pm(\alpha^2-x^2)}}\left\{1+\frac{\beta^2 x(x+h)}{\alpha^2\sqrt{\pm(\alpha^2-x^2).[\alpha^2-(x+h)^2]}}\right\}}{\pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2 h}{(\beta^2-x^2)\sqrt{\pm(\alpha^2-x^2)}}}.$$

Nach gehöriger Reduction und weil $h$ gegen $x$ als unendlich kleine Grösse verschwindet, so ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{[\pm\alpha^2(\alpha^2-x^2)+\beta^2x^2]^3}}{\alpha^4\beta}.$$

Nach der Lehre der Kegelschnittlinien ist

$$\pm(\alpha^2-x^2)+\beta^2x^2 = \alpha^2 Rr;$$

also auch

$$\varrho = \frac{\sqrt{(\alpha^2 Rr)^3}}{\alpha^4\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^6 R^3 r^3}}{\alpha^4\beta} = \frac{\sqrt{(Rr)^3}}{\alpha\beta}.$$

Da wir aber beweisen wollen, dass sich zwei Krümmungshalbmesser verhalten wie die Cuben ihrer Normalen, so sei für einen andern Punkt der Curve $\varrho$, $\varrho_1$; $R$, $R_1$ und $r$, $r_1$. Hieraus folgt die Proportion:

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{\sqrt{(Rr)^3}}{\alpha\beta} : \frac{\sqrt{(R_1 r_1)^3}}{\alpha\beta},$$

somit

$$\varrho : \varrho_1 = \sqrt{(Rr)^3} : \sqrt{(R_1 r_1)^3}.$$

Man hat aber für die Normallinie ($N$) die Formel

$$N=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{Rr},$$

also

$$\frac{N\alpha}{\beta}=\sqrt{Rr},$$

somit auch

$$\varrho=\frac{\frac{N^3\alpha^3}{\beta^3}}{\alpha\beta}=\frac{N^3\alpha^2}{\beta^4}$$

und folglich

$$\varrho_1=\frac{N_1{}^3\alpha^2}{\beta^4};$$

also

$$\varrho:\varrho_1=\frac{N^3\alpha^2}{\beta^4}:\frac{N_1{}^3\alpha^2}{\beta^4},$$

somit auch

$$\varrho:\varrho_1=N^3:N_1{}^3.$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz auch für die Parabel gilt, suchen wir den Werth des Krümmungshalbmessers für diese Curve. Die Coordinaten seien vom Scheitel genommen. Die Werthe für zwei sich unendlich nahe liegende Punkte der Curve für die Coordinaten seien $x$, $y$ und $x+h$ und $y+g$.

Nennen wir den Parameter $p$, so ist

$$y=\sqrt{px} \quad \text{und} \quad y+g=\sqrt{p(x+h)},$$

oder

$$y+g=\sqrt{px+ph},$$

und somit auch

$$g=\sqrt{px+ph}-\sqrt{px}.$$

Führt man die Wurzelausziehung für $\sqrt{px+ph}$ aus, so folgt

$$\sqrt{px+ph}=\sqrt{px}+\frac{ph}{2\sqrt{px}}+\ldots,$$

folglich

$$g=\frac{ph}{2\sqrt{px}}=\frac{h\sqrt{p}}{2\sqrt{x}},$$

demnach ist

$$\sigma = \sqrt{h^2 + \frac{p^2 h^2}{4px}} = \sqrt{\frac{4h^2 x + ph^2}{4x}} = h\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}.$$

Da

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{2x} = \frac{\sqrt{px}}{2x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}};$$

so ist auch

$$\operatorname{tg} b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x+h}}.$$

Sofort

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x+h}} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+h}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{4} \cdot \frac{h}{x\sqrt{x+h}}.$$

Mithin

$$\varrho = \frac{h\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x+h}}\right)}{\frac{\sqrt{p}}{4} \cdot \frac{h}{x\sqrt{x+h}}}.$$

Nach gehöriger Reduction und wenn man $h$ als unendlich kleine Grösse gegen $x$ verschwinden lässt, so erhält man

$$\varrho = \frac{\sqrt{(p+4x)^3}}{2\sqrt{p}}.$$

Nun ist die Normale der Parabel

$$N = \tfrac{1}{2}\sqrt{p(p+4x)},$$

also

$$\varrho = \frac{4N^3}{p^2},$$

somit auch für einen andern Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{4N_1}{p^2}.$$

Also

$$\varrho : \varrho_1 = N^3 : N^3.$$

Bei einer andern Gelegenheit mehr.

# XXVI.

## Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Klassification derselben für alle successiven negativen Determinanten $(-D)$ von $D=3$ bis $D=2000$.

(Fortsetzung der Abhandlung: „Versuch einer Theorie der homogenen Funktionen des dritten Grades mit zwei Variabeln." Archiv. Thl. XVII. Nr. I.)

Von

Herrn Dr. *F. Arndt*,

Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

---

Eine binäre kubische Form $f=(a, b, c, d)$ von negativer Determinante $(-D)$ soll fortan reducirt genannt werden, wenn ihre Charakteristik

$$\varphi=(A, B, C)=(2(bb-ac), bc-ad, 2(cc-bd))$$

eine reducirte quadratische Form ist, d. h. wenn (blos in Rücksicht auf die numerischen Werthe) $B$ nicht $> \frac{1}{2}A$, $C$ nicht $< A$ ist. Man hat gesehen, dass jede binäre kubische Form in eine mit ihr eigentlich aequivalente reducirte Form verwandelt werden kann.

Bei der Reduction einer kubischen Form von positiver Determinante kann die Reduction der Charakteristik ebenfalls die Norm abgeben, und wir haben aus diesem Gesichtspunkte bereits den Satz erwiesen, dass für jede beliebige Determinante die entsprechenden kubischen Formen in eine endliche Menge von Klassen zerfallen. Die Anzahl der reducirten Formen ist bei positi-

ver Determinante unendlich gross, aber es existiren allgemeine Formeln in begrenzter Anzahl, in welchen sie alle enthalten sind, oder eine begrenzte Menge von Systemen, so dass jegliche Form in jedem derselben zur Berechnung aller übrigen Formen als Grundform zu Grunde gelegt werden kann. Die Wahl der Klassenrepräsentanten würde von der Ermittelung der jedesmaligen einfachsten Grundform abhängen. Indem ich aber diese Untersuchung noch nicht habe zu Ende führen können, abgeschreckt zugleich durch den grossen Aufwand von Rechnung, und zu der Ueberzeugung gelangte, dass bei positiver Determinante noch eine Reduction der kubischen Formen anderer Art, welche ihre Klassification bedeutend erleichtern muss, existiren möge, so beschränke ich mich einstweilen auf die Formen von negativer Determinante. Dieser Fall ist dadurch ausgezeichnet, dass die Coefficienten der reducirten Formen in bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen sind.

Diese Grenzen sind einer zweifachen Bestimmung fähig, deren eine blos von der Determinante, die andere von der Charakteristik der Form abhängig ist. Die letztere giebt bedeutend engere Grenzen, und wird bei der Berechnung der Tabelle massgebend sein. Die von $D$ abhängigen Grenzen ergeben sich aus folgenden, leicht zu entwickelnden Formen:

$$[1] \quad D = AC - BB = -a^2d^2 + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3 + 6abcd,$$

$$[2] \quad (a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 + a^2D = 4(bb - ac)^3$$

oder $(bA - aB)^2 + a^2D = \frac{1}{2}A^3$,

$$[3] \quad (d^2a + 2c^3 - 3bcd)^2 + d^2D = 4(cc - bd)^3$$

oder $(cC - dB)^2 + d^2D = \frac{1}{2}C^3$,

$$[4] \quad (cA - bB)^2 + b^2D = \tfrac{1}{2}A^2C,$$

$$[5] \quad (bC - cB)^2 + c^2D = \tfrac{1}{2}AC^2.$$

Nach [2] ist

$$a^2D \leqq \tfrac{1}{2}A^3, \quad \text{ferner,} \quad A \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3}D},$$

da $(A, B, C)$ eine reducirte Form ist, folglich

$$a^4D^2 \leqq \tfrac{1}{4}(\tfrac{4}{3})^3D^3 \quad \text{oder} \quad a \leqq \sqrt[4]{\frac{16D}{27}}.$$

Nach [4] ist $b^2D \leqq \frac{1}{3}A^2C$, aber $AC$ bekanntlich $\leqq \frac{4}{3}D$, folglich

$$b^4D^2 \leqq \tfrac{4}{9}A^2D^2 \leqq \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{4}{3}D^3,$$

mithin

$$b \leqq \sqrt[4]{\frac{16D}{27}}.$$

Aus $a^2D \leqq \frac{1}{2}A^3$; $d^2D \leqq \frac{1}{2}C^3$ folgt durch Multiplication

$$(ad)^2D^2 \leqq \tfrac{1}{4}A^3C^3 \leqq \tfrac{1}{4}(\tfrac{4}{3})^3D^3, \text{ also } ad \leqq \sqrt{\frac{16D}{27}}.$$

Auf ähnliche Art findet man mittelst [4] und [5] $bc \leqq \sqrt{\frac{16D}{27}}$ (blos in Rücksicht auf die numerischen Werthe).

Die Ausdrücke

$$[6] \qquad a \leqq \sqrt[4]{\frac{16D}{27}}, \quad b \leqq \sqrt[4]{\frac{16D}{27}},$$
$$ad \leqq \sqrt{\frac{16D}{27}}, \quad bc \leqq \sqrt{\frac{16D}{27}}$$

zeigen, dass $a$, $b$, $c$, $d$ in bestimmte, endliche Grenzen eingeschlossen sind. Die hier für die Produkte $ad$, $bc$ aufgestellten Grenzen sind übrigens doppelt so klein als die neuerdings von Hermite angegebenen, welcher findet:

$$ad < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}}\sqrt{D}, \quad bc < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}}\sqrt{D}.$$

(Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres in Crelle's Journal Thl. 41. p. 215.)

Diese Principien würden uns schon in Stand setzen, die reducirten kubischen Formen für jede gegebene negative Determinante zu berechnen. Ich werde diese erste Methode an dem Beispiel $D = 180$ erläutern.

Zuerst stellt man alle reducirten quadratischen Formen für $D = 180$ auf, so dass die äussern Glieder positiv und gerade sind, das Mittelglied positiv ist (oder null). Man hat $180 + B^2 = AC$, folglich sind für $B$ nur gerade Werthe zu nehmen; und da bekanntlich

$$B \overset{=}{<} \sqrt{\tfrac{1}{3}D} \overset{=}{<} \sqrt{60},$$

so ist $B = 0, 2, 4, 6$; $AC = 180, 184, 196, 216$ resp. Für $A$ sind die geraden Theiler von $AC$ zu nehmen, so dass zugleich $C$ nicht $< A$ wird. Auf diese Weise findet man als reducirte Formen:

$$(2, 0, 90);\ (4, 2, 46);\ (6, 0, 30);\ (10, 0, 18);\ (12, 6, 18);$$
$$(14, 4, 14).$$

Nun sind zu jeder dieser Formen als Charakteristik die entsprechenden kubischen Formen zu entwickeln.

Was zuerst diejenigen, welche das Mittelglied Null haben, betrifft, $(A, 0, C)$, so sei $\mu$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $A$, $C$, $p$ und $q$ die möglichen Werthe der Gleichung

$$\frac{A}{\mu}q^2 + \frac{C}{\mu}p^2 = \tfrac{1}{2}\mu,$$

und die gesuchten kubischen Formen werden sein:

$$\left(\frac{A}{\mu}p,\ \frac{A}{\mu}q,\ -\frac{C}{\mu}p,\ -\frac{C}{\mu}q\right).$$

(M. s. Versuch einer Theorie etc. Art. 26.). Wendet man diese allgemeine Theorie auf die obigen Fälle an, so hat man:

$$q^2 + 45p^2 = 1,\quad p = 0,\quad q = 1 \text{ für die Form } (2, 0, 90);$$
$$q^2 + 5p^2 = 3 \text{ für } (6, 0, 30);\quad 5q^2 + 9p^2 = 1 \text{ für } (10, 0, 18).$$

Die beiden letzten Gleichungen gestatten keine Lösung, zu $(2, 0, 90)$ aber gehört die Form $(0, 1, 0, -45)$.

Die übrigen Formen anlangend, kann man sich zwar der im Art. 22. entwickelten Methode bedienen, doch wird man am Einfachsten auf folgende Weise verfahren.

In Bezug auf die Form $(4, 2, 46)$ ist

$$q^2 \overset{=}{<} \frac{\tfrac{1}{3}A^3}{D} \overset{=}{<} \frac{32}{180},$$

daher kann $a$ nur $= 0$ sein, und da $bb - ac = 2$, $bc - ad = 2$, $cc - bd = 23$, so kommt $bb = 2$, was unmöglich. Jede Charakteristik $(4, B, C)$ überhaupt kann vernachlässigt werden, sobald $D > 32$ ist.

Betrachten wir die Form $(14, 4, 14)$, so ist

$$a^2 \underset{<}{=} \frac{1372}{180} \underset{<}{=} 7\frac{28}{45},$$

folglich $a=0, 1, 2$, wo aber der Werth $a=0$ sogleich wegfällt, da $bb-ac=7$ sein soll. Da ferner

$$b^4 \underset{<}{=} \frac{16D}{27} \underset{<}{=} 106\tfrac{2}{3},$$

so kann $b$ nur $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ sein, wo aber wegen $cc-bd=7$ der Werth $b=0$ wegfällt. Es bleibt also $a=1$, $b=\pm 1, \pm 2, \pm 3$, und $a=2$, $b=\pm 1, \pm 3$. (Der gerade Werth von $b$ fällt weg wegen $bb-ac=7$.) Die Werthe $c$ und $d$ ergeben sich aus $bb-ac=7$, $bc-ad=4$, $cc-bd=7$. Man findet nun keine Werthe, welche diesen Gleichungen genügen.

Endlich ist die Form (12, 6, 18) zu betrachten. Hier ist

$$a^2 \underset{<}{=} \frac{864}{180} = 1, 2; \quad b^4 \underset{<}{=} 106\tfrac{2}{3} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3;$$

also

$$a=1,\ b=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ und } a=2,\ b=0, \pm 2.$$

Man findet nur $a, b, c, d = 2, 0, -3, -3$ und $=2, 2, -1, -4$ zulässig.

Demnach sind die reducirten Formen für die Determinante $-180$ folgende:

$$(0, 1, 0, -45);\ (2, 0, -3, -3);\ (2, 2, -1, -4),$$

wobei indess zu beachten, dass mit jeder dieser Formen $(a, b, c, d)$ noch drei andere, durch blosse Veränderung der Vorzeichen resultirende, nämlich

$$(a, -b, c, -d);\ (-a, b, -c, d);\ (-a, -b, -c, -d)$$

zu verbinden sind.

Nach dieser Methode hatte ich die Berechnung der reducirten Formen bereits durchgeführt von $D=3$ bis $D=200$, als diese Rechnung mich eine andere Methode entdecken liess, nach welcher die Bestimmung der Reducirten mit ausserordentlicher Leichtigkeit bis auf sehr hohe Determinanten fortgeführt werden kann. Sie überschreitet sogar alle Schranken, wenn sich mehrere Kräfte vereinen, und ich hätte der Tabelle noch eine viel grössere Ausdehnung geben können, wenn meine Amtsgeschäfte und anderweitige theoretische Untersuchungen über die kubischen Formen mir die dazu nöthige Musse gestatteten. Diese Methode werde ich nun entwickeln.

Wir betrachten den Complex der reducirten quadratischen Formen $(2\mathfrak{A}, B, 2\mathfrak{C})$, indem $\mathfrak{A}$ einen constanten Werth behält, $B = 0, 1, 2, 3, \ldots \mathfrak{A}$ sein kann, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A}$ sein muss. Da $a^2 D \leqq 4\mathfrak{A}^3$ ist, so haben $a$ und $D$ bestimmte, von $\mathfrak{A}$ abhängige Grenzen, folglich hat auch $\mathfrak{C} = \dfrac{BB + D}{4\mathfrak{A}}$ eine Grenze, und man sieht, dass jedem bestimmten $\mathfrak{A}$ eine endliche Menge von Werthen der Grössen $a, b, c, d, B, \mathfrak{C}, D$ entsprechen muss. Es wird die Grösse $\mathfrak{A}$ also bei der tabellarischen Berechnung massgebend sein. Ferner hat die Determinante $D$ auch eine untere Grenze. Denn $D = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - BB$ erlangt den möglichst kleinsten Werth für $\mathfrak{C} = B = \mathfrak{A}$; dies Minimum ist also $3\mathfrak{A}^2$, und da $D \geqq 2028$ für $\mathfrak{A} \geqq 26$ wird, so wird man, um die Tabelle bis $D = 2000$ zu berechnen, bei dem Werthe $\mathfrak{A} = 25$ abbrechen dürfen.

Es ist nun

$$a^2 \leqq \frac{4\mathfrak{A}^3}{D}, \quad D \geqq 3\mathfrak{A}^2, \quad \text{folglich} \quad a^2 \leqq \tfrac{4}{3}\mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$b^2 D \leqq \tfrac{1}{4}A^2 . C \leqq \tfrac{1}{4}A . \tfrac{4}{3}D \leqq \tfrac{1}{3}AD,$$

folglich

$$b^2 \leqq \tfrac{1}{3}A, \quad \text{oder} \quad b^2 \leqq \tfrac{4}{3}\mathfrak{A}.$$

Wenn $b$ positiv ist, so lässt sich keine engere Grenze ziehen, wie der Calcul lehrt; dagegen kann die Grenze verengert werden, wenn $b$ negativ ist. Man hat nämlich

$$(2b\mathfrak{A} - aB)^2 + a^2 D = 4\mathfrak{A}^3, \quad D \geqq 3\mathfrak{A}^2,$$

folglich

$$(2b\mathfrak{A} - aB)^2 + 3a^2\mathfrak{A}^2 \leqq 4\mathfrak{A}^3.$$

Betrachten wir $B$ als positiv, wie es hier hinreichend ist, so erlangt offenbar $b$ den grösstmöglichsten negativen Werth für $B = 0$ (auch $a$ soll positiv sein); dies giebt

$$4b^2\mathfrak{A}^2 + 3a^2\mathfrak{A}^2 \leqq 4\mathfrak{A}^3 \quad \text{oder} \quad b^2 \leqq \mathfrak{A} - \tfrac{3}{4}a^2.$$

Vermittelst der Grenzen

[7] $a^2 \overset{=}{<} \frac{4}{3}\mathfrak{A}$, $b^2 \overset{=}{<} \mathfrak{A} - \frac{3}{4}a^2$ (für negative $b$)

$\overset{=}{<} \frac{4}{3}\mathfrak{A}$ (für positive $b$)

bestimme man in Bezug auf den gegebenen Werth von $\mathfrak{A}$ die verschiedenen Werthe von $a$, $b$, und schliesse diejenigen aus, für welche $c = \frac{1}{a}(bb - \mathfrak{A})$ keine ganze Zahl wird *). Nachdem $a, b, c$ auf diese Weise bestimmt worden sind, stelle man engere Grenzen für $B$ fest, von welcher Grösse man schon weiss, dass sie zwischen 0 und $\mathfrak{A}$ incl. liegen muss.

Es ist $d = \frac{1}{a}(bc - B)$, ferner muss $cc - bd = \frac{1}{a}(bB - c\mathfrak{A}) \overset{=}{>} \mathfrak{A}$ sein, daraus folgt $bB \overset{=}{>} (a + c)\mathfrak{A}$. Man erhält demnach leicht

[8] $B \overset{=}{<} \frac{a+c}{b}\mathfrak{A}$ (für negative $b$)

$\overset{=}{>} \frac{a+c}{b}\mathfrak{A}$ (für positive $b$).

Da aber $B$ nur die Werthe 0, 1, 2, 3, .... $\mathfrak{A}$ annehmen kann, so wird man hiernach bei negativen $b$ den Fall $a + c > 0$, bei positiven $b$ den Fall $a + c > b$ sofort ausschliessen. Für den Fall $b = 0$ giebt die Bedingung $cc - bd \overset{=}{>} \mathfrak{A}$, $cc \overset{=}{>} \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \overset{=}{>} a^2$; unter Voraussetzung dieser Bedingung darf $B$ jeden Werth der Reihe 0, 1, 2, 3, .... $\mathfrak{A}$ annehmen.

Zwischen den angegebenen Grenzen von $B$ suche man den **kleinsten** Werth von $B(B^0)$, für welchen $d = \frac{bc - B}{a}$ eine ganze Zahl wird; die successiven Werthe von $B$ werden die arithmetische Progression $B^0$, $B^0 + a$, $B^0 + 2a$, ...., bilden, ihnen entsprechen resp. die Werthe $d^0 = \frac{bc - B^0}{a}$, $d^0 - 1$, $d^0 - 2$, $d^0 - 3$, .... Dem Werthe $d^0$ entspricht ferner der Werth $\mathfrak{C}^0 = cc - bd^0$, und die successiven Werthe von $\mathfrak{C}$ sind $\mathfrak{C}^0$, $\mathfrak{C}^0 + b$, $\mathfrak{C}^0 + 2b$, $\mathfrak{C}^0 + 3b$, ...., wie leicht erhellt. Da endlich $D = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - BB$, so ist

$$D^0 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C}^0 - B^0 B^0$$

*) Den Fall $a = 0$ werden wir weiterhin betrachten.

der anfängliche Werth von $D$. Folgt $D'$ unmittelbar auf $D$, so hat man

$$D = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - BB,\quad D' = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C}' - (a+B)^2,$$

$$D' - D = 4\mathfrak{A}(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) - a^2 - 2aB = 4b\mathfrak{A} - a^2 - 2aB;$$

folglich:

$$\begin{aligned} D' - D &= 4b\mathfrak{A} - aa - 2aB, \\ D'' - D' &= 4b\mathfrak{A} - 3aa - 2aB, \\ D''' - D'' &= 4b\mathfrak{A} - 5aa - 2aB, \end{aligned}$$

u. s. w.

Da diese Werthe eine Progression mit der constanten Differenz $-2aa$ bilden, so bilden die successiven Werthe von $D$ eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, und sind hiernach leicht zu berechnen.

Nach diesen Principien ist die zweite Tabelle berechnet. In der letzten Verticalcolumne, welche nach den die Werthe von $B$ repräsentirenden Indices 0, 1, 2, 3, .... $\mathfrak{A}$ abgetheilt ist, findet man die sämmtlichen Werthe von $D$, welche den jedesmaligen Werthen von $B$ entsprechen können. Der erste Werth von $D$ ($D_0$) linker Hand markirt den entsprechenden Werth $B^0$, und wenn man $\varepsilon = \frac{1}{a}(B - B^0)$ macht, so findet man in der vierten und fünften Verticalcolumne die jedesmaligen Werthe von $d$, $\mathfrak{C}$. Wo die Breite des Papiers nicht ausreichend war, sind die den Werthen $B = 10, 11, 12$, etc. entsprechenden Werthe von $D$ in die folgende Horizontalreihe unter den Werthen $B=0, 1, 2$, etc. resp. eingetragen*).

Wir haben noch den Werth $a = 0$ zu betrachten. Da $b$ positiv genommen werden darf, so hat man $b = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $c = \frac{B}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$ muss ganz sein, also $B = 0, \sqrt{\mathfrak{A}}, 2\sqrt{\mathfrak{A}}, \ldots. \sqrt{\mathfrak{A}}\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, und $c = 0, 1, 2, 3, \ldots. \sqrt{\mathfrak{A}}$ resp. Man findet diese $c$ in der ersten Verticalcolumne der ersten Tabelle. Bezeichnet man den kleinsten Werth von $\mathfrak{C}$, welcher nicht $< \mathfrak{A}$ und $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}(cc - \mathfrak{C})$ zu einer ganzen Zahl macht, mit $\mathfrak{C}^0$, so ist offenbar

$$d^0 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}(cc - \mathfrak{C}^0),\quad d = d^0 - \varepsilon,\quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}^0 + \varepsilon\sqrt{\mathfrak{A}},$$

*) Wir hoffen, dass auch im Druck Alles in den Tabellen durch sich selbst verständlich sein wird. G.

wo $\varepsilon$ eine positive ganze Zahl. Die vierte Columne ist nach den successiven Werthen $\varepsilon=0, 1, 2, 3, \ldots.$ abgetheilt und enthält die entsprechenden Werthe der Determinante. Dieselben bilden in jeder Horizontalreihe eine gewöhnliche Progression mit der Differenz $4\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}$, da

$$D = 4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - BB = 4\mathfrak{A}(\mathfrak{C}^0 + \varepsilon\sqrt{\mathfrak{A}}) - BB = D^0 + 4\varepsilon\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}$$

ist.

Sind diese Tabellen berechnet, so schreibt man die successiven Werthe von $D \equiv 3$ und $\equiv 0 \pmod{4}$ auf von $D=3$ bis $D=2000$, und trägt die aus den Tabellen gezogenen Werthe der Form $f=(a, b, c, d)$ und ihrer Charakteristik $\varphi=(2\mathfrak{A}, B, 2\mathfrak{C})$ an der gehörigen Stelle ein. Mit jeder gefundenen reducirten Form $f=(a, b, c, d)$ sind drei andere zu verbinden, nämlich die beiden Entgegengesetzten $(a, -b, c, d)$; $(-a, b, -c, d)$ und die conträre Form $(-a, -b, -c, -d)$, wie wir schon oben bemerkt haben.

Dies ist der erste Theil der Arbeit. Der zweite bezieht sich auf die Klassification der reducirten kubischen Formen. Die allgemeinen Principien, nach welchen diese vollstreckt wird, sind in der Abhandlung „Versuch einer Theorie der homogenen Funktionen des dritten Grades mit zwei Variabeln" aus einander gesetzt. Der Uebersicht wegen stehen hier die Resultate.

Betrachten wir zuerst die Formen $f=(a, b, c, d)$ von derselben Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$. Wenn $B$ nicht verschwindet, so sind alle Formen dieser Art in der Tabelle bereits enthalten. Wenn aber $B=0$ ist, so hat man mit jeder Form der Tabelle die Entgegengesetzte $(a, -b, c, -d)$, oder auch $(-a, b, -c, d)$ zu verbinden. Die in der Tabelle aufgestellten Formen sind nun weder identisch, noch conträr, daher machen sie in den Fällen $\frac{4D}{m^2} {> 4 \atop = 3}$ *) immer verschiedene Klassen (Art. 14). Für den Fall $\frac{4D}{m^2}=4$, d. i. $D=m^2$, ist die Bedingung für die Identität der Klassen:

$$f=(a, b, c, d),$$

$$f'=\left(\pm\frac{bA-cB}{m}, \pm\frac{cA-bB}{m}, \pm\frac{dA-cB}{m}, \pm\frac{dB-cC}{m}\right).$$

*) $m$ ist das grösste gem. Maass von $A$, $2B$, $C$.

Z. B. bei $D=676$ finden sich in der Tabelle zur Charakteristik (26, 0, 26) die reducirten Formen

$$(2, -3, -2, 3); \quad (3, 2, -3, -2),$$

mit denen also die entgegengesetzten

$$(2, 3, -2, -3); \quad (3, -2, -3, 2)$$

zu verbinden sind. Man findet die beiden ersten Formen in dieselbe Klasse gehörend, mithin auch die beiden letzten, während die Formen (2, —3, —2, 3), (2, 3, —2, —3) in verschiedene Klassen gehören.

Sind die Charakteristiken weder identisch, noch entgegengesetzt, so können die kubischen Formen nicht derselben Klasse angehören. Die Identität der Klassen erfordert ferner, dass die Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$ entweder eine Ancepsform ist oder gleiche äussere Glieder hat.

Im ersten Falle ist $B=\pm\frac{1}{2}A$. Im Art. 39. wurde die Bedingung $D=m^2$ berücksichtigt. Ich werde aber zeigen, dass dieser Fall hier gar nicht vorkommen kann. Setzt man

$$A=mA', \quad 2B=mB', \quad C=mC',$$

so ist

$$4D=m^2(4A'C'-B'^2),$$

folglich wegen $D=m^2$:

$$A'C'-\left(\frac{B'}{2}\right)^2=1;$$

nun ist aber $B'=\pm A'$, folglich

$$\frac{A'}{2}\left(2C'-\frac{A'}{2}\right)=1, \quad \frac{A'}{2}=1, \quad A'=2, \; C'=1, \quad A=2m, \quad C=m, \quad B=\pm m,$$

$$\varphi=(2m, \; \pm m, \; m).$$

Diese Form ist aber keine Reducta, da $C<A$ ist.

Ebenso kann der Fall $D=m^2$ nicht vorkommen, wenn die Charakteristik $\varphi=(A, B, A)$ ist. Denn setzt man $A=mA'$, $2B=mB'$, so kommt, wegen $D=m^2$: $4+B'^2=4A'^2$; nun ist aber

$$2B \overset{=}{<} A, \text{ also } B' \overset{=}{<} A', \quad 4A'^2 \overset{=}{<} 4+A'^2, \quad A'^2 \overset{=}{<} \tfrac{4}{3}, \quad A'=1,$$

folglich

$$B'=0, \quad \varphi=(m, 0, m),$$

welcher Fall schon ausgeschlossen ist. Es sind also (Art. 39) die Bedingungen für die Identität der Klassen:

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm a' \\ b-a &= \pm b' \end{aligned}\right\} \text{ wenn die Charakteristik anceps ist,}$$

$$\left.\begin{aligned} d &= \pm a' \\ c &= \mp b' \end{aligned}\right\} \text{ wenn die Charakteristik gleiche äussere Glieder hat.}$$

Z. B. $D=147$, $\varphi=(14, 7, 14)$

$(1, -2, -3, -1)$; $(1, 3, 2, -1)$; $(2, -1, -3, -2)$; $(2, 3, 1, -2)$;

$(1, 2, -3, 1)$; $(1, -3, 2, 1)$; $(2, 1, -3, 2)$; $(2, -3, 1, 2)$;

$(3, 1, -2, -3)$; $(3, 2, -1, -3)$.

$(3, -1, -2, 3)$; $(3, -2, -1, 3)$.

Klassen: $(1, \pm 2, -3, \pm 1)$; $(2, \pm 1, -3, \pm 2)$; $(3, \pm 1, -2, \mp 3)$.

Man bemerke im Allgemeinen: Für jedes $D \equiv 0 \pmod{4}$ findet man in der Tabelle der reducirten Formen stets die Form $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}D)$ mit der Charakteristik $(2, 0, \frac{1}{2}D)$; sie macht mit ihrer Entgegengesetzten stets eine Klasse. Ebenso findet sich bei jedem $D \equiv 3 \pmod{4}$ die Form $\begin{pmatrix} 0, \ 1, \ 1, \ -\frac{D-3}{4} \\ 2, \ 1, \ \frac{D+1}{2} \end{pmatrix}$, die mit ihrer Entgegengesetzten ebenfalls nur eine Klasse ausmacht.

Es wäre hinreichend gewesen, bei jeder Determinante nur die primitiven Klassen zu berechnen, indem die derivirten Klassen sich aus den primitiven für kleinere Determinanten durch Multiplication mit einem Factor ergeben; doch sind die derivirten Klassen mit aufgestellt, da sie sich von selbst ergeben.

Eine Form $f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3=(a, b, c, d)$ heisst nämlich primitiv, wenn $a, b, c, d$ relative Primzahlen sind, dagegen derivirt, wenn diese Zahlen ein grösstes gem. Maass $\mu$ haben; die primitive Form, aus der sie abgeleitet, wird sein:

$$\left(\frac{a}{\mu}, \ \frac{b}{\mu}, \ \frac{c}{\mu}, \ \frac{d}{\mu}\right) = f_0.$$

Bezeichnet man die Determinante dieser letztern Form mit $D_0$, so ist

$$D = -a^2d^2 + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3 + 6abcd,$$

$$D_0 = -\left(\frac{a}{\mu}\right)^2\left(\frac{d}{\mu}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{\mu}\right)^2\left(\frac{c}{\mu}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{\mu}\right)\left(\frac{c}{\mu}\right)^3 - 4\left(\frac{d}{\mu}\right)\left(\frac{b}{\mu}\right)^3 + 6\left(\frac{a}{\mu}\right)\left(\frac{b}{\mu}\right)\left(\frac{c}{\mu}\right)\left(\frac{d}{\mu}\right),$$

folglich $D = \mu^4 D_0$. Hieraus sieht man, dass derivirte Formen nur bei denjenigen Determinanten vorkommen können, welche durch ein Biquadrat theilbar sind.

Für jeden Werth von $D$ giebt es primitive Formen; solche sind nämlich $(0, 1, 1, -\frac{D-3}{4})$ und alle daraus durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit der Systemdeterminante $+1$ resultirenden; oder $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}D)$ und alle daraus auf dieselbe Art resultirenden, jenachdem $D \equiv 3$ oder $D \equiv 0$ (Mod. 4) ist.

Die primitive Form $f = (a, b, c, d)$ ist eigentlich oder uneigentlich primitiv, jenachdem $a$, $3b$, $3c$, $d$ relative Primzahlen sind, oder den grössten gem. Factor 3 haben; im letzten Falle müssen $a$ und $d$ durch 3 theilbar sein; folglich werden $b$ und $c$ nicht zugleich den Factor 3 haben. Z. B. die Form $(3, -1, -4, -3)$ von der Determinante $-D = -507$ ist eine uneigentlich primitive Form.

Uneigentlich primitive Formen kann es nur geben, wenn $D$ durch 3 theilbar ist; in diesem Falle giebt es aber auch wirklich solche, z. B. $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}D$ und $(0, 1, 1, -\frac{D-3}{4})$, wie leicht erhellt. Für $D \equiv 0$ (mod. 3) giebt es möglicherweise keine eigentlich primitiven Formen. Z. B. wenn $D = 15$ ist, so lehrt die Tabelle der reducirten Formen, dass jede Form von der Determinante $-15$, $f = (a, b, c, d)$, durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, sich auf eine der Formen

$(0, 1, 1, -3)$, $(0, -1, 1, 3)$, $(0, 1, -1, -3)$, $(0, -1, -1, 3)$

zurückführen lässt, welche sämmtlich uneigentlich primitiv sind, und bekanntlich ist das grösste gem. Maass von $a$, $3b$, $3c$, $d$ dem grössten gem. Maass von $0, 3, 3, -3$, etc. gleich, daher ebenfalls $= 3$.

Die Ordnung einer kubischen Form bestimmt sich danach, ob dieselbe eigentlich primitiv oder uneigentlich primitiv ist, oder endlich nach der Art ihrer Ableitung aus einer primitiven Form von kleinerer Determinante.

Ist $D=e^4D'$, wo $D'$ durch kein Biquadrat theilbar ist, und sind $\tau$, $\tau'$, $\tau''$,.... die sämmtlichen Theiler von $e$ (die Einheit ausgeschlossen), so werden die sämmtlichen nicht primitiven Klassen zur Determinante $-D$ aus den sämmtlichen primitiven Klassen zu den Determinanten $-\frac{D}{\tau^4}$, $-\frac{D}{\tau'^4}$, $-\frac{D}{\tau''^4}$, etc. abgeleitet sein.

Wenn man in der Tabelle der kubischen Klassen bei einer Determinante nur Repräsentanten mit dem Anfangsgliede oder mit dem Endgliede null findet, so folgt leicht, dass dann durch jede Form von dieser Determinante die Zahl null dargestellt werden kann, oder, anders ausgedrückt, dass dieselbe einen rationalen Factor hat. Dies gilt z. B. von

$$D=4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 15,\ 19,\ 20,\ 24,\ \text{etc.}$$

Es ist aber auch sehr wohl möglich, dass ein Klassenrepräsentant, ohne dass eines der äussern Glieder null ist, einen rationalen Factor hat. Es wäre zweckmässig, bei jedem Repräsentanten diesen Factor, wenn er existirt, anzumerken. Fände man für eine Determinante $-D$ alle Klassenrepräsentanten mit einem rationalen Factor behaftet, so würde man die Wurzeln aller kubischen Gleichungen $az^3+3bz^2+3cz+d=0$, für welche

$$D=-a^2d^2+3b^2c^2-4ac^3-4db^3+6abcd,$$

durch Ermittelung der rationalen Wurzel bestimmen können.

Ich lasse hier noch eine aus der Theorie der kubischen Formen geschöpfte Methode folgen, eine rationale Wurzel der Gleichung

$$az^3+3bz^2+3cz+d=0$$

zu bestimmen und sich von ihrer Existenz zu überzeugen.

Ist $z=\frac{\alpha}{\gamma}$ eine solche, indem $\alpha$ und $\gamma$ relative Primzahlen sind, so kommt

$$a\alpha^3+3b\alpha^2\gamma+3c\alpha\gamma^2+d\gamma^3=0,$$

d. h. die Aufgabe reducirt sich darauf, die Werthe von $\alpha$, $\gamma$ zu finden (zwei gegen einander), mittelst welcher die Zahl null durch die Form $f=(a, b, c, d)$ dargestellt wird. Wir dürfen annehmen, dass $f$ eine primitive Form ist.

Macht man $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, so wird $f$ durch die Substitutionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in eine mit ihr eigentlich aequivalente Form mit dem Anfangsgliede null verwandelt. Diese Form sei $f'=(0, b', c', d')$; sie hat mit $f$ einerlei Determinante ($-D$). Setzt man nun $\beta+k\alpha$ statt $\beta$, $\delta+k\gamma$ statt $\gamma$, so verwandelt sich $f'$ in

$$(0,\ b',\ c'+2b'k,\ d'+3c'k+3b'k^2),$$

wie man leicht findet, und es kann $k$ so bestimmt werden, dass $c'+2b'k$, absolut genommen, zwischen den Grenzen 0 und $b'$ incl. liegt. Nun hat man $D=3b'^2c'^2-4b'^3d'$, folglich ist $b'^2$ ein Theiler von $D$. Offenbar genügt es auch, $b'$ als positiv anzusehen, wenn man nur zuletzt mit jedem gefundenen System $x=\alpha$, $y=\gamma$ das System $x=-\alpha$, $y=-\gamma$ verbindet. Hieraus ergiebt sich folgende Auflösung unserer Aufgabe.

Es sei $b'^2$ jeder Theiler von $D$ ($b'$ positiv),

$$c'=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots\ \pm(b'-1),\ b';$$

$$d'=\frac{3c'^2-\frac{D}{b'^2}}{4b'}\ \text{(eine ganze Zahl)};$$

$f'=(0,b',c',d')$ der Complex ($\Omega$) aller auf diese Weise resultirenden Formen. Sucht man in $\Omega$ alle mit $f$ eigentlich äquivalente Formen ($F$) und bestimmt alle jedesmaligen eigentlichen Transformationen aus $f$ in $F$, nämlich $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, so erhält man alle gesuchten Darstellungen $x=\alpha$, $y=\gamma$.

**Beweis.** I. Da $F=(0,b',c',d')$ aus $f$ durch die Substitution $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ hervorgeht, so findet sich

$$a\alpha^3+3b\alpha^2\gamma+3c\alpha\gamma^2+d\gamma^3=0,$$

wie es sein soll.

II. Alle Darstellungen sind verschieden. Gesetzt, man fände zwei gleiche, resultirend aus den Transformationen $\alpha,\beta,\gamma,\delta$; $\alpha,\beta',\gamma,\delta'$; so hätte man, da $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, $\alpha\delta'-\beta'\gamma=1$,

$$\beta'=\beta+k\alpha,\quad \delta'=\delta+k\gamma;$$

die Formen, in welche $f$ durch diese Substitutionen übergingе, wären somit

$$f'=(0,b',c',d'),$$

$$f''=(0,b',c'+2b'k,\ d'+3c'k+3b'k^2)=(0,b',c'',d''),$$

$$c''-c'\equiv 0\ (\text{mod. } 2b'),$$

gegen die Annahme.

III. Es wird keine Darstellung fehlen. Denn durch jede existirende Darstellung gelangt man durch die entsprechende Transformation von $f$ zu einer mit $f$ eigentlich aequivalenten Form $f'$ von der Art, wie die im Complex $\Omega$.

Nehmen wir jetzt an, dass in ($\Omega$) zwei verschiedene, mit $f$ zugleich eigentlich äquivalente Formen

$$f'=(0,\, b',\, c',\, d'),\quad f''=(0,\, b'',\, c'',\, d'')$$

vorkommen, und sehen, was daraus folgt. — Da diese Formen auch unter sich eigentlich äquivalent sind, so ist

$$(1)\qquad 0 = 3b'\alpha^2\gamma + 3c'\alpha\gamma^2 + d'\gamma^3,$$

$$(2)\qquad b'' = b'\alpha(\alpha\delta + 2\beta\gamma) + c'\gamma(\beta\gamma + 2\alpha\delta) + d'\gamma^2\delta,$$

$$(3)\qquad c'' = b'\beta(\beta\gamma + 2\alpha\delta) + c'\delta(\alpha\delta + 2\beta\gamma) + d'\gamma\delta^2,$$

$$(4)\qquad 1 = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Nach (1) kann zuerst $\gamma=0$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist aber nach (2) $b''=b'\alpha$, folglich, da $b'$, $b''$ positiv sind, $\alpha=1$, $b''=b'$, $\delta=1$, folglich nach (3) $c''=2b'\beta+c'$, $f''=(0, b', c'+2b'\beta, d'+3c'\beta+3b'\beta\beta)$; aber diese Form findet sich mit $f'$ nicht zugleich im Complex $\mathfrak{K}$, da in demselben keine zwei Werthe von $c'$ nach dem mod. $2b'$ congruent sind, daher $\gamma=0$ unzulässig.

Ist $\gamma \gtrless 0$, so kommt nach (1) und (2):

$$3b'\alpha^2 + 3c'\alpha\gamma + d'\gamma^2 = 0,\quad 2b'\alpha + c'\gamma = -b'';$$

ferner ist $b'^2(3c'^2 - 4b'd') = D$, folglich

$$b''^2 - \frac{D\gamma^2}{3b'^2} = 0,\ \text{oder}\ D = \frac{3b'^2b''^2}{\gamma^2},\quad \tfrac{1}{3}D = \left(\frac{b'b''}{\gamma}\right)^2.$$

Da $3D$ ein Quadrat ist, $3D=s^2$, so ist $s=3s'$, $\frac{1}{3}D=s'^2$, folglich $D$ durch 3 theilbar, und $\frac{1}{3}D$ eine Quadratzahl. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es in ($\Omega$) entweder keine, oder eine mit $f$ eigentlich aequivalente Form $f'$, und da in diesem Falle offenbar $\dfrac{4D}{m^2}$ nicht $=3$ sein kann ($m$ das grösste gem. Maass von $2(bb-ac)$, $2(bc-ad)$, $2(cc-bd)$), so giebt es nur eine eigentliche Transformation aus $f$ in $f'$, folglich auch nur ein System von Werthen $x=\pm\alpha$, $y=\pm\gamma$, welche $f(x,y)=ax^3+\ldots+dy^3=0$ machen. Hieraus folgt:

Wenn $\frac{1}{3}D$ keine quadratische ganze Zahl ist, so hat die Gleichung

$$az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0$$

entweder keine rationale Wurzel, oder eine.

Es lässt sich dieser Satz aber nicht umkehren, d. h. wenn $D\equiv 0$ (mod. 3) und $\frac{1}{3}D$ ein Quadrat ist, so braucht die obige kubische Gleichung nicht lauter rationale Wurzeln zu haben.

Man kann den nämlichen Satz, welchen auch Legendre in der Théorie des nombres Tome II. p. 120. erweist, aus dem Ausdrucke von $D$ als Function der drei Wurzeln der Gleichung

$$f = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0$$

herleiten. Sind diese Wurzeln $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, so kann man

$$f = a(z-\omega)(z^2 + mz + n)$$

setzen, und erhält

$$3b = a(m-\omega), \quad 3c = a(n - m\omega), \quad d = -an\omega,$$

$$27D = -27a^2d^2 + 81b^2c^2 - 108ac^3 - 108db^3 + 162abcd,$$

folglich durch Substitution

$$27D = a^4(m^2 - 4n)(\omega^2 + m\omega + n).$$

Nun ist $-m = \omega' + \omega''$, $n = \omega'\omega''$, folglich

$$27D = a^4(\omega - \omega')^2(\omega - \omega'')^2(\omega' - \omega'')^2,$$

woraus der Satz folgt.

Zwei einfache Fälle verdienen noch beachtet zu werden.

Ist 1°. $D$ durch kein Quadrat theilbar, so hat man nothwendig $b' = 1$, $d' = \frac{1}{4}(3c'^2 - D)$, also, da $D$ ungerade ist, $c' = 1$, $d' = -\frac{1}{4}(D-3)$, $f' = (0, 1, 1, -\frac{D-3}{4})$, die einzige Form im Complex $\Omega$, welche zugleich eine Reducta ist. Findet man in diesem Falle noch andere Klassenformen bei $D$, so kann keine derselben einen rationalen Factor haben.

2°. Ist $\frac{1}{4}D$ ganz und durch kein Quadrat theilbar, so kann $b'$ $= 1$ oder $= 2$ sein; im ersten Falle kommt $f' = (0, 1, 0, -\frac{1}{4}D)$. Im andern Falle ist $d' = \frac{1}{8}(3c'^2 - \frac{1}{4}D)$, von den Werthen $c' = 0$, $\pm 1$, 2 sind 0, 2 unzulässig, da sie $\frac{1}{4}D$ durch 4 theilbar machen, folglich $c' = \pm 1$, $d' = \frac{1}{8}(3 - \frac{1}{4}D)$, $f' = (0, 2, 1, -\frac{D-12}{32})$ oder $= (0, 2, -1, -\frac{D-12}{32})$ mit der Charakteristik $\varphi = (8, \pm 2, \frac{4-D}{8})$, welche für $D \overline{\gtrless} 68$ eine Reducta ist. Wenn also $\frac{1}{4}D$ durch kein Quadrat theilbar ist, so muss jede mit einem rationalen Factor behaftete kubische Form von der Determinante $-D$ entweder mit der Form $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}D)$, oder mit einer der drei Formen $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}D)$, $(0, 2, 1, -\frac{D-12}{32})$, $(0, 2, -1, -\frac{D-12}{32})$ eigentlich aequivalent sein, jenachdem $\frac{1}{4}D$ nicht $\equiv 3 \pmod{8}$ oder $\equiv 3 \pmod{8}$ ist.

---

## Erste Tabelle.

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=1 \\ b=1 \\ B=c \end{pmatrix}$

| c | d | $\mathfrak{C}$ | D |
|---|---|---|---|
| 0 | $-1-\varepsilon$ | $1+\varepsilon$ | $4+4\varepsilon$ |
| 1 | $0-\varepsilon$ | $1+\varepsilon$ | $3+4\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=4 \\ b=2 \\ B=2c \end{pmatrix}$

| c | d | $\mathfrak{C}$ | D |
|---|---|---|---|
| 0 | $-2-\varepsilon$ | $4+2\varepsilon$ | $64+32\varepsilon$ |
| 1 | $-2-\varepsilon$ | $5+2\varepsilon$ | $76+32\varepsilon$ |
| 2 | $0-\varepsilon$ | $4+2\varepsilon$ | $48+32\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=9 \\ b=3 \\ B=3c \end{pmatrix}$

| c | d | $\mathfrak{C}$ | D |
|---|---|---|---|
| 0 | $-3-\varepsilon$ | $9+3\varepsilon$ | $324+108\varepsilon$ |
| 1 | $-3-\varepsilon$ | $10+3\varepsilon$ | $351+108\varepsilon$ |
| 2 | $-2-\varepsilon$ | $10+3\varepsilon$ | $324+108\varepsilon$ |
| 3 | $0-\varepsilon$ | $9+3\varepsilon$ | $243+108\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=16 \\ b=4 \\ B=4c \end{pmatrix}$

| c | d | $\mathfrak{C}$ | D |
|---|---|---|---|
| 0 | $-4-\varepsilon$ | $16+4\varepsilon$ | $1024+256\varepsilon$ |
| 1 | $-4-\varepsilon$ | $17+4\varepsilon$ | $1072+256\varepsilon$ |
| 2 | $-3-\varepsilon$ | $16+4\varepsilon$ | $960+256\varepsilon$ |
| 3 | $-2-\varepsilon$ | $17+4\varepsilon$ | $944+256\varepsilon$ |
| 4 | $0-\varepsilon$ | $16+4\varepsilon$ | $768+256\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=25 \\ b=5 \\ B=5c \end{pmatrix}$

| c | d | $\mathfrak{C}$ | D |
|---|---|---|---|
| 0 | $-5-\varepsilon$ | $25+5\varepsilon$ | $2500+500\varepsilon$ |
| 1 | $-5-\varepsilon$ | $26+5\varepsilon$ | $2575+500\varepsilon$ |
| 2 | $-5-\varepsilon$ | $29+5\varepsilon$ | $2800+500\varepsilon$ |
| 3 | $-4-\varepsilon$ | $29+5\varepsilon$ | $2675+500\varepsilon$ |
| 4 | $-3-\varepsilon$ | $31+5\varepsilon$ | $2700+500\varepsilon$ |
| 5 | $0-\varepsilon$ | $25+5\varepsilon$ | $1875+500\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=36 \\ b=6 \\ B=6c \end{pmatrix}$

| $c$ | $d$ | $\mathfrak{C}$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-6-\varepsilon$ | $36+6\varepsilon$ | $5184+864\varepsilon$ |
| 1 | $-6-\varepsilon$ | $37+6\varepsilon$ | $5296+864\varepsilon$ |
| 2 | $-6-\varepsilon$ | $40+6\varepsilon$ | $5616+864\varepsilon$ |
| 3 | $-5-\varepsilon$ | $39+6\varepsilon$ | $5292+864\varepsilon$ |
| 4 | $-4-\varepsilon$ | $40+6\varepsilon$ | $5184+864\varepsilon$ |
| 5 | $-2-\varepsilon$ | $37+6\varepsilon$ | $4432+864\varepsilon$ |
| 6 | $0-\varepsilon$ | $36+6\varepsilon$ | $3888+864\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=49 \\ b=7 \\ B=7c \end{pmatrix}$

| $c$ | $d$ | $\mathfrak{C}$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-7-\varepsilon$ | $49+7\varepsilon$ | $9604+1372\varepsilon$ |
| 1 | $-7-\varepsilon$ | $50+7\varepsilon$ | $9751+1372\varepsilon$ |
| 2 | $-7-\varepsilon$ | $50+7\varepsilon$ | $10192+1372\varepsilon$ |
| 3 | $-6-\varepsilon$ | $51+7\varepsilon$ | $9555+1372\varepsilon$ |
| 4 | $-5-\varepsilon$ | $51+7\varepsilon$ | $9212+1372\varepsilon$ |
| 5 | $-4-\varepsilon$ | $53+7\varepsilon$ | $9163+1372\varepsilon$ |
| 6 | $-2-\varepsilon$ | $50+7\varepsilon$ | $8036+1372\varepsilon$ |
| 7 | $0-\varepsilon$ | $49+7\varepsilon$ | $7203+1372\varepsilon$ |

$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}=64 \\ b=8 \\ B=8c \end{pmatrix}$

| $c$ | $d$ | $\mathfrak{C}$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-8-\varepsilon$ | $64+8\varepsilon$ | $16384+2048\varepsilon$ |
| 1 | $-8-\varepsilon$ | $65+8\varepsilon$ | $16576+2048\varepsilon$ |
| 2 | $-8-\varepsilon$ | $68+8\varepsilon$ | $17152+2048\varepsilon$ |
| 3 | $-7-\varepsilon$ | $65+8\varepsilon$ | $16064+2048\varepsilon$ |
| 4 | $-6-\varepsilon$ | $64+8\varepsilon$ | $15360+2048\varepsilon$ |
| 5 | $-5-\varepsilon$ | $65+8\varepsilon$ | $15040+2048\varepsilon$ |
| 6 | $-4-\varepsilon$ | $68+8\varepsilon$ | $15104+2048\varepsilon$ |
| 7 | $-2-\varepsilon$ | $65+8\varepsilon$ | $13504+2048\varepsilon$ |
| 8 | $0-\varepsilon$ | $64+8\varepsilon$ | $12288+2048\varepsilon$ |

## Zweite Tabelle.

𝔑 = 1

| a | b | c | d | ℭ | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | —1 | 0—1 | 11 | 43 |
| | 1 | 0 | —1 | 1 | 3 |

𝔑 = 2.

| a | b | c | d | ℭ | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —1 | —1 | 1 | 2 | 16 |
| | 0 | —2 | 0—1—2 | 444 | 32 31 28 |
| | 1 | —1 | —1—2—3 | 234 | 26 23 28 |

𝔑 = 3

| a | b | c | d | ℭ | D 0 | D 1 | D 2 | D 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —1 | —2 | 2—ε | 6—ε | 72 | 59 | 44 | 27 |
| | 0 | —3 | 0—ε | 9 | 108 | 107 | 104 | 99 |
| | 1 | —2 | —2—ε | 6+ε | 72 | 83 | 92 | 99 |
| | 2 | 1 | —1 | 3 | | | | 27 |
| 2 | 1 | —1 | —2 | 3 | | | | 27 |

𝔑 = 4

| a | b | c | d | ℭ | D 0 | D 1 | D 2 | D 3 | D 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —1 | —3 | 3—ε | 12—ε | 192 | 175 | 156 | 135 | 112 |
| | 0 | —4 | 0—ε | 16 | 256 | 255 | 252 | 247 | 240 |
| | 1 | —3 | —3—ε | 12+ε | 192 | 207 | 220 | 231 | 240 |
| | 2 | 0 | —2—ε | 4+2ε | | | 60 | 67 | 112 |
| 2 | 0 | —2 | 0—ε | 4 | 64 | | 60 | | 48 |
| | 2 | 0 | 0 | 4 | | | | | 48 |

𝔑 = 5

| a | b | c | d | ℭ | D 0 | D 1 | D 2 | D 3 | D 4 | D 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —2 | —1 | 2 | 5 | 100 | | | | | |
| | —1 | —4 | 4—ε | 20—ε | 400 | 379 | 356 | 331 | 304 | 275 |
| | 0 | —5 | 0—ε | 25 | 500 | 499 | 496 | 491 | 484 | 475 |
| | 1 | —4 | —4—ε | 20+ε | 400 | 419 | 436 | 451 | 464 | 475 |
| | 2 | —1 | —2—ε | 5+2ε | 100 | 139 | 176 | 211 | 244 | 275 |
| 2 | —1 | —2 | 1 | 5 | 100 | | | | | |
| | 1 | —2 | —1—ε | 5+ε | 100 | | 116 | | 124 | |

$n = 6$

| $n$ | $b$ | $c$ | $d$ | $C$ | $D$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | ·2 | 4 − e | 12 − 2e | 288 | 230 | 188 | 136 | | | |
| | −1 | 5 | 5 · e | 30 − e | 720 | 696 | 668 | 639 | 608 | 576 | 540 |
| | 0 | −6 | 0 − e | 30 | 864 | 863 | 860 | 855 | 848 | 839 | 828 |
| | 1 | −5 | −5 · e | 30 + e | 720 | 743 | 704 | 783 | 800 | 815 | 828 |
| | 2 | −2 | 4 − e | 12 + 2e | 288 | 336 | 340 | 423 | 464 | 503 | 540 |
| 2 | 0 | 3 | 0 · e | 9 | 216 | | 212 | | 200 | | 180 |
| | 2 | 1 | −3 − e | 7 + 2e | | | | | 162 | | 180 |

$n = 7$

| $n$ | $b$ | $c$ | $d$ | $C$ | $D$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 + e | 21 − 2e | 588 | 531 | 472 | 411 | 348 | 283 | 216 | 147 |
| | 1 | −6 | 6 − e | 42 + e | 1176 | 1147 | 1116 | 1083 | 1048 | 1011 | 972 | 931 |
| | 0 | −7 | 0 − e | 49 | 1372 | 1371 | 1368 | 1363 | 1356 | 1347 | 1336 | 1323 |
| | 1 | −6 | 6 − e | 42 + e | 1176 | 1203 | 1228 | 1251 | 1272 | 1291 | 1308 | 1323 |
| | 2 | −3 | 6 − e | 21 + 2e | 588 | 643 | 696 | 747 | 796 | 843 | 888 | 931 |
| | [illegible] | [illegible] | 1 | [illegible] | | | | | | | | 147 |
| 2 | [illegible] | −3 | 1 − e | 10 − e | | 274 | | 243 | | 199 | | 147 |
| | [illegible] | 3 | −2 − e | 11 + e | | 307 | | 327 | | 339 | | 343 |
| | [illegible] | 1 | 2 | [illegible] | | | | | | | | 147 |
| 3 | [illegible] | −2 | 3 | [illegible] | | | | | | | | 147 |
| | [illegible] | −1 | 3 | [illegible] | | | | | | | | 147 |

$n=8$

| a | b | c | d | 𝔈 | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −4 | 8−ε | 32−2ε | 1024 | 959 | 892 | 823 | 752 | 679 | 604 | 527 | 448 |
| | −1 | −7 | 7−ε | 56−ε | 1792 | 1759 | 1724 | 1687 | 1648 | 1607 | 1564 | 1519 | 1472 |
| | 0 | −8 | 0−ε | 64 | 2048 | 2047 | 2044 | 2039 | 2032 | 2023 | 2012 | 1999 | 1984 |
| | 1 | −7 | −7−ε | 56+ε | 1792 | 1823 | 1852 | 1879 | 1904 | 1927 | 1948 | 1967 | 1984 |
| | 2 | −4 | −8−ε | 32+2ε | 1024 | 1087 | 1148 | 1207 | 1264 | 1319 | 1372 | 1423 | 1472 |
| | 3 | 1 | −3−ε | 10+3ε | | | | | | | 284 | 367 | 448 |
| 2 | −2 | −2 | 2 | 8 | 256 | | | | | | | | |
| | 0 | −4 | 0−ε | 16 | 512 | | 508 | | 496 | | 476 | | 448 |
| | 2 | −2 | −2−ε | 8+2ε | 256 | | 316 | | 368 | | 412 | | 448 |

$n=9$

| a | b | c | d | 𝔈 | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −5 | 10−ε | 45−2ε | 1620 | 1547 | 1472 | 1395 | 1316 | 1235 | 1152 | 1067 | 980 | 891 |
| | −1 | −8 | 8−ε | 72−ε | 2592 | 2555 | 2516 | 2475 | 2432 | 2387 | 2340 | 2291 | 2240 | 2187 |
| | 0 | −9 | 0−ε | 81 | 2916 | 2915 | 2912 | 2907 | 2900 | 2891 | 2880 | 2867 | 2852 | 2835 |
| | 1 | −8 | −8−ε | 72+ε | 2592 | 2627 | 2660 | 2691 | 2720 | 2747 | 2772 | 2795 | 2816 | 2835 |
| | 2 | −5 | −10−ε | 45+2ε | 1620 | 1691 | 1760 | 1827 | 1892 | 1955 | 2016 | 2075 | 2132 | 2187 |
| | 3 | 0 | −3−ε | 9+3ε | | | | 315 | 416 | 515 | 612 | 707 | 800 | 891 |
| 2 | −1 | −4 | 2−ε | 18−ε | 648 | | 608 | | 560 | | 504 | | 440 | |
| | 1 | −4 | −2−ε | 18+ε | 648 | | 680 | | 704 | | 720 | | 728 | |
| | 3 | 0 | −3−ε | 9+3ε | | | | | | | 288 | | 368 | |
| 3 | 0 | −3 | 0−ε | 9 | 324 | | | 315 | | | 288 | | | 243 |
| | 3 | 0 | −3 | 9 | | | | | | | | | | 243 |

$n = 10$

| a | b | c | d | € | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −1 | 3 | 10 | 400 | | | | | | | | | |
| | −2 | −6 | 12−ε | 60−2ε | 2400 | 2319 | 2236 | 2151 | 2064 | 1975 | 1884 | 1791 | 1696 | 1599 |
| | | | | | 1500 | | | | | | | | | |
| | −1 | −9 | 9−ε | 90−ε | 3600 | 3559 | 3516 | 3471 | 3424 | 3375 | 3324 | 3271 | 3216 | 3159 |
| | | | | | 3100 | | | | | | | | | |
| | 0 | −10 | −0−ε | 100 | 4000 | 3999 | 3996 | 3991 | 3984 | 3975 | 3964 | 3951 | 3936 | 3919 |
| | | | | | 8900 | | | | | | | | | |
| | 1 | −9 | −9−ε | 90+ε | 3600 | 3639 | 3676 | 3711 | 3744 | 3775 | 3804 | 3831 | 3856 | 3879 |
| | | | | | 3900 | | | | | | | | | |
| | 2 | −5 | −10−ε | 45+2ε | 1800 | 1879 | 1956 | 2031 | 2104 | 2175 | 2244 | 2311 | 2376 | 2439 |
| | | | | | 2500 | | | | | | | | | |
| | 3 | −1 | −3−ε | 10+3ε | 400 | 519 | 636 | 751 | 864 | 975 | 1084 | 1191 | 1296 | 1399 |
| | | | | | 1500 | | | | | | | | | |
| 2 | −2 | −3 | 3−ε | 15−2ε | 600 | | 516 | | 424 | | | | | |
| | 0 | −5 | 0−ε | 25 | 1000 | | 996 | | 984 | | 964 | | 936 | |
| | | | | | 900 | | | | | | | | | |
| | 2 | −3 | −3−ε | 15+2ε | 600 | | 676 | | 744 | | 804 | | 856 | |
| | | | | | 900 | | | | | | | | | |
| 3 | −1 | −3 | 1 | 10 | 400 | | | | | | | | | |
| | 1 | −3 | −1−ε | 10+ε | 400 | | | 431 | | | 444 | | | 439 |
| | 2 | −2 | −3−ε | 10+2ε | | | | | | 375 | | | 416 | |

$a = 11$

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $\mathfrak{C}$ | $D$ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −2 | 6−ε | 22−3ε | 968 | 835 | 700 | 563 | | | | | | |
| | −2 | −7 | 14−ε | 77−2ε | 3388 | 3299 | 3208 | 3115 | 3020 | 2923 | 2824 | 2723 | 2620 | 2515 |
| | | | | | 2408 | 2299 | | | | | | | | |
| | −1 | −10 | 10−ε | 110−ε | 4840 | 4795 | 4748 | 4699 | 4648 | 4595 | 4540 | 4483 | 4424 | 4363 |
| | | | | | 4300 | 4235 | | | | | | | | |
| | 0 | −11 | 0−ε | 121 | 5324 | 5323 | 5320 | 5315 | 5308 | 5299 | 5288 | 5275 | 5260 | 5243 |
| | | | | | 5224 | 5203 | | | | | | | | |
| | 1 | −10 | −10−ε | 110+ε | 4840 | 4883 | 4924 | 4963 | 5000 | 5035 | 5068 | 5099 | 5128 | 5155 |
| | | | | | 5180 | 5203 | | | | | | | | |
| | 2 | −7 | −14−ε | 77+2ε | 3388 | 3475 | 3560 | 3643 | 3724 | 3803 | 3880 | 3955 | 4028 | 4099 |
| | | | | | 4168 | 4235 | | | | | | | | |
| | 3 | −2 | −6−ε | 22+3ε | 968 | 1099 | 1228 | 1355 | 1480 | 1603 | 1724 | 1843 | 1960 | 2075 |
| | | | | | 2188 | 2299 | | | | | | | | |
| 2 | −1 | −5 | 2−ε | 27−ε | | 1187 | | | | 1075 | | 1007 | | 931 |
| | | | | | | 847 | | 1135 | | | | | | |
| | 1 | −5 | −3−ε | 28+ε | | 1231 | | | | 1295 | | 1315 | | 1327 |
| | | | | | | 1331 | | 1267 | | | | | | |
| | 3 | −1 | −4−ε | 13+3ε | | | | | | 547 | | 655 | | 755 |
| | | | | | | 847 | | | | | | | | |

𝔄 = 12

| a | b | c | d | ℭ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | − 3 | 9−ε | 36−3ε | 1728 | 1583 | 1436 | 1287 | 1136 | 983 | 828 | 671 | 512 | |
| | −2 | − 8 | 16−ε | 96−2ε | 4608 | 4511 | 4412 | 4310 | 4208 | 4103 | 3996 | 3887 | 3776 | 3663 |
| | | | | | 3548 | 3431 | 3312 | | | | | | | |
| | −1 | −11 | 11−ε | 132−ε | 6336 | 6287 | 6236 | 6183 | 6128 | 6071 | 6012 | 5951 | 5888 | 5823 |
| | | | | | 5756 | 5687 | 5616 | | | | | | | |
| | 0 | −12 | 0−ε | 144 | 6912 | 6911 | 6908 | 6903 | 6896 | 6887 | 6876 | 6863 | 6848 | 6831 |
| | | | | | 6812 | 6791 | 6768 | | | | | | | |
| | 1 | −11 | −11−ε | 132+ε | 6336 | 6383 | 6428 | 6471 | 6512 | 6551 | 6588 | 6623 | 6656 | 6687 |
| | | | | | 6716 | 6743 | 6768 | | | | | | | |
| | 2 | − 8 | −16−ε | 96+2ε | 4608 | 4703 | 4796 | 4887 | 4976 | 5063 | 5148 | 5231 | 5312 | 5391 |
| | | | | | 5468 | 5543 | 5616 | | | | | | | |
| | 3 | − 3 | − 9−ε | 36+3ε | 1728 | 1871 | 2012 | 2151 | 2288 | 2323 | 2556 | 2687 | 2816 | 2943 |
| | | | | | 3068 | 3191 | 3312 | | | | | | | |
| 2 | −2 | − 4 | 4−ε | 24−2ε | 1152 | | 1052 | | 944 | | 828 | | 704 | |
| | | | | | 572 | | 432 | | | | | | | |
| | 0 | − 6 | 0−ε | 36 | 1728 | | 1724 | | 1712 | | 1692 | | 1664 | |
| | | | | | 1628 | | 1584 | | | | | | | |
| | 2 | − 4 | − 4−ε | 24+2ε | 1152 | | 1244 | | 1328 | | 1404 | | 1472 | |
| | | | | | 1532 | | 1584 | | | | | | | |
| | 4 | 2 | − 2 | 12 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 432 | | | | | | | |
| 3 | 0 | − 4 | 0−ε | 16 | 768 | | | 759 | | | 732 | | | 687 |
| | | | | | | | 624 | | | | | | | |
| | 3 | − 1 | − 4−ε | 13+3ε | | | | | | | | | | 543 |
| | | | | | | | 624 | | | | | | | |
| 4 | 2 | − 2 | − 4 | 12 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 432 | | | | | | | |

**$n = 13$**

| a | b | c | d | 𝔈 | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —3 | — 4 | 12 —ε | 52—3ε | 2704 | 2547 | 2388 | 2227 | 2064 | 1899 | 1732 | 1563 | 1392 | 1219 |
| | | | | | 1044 | 867 | 688 | 507 | | | | | | |
| | —2 | — 9 | 18—ε | 117—2ε | 6084 | 5979 | 5872 | 5763 | 5652 | 5539 | 5424 | 5307 | 5188 | 5067 |
| | | | | | 4944 | 4819 | 4692 | 4563 | | | | | | |
| | —1 | —12 | 12—ε | 156—ε | 8112 | 8059 | 8004 | 7947 | 7888 | 7827 | 7764 | 7699 | 7632 | 7563 |
| | | | | | 7492 | 7419 | 7344 | 7267 | | | | | | |
| | 0 | —13 | 0—ε | 169 | 8788 | 8787 | 8784 | 8779 | 8772 | 8763 | 8752 | 8739 | 8724 | 8707 |
| | | | | | 8688 | 8667 | 8644 | 8619 | | | | | | |
| | 1 | —12 | —12—ε | 156+ε | 8112 | 8163 | 8212 | 8259 | 8304 | 8347 | 8388 | 8427 | 8464 | 8499 |
| | | | | | 8532 | 8563 | 8592 | 8619 | | | | | | |
| | 2 | — 9 | —18—ε | 117+2ε | 6084 | 6187 | 6288 | 6387 | 6484 | 6579 | 6672 | 6763 | 6852 | 6939 |
| | | | | | 7024 | 7107 | 7288 | 7267 | | | | | | |
| | 3 | — 4 | —12—ε | 52+3ε | 2704 | 2859 | 3012 | 3163 | 3312 | 3459 | 3604 | 3747 | 3888 | 4029 |
| | | | | | 4164 | 4299 | 4432 | 4563 | | | | | | |
| | 4 | 3 | — 1 | 13 | | | | 507 | | | | | | |

**𝔄 = 12**

| a | b | c | d | 𝔈 | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −3 | 9−ε | 36−3ε | 1728 | 1583 | 1436 | 1287 | 1136 | 983 | 828 | 671 | 512 | |
| | −2 | −8 | 16−ε | 96−2ε | 4608 | 4511 | 4412 | 4310 | 4208 | 4103 | 3996 | 3887 | 3776 | 3663 |
| | | | | | 3548 | 3431 | 3312 | | | | | | | |
| | −1 | −11 | 11−ε | 132−ε | 6336 | 6287 | 6236 | 6183 | 6128 | 6071 | 6012 | 5951 | 5888 | 5823 |
| | | | | | 5756 | 5687 | 5616 | | | | | | | |
| | 0 | −12 | 0−ε | 144 | 6912 | 6911 | 6908 | 6903 | 6896 | 6887 | 6876 | 6863 | 6848 | 6831 |
| | | | | | 6812 | 6791 | 6768 | | | | | | | |
| | 1 | −11 | −11−ε | 132+ε | 6336 | 6383 | 6428 | 6471 | 6512 | 6551 | 6588 | 6623 | 6656 | 6687 |
| | | | | | 6716 | 6743 | 6768 | | | | | | | |
| | 2 | −8 | −16−ε | 96+2ε | 4608 | 4703 | 4796 | 4887 | 4976 | 5063 | 5148 | 5231 | 5312 | 5391 |
| | | | | | 5468 | 5543 | 5616 | | | | | | | |
| | 3 | −3 | −9−ε | 36+3ε | 1728 | 1871 | 2012 | 2151 | 2288 | 2323 | 2556 | 2687 | 2816 | 2943 |
| | | | | | 3068 | 3191 | 3312 | | | | | | | |
| 2 | −2 | −4 | 4−ε | 24−2ε | 1152 | | 1052 | | 944 | | 828 | | 704 | |
| | | | | | 572 | | 432 | | | | | | | |
| | 0 | −6 | 0−ε | 36 | 1728 | | 1724 | | 1712 | | 1692 | | 1664 | |
| | | | | | 1628 | | 1584 | | | | | | | |
| | 2 | −4 | −4−ε | 24+2ε | 1152 | | 1244 | | 1328 | | 1404 | | 1472 | |
| | | | | | 1532 | | 1584 | | | | | | | |
| | 4 | 2 | −2 | 12 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 432 | | | | | | | |
| 3 | 0 | −4 | 0−ε | 16 | 768 | | | 759 | | | 732 | | | 687 |
| | | | | | | | 624 | | | | | | | |
| | 3 | −1 | −4−ε | 13+3ε | | | | | | | | | | 543 |
| | | | | | | | 624 | | | | | | | |
| 4 | 2 | −2 | −4 | 12 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 432 | | | | | | | |

$\mathfrak{A} = 13$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −4 | $12-\varepsilon$ | $52-3\varepsilon$ | 2704 | 2547 | 2388 | 2227 | 2064 | 1899 | 1732 | 1563 | 1392 | 1219 |
| | | | | | 1044 | 867 | 688 | 507 | | | | | | |
| | −2 | −9 | $18-\varepsilon$ | $117-2\varepsilon$ | 6084 | 5979 | 5872 | 5763 | 5652 | 5539 | 5424 | 5307 | 5188 | 5067 |
| | | | | | 4944 | 4819 | 4692 | 4563 | | | | | | |
| | −1 | −12 | $12-\varepsilon$ | $156-\varepsilon$ | 8112 | 8059 | 8004 | 7947 | 7888 | 7827 | 7764 | 7699 | 7632 | 7563 |
| | | | | | 7492 | 7419 | 7344 | 7267 | | | | | | |
| | 0 | −13 | $0-\varepsilon$ | 169 | 8788 | 8787 | 8784 | 8779 | 8772 | 8763 | 8752 | 8739 | 8724 | 8707 |
| | | | | | 8688 | 8667 | 8644 | 8619 | | | | | | |
| | 1 | −12 | $-12-\varepsilon$ | $156+\varepsilon$ | 8112 | 8163 | 8212 | 8259 | 8304 | 8347 | 8388 | 8427 | 8464 | 8499 |
| | | | | | 8532 | 8563 | 8592 | 8619 | | | | | | |
| | 2 | −9 | $-18-\varepsilon$ | $117+2\varepsilon$ | 6084 | 6187 | 6288 | 6387 | 6484 | 6579 | 6672 | 6763 | 6852 | 6939 |
| | | | | | 7024 | 7107 | 7288 | 7267 | | | | | | |
| | 3 | −4 | $-12-\varepsilon$ | $52+3\varepsilon$ | 2704 | 2859 | 3012 | 3163 | 3312 | 3459 | 3604 | 3747 | 3888 | 4029 |
| | | | | | 4164 | 4299 | 4432 | 4563 | | | | | | |
| | 4 | 3 | −1 | 13 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 507 | | | | | | |

𝔄 = 13

| a | b | c | d | 𝔈 | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | −3 | −2 | 3 | 13 | 676 | | | | | | | | | |
| | −1 | −6 | 3−ε | 39−ε | 2028 | | 1972 | | 1908 | | 1836 | | 1756 | |
| | | | | | 1668 | | 1572 | | | | | | | |
| | 1 | −6 | −3−ε | 39+ε | 2028 | | 2076 | | 2116 | | 2148 | | 2172 | |
| | | | | | 2188 | | 2196 | | | | | | | |
| | 3 | +2 | −3−ε | 13+3ε | 676 | | 828 | | 972 | | 1108 | | 1236 | |
| | | | | | 1356 | | 1468 | | | | | | | |
| 3 | −2 | −3 | 2 | 13 | 676 | | | | | | | | | |
| | −1 | −4 | 1−ε | 17−ε | | 883 | | | 816 | | | 731 | | |
| | | | | | 628 | | | 507 | | | | | | |
| | 1 | −4 | −2−ε | 18+ε | | | 932 | | | 963 | | | 976 | |
| | | | | | | 971 | | | | | | | | |
| | 2 | −3 | −2−ε | 13+2ε | 676 | | | 771 | | | 848 | | | 907 |
| | | | | | | | 948 | | | | | | | |
| | 4 | 1 | −3 | 13 | | | | 507 | | | | | | |
| 4 | 1 | −3 | −4 | 13 | | | | 507 | | | | | | |
| | 3 | −1 | −4 | 13 | | | | 507 | | | | | | |

$\mathfrak{A} = 14$

| a | b | c | d | 𝔈 | D: 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −5 | 15−ε | 70−3ε | 3920 | 3751 | 3580 | 3457 | 3232 | 3055 | 2876 | 2695 | 2512 | 2327 |
| | | | | | 2140 | 1951 | 1760 | 1567 | 1372 | | | | | |
| | −2 | −10 | 20−ε | 140−2ε | 7840 | 7727 | 7612 | 7495 | 7376 | 7255 | 7132 | 7007 | 6880 | 6751 |
| | | | | | 6620 | 6487 | 6352 | 6215 | 6076 | | | | | |
| | −1 | −13 | 13−ε | 182−ε | 10192 | 10135 | 10076 | 10015 | 9952 | 9887 | 9820 | 9751 | 9680 | 9607 |
| | | | | | 9532 | 9455 | 9376 | 9295 | 9212 | | | | | |
| | 0 | −14 | 0−ε | 196 | 10976 | 10975 | 10972 | 10967 | 10960 | 10951 | 10940 | 10927 | 10912 | 10895 |
| | | | | | 10876 | 10855 | 10832 | 10807 | 10780 | | | | | |
| | 1 | −13 | −13−ε | 182+ε | 10192 | 10247 | 10300 | 10351 | 10400 | 10445 | 10492 | 10535 | 10576 | 10615 |
| | | | | | 10652 | 10687 | 10720 | 10761 | 10780 | | | | | |
| | 2 | −10 | −20−ε | 140+2ε | 7840 | 7951 | 8060 | 8167 | 8272 | 8375 | 8476 | 8575 | 8672 | 8167 |
| | | | | | 8860 | 8951 | 9040 | 9127 | 9212 | | | | | |
| | 3 | −5 | −15−ε | 70+3ε | 3920 | 4087 | 4252 | 4415 | 4576 | 4735 | 4892 | 5047 | 5200 | 5351 |
| | | | | | 5500 | 5647 | 5792 | 5935 | 6076 | | | | | |
| | 4 | 2 | −3−ε | 16+4ε | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 775 | 976 | 1175 | 1372 | | | | | |
| 2 | −2 | −5 | 5−ε | 35−2ε | 1960 | | 1844 | | 1720 | | 1588 | | 1448 | |
| | | | | | 1300 | | 1144 | | 980 | | | | | |
| | 0 | −7 | 0−ε | 49 | 2744 | | 2740 | | 2728 | | 2708 | | 2680 | |
| | | | | | 2644 | | 2600 | | 2548 | | | | | |
| | 2 | −5 | −5−ε | 35+2ε | 1960 | | 2018 | | 2168 | | 2260 | | 2344 | |
| | | | | | 2420 | | 2488 | | 2548 | | | | | |
| | 4 | 1 | −4−ε | 17+4ε | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 808 | | 980 | | | | | |

$A = 15$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −6 | 18−ε | 90−3ε | 5400<br>3500 | 5219<br>3299 | 5036<br>3096 | 4851<br>2991 | 4664<br>2784 | 4475<br>2575 | 4284 | 4091 | 3896 | 3699 |
| | −2 | −11 | 22−ε | 165−2ε | 9900<br>8600 | 9799<br>8459 | 9668<br>8316 | 9531<br>8171 | 9404<br>8024 | 9275<br>7875 | 9144 | 9011 | 8876 | 8739 |
| | −1 | −14 | 14−ε | 210−ε | 12600<br>11900 | 12539<br>11819 | 12476<br>11736 | 12411<br>11651 | 12344<br>11564 | 12275<br>11475 | 12204 | 12131 | 12056 | 11979 |
| | 0 | −15 | 0−ε | 225 | 13500<br>13400 | 13499<br>13379 | 13496<br>13356 | 13491<br>13331 | 13484<br>13304 | 13475<br>13275 | 13464 | 13451 | 13436 | 13419 |
| | 1 | −14 | −14−ε | 210+ε | 12600<br>13100 | 12659<br>13139 | 12716<br>13176 | 12771<br>13211 | 12824<br>13244 | 12875<br>13275 | 12924 | 12971 | 13016 | 13059 |
| | 2 | −11 | −22−ε | 165+2ε | 9900<br>11000 | 10019<br>11099 | 10136<br>11196 | 10251<br>11291 | 10364<br>11384 | 10475<br>11475 | 10584 | 10691 | 10796 | 10899 |
| | 3 | −6 | −18−ε | 90+3ε | 5400<br>7100 | 5579<br>7259 | 5756<br>7416 | 5931<br>7571 | 6104<br>7724 | 6275<br>7875 | 6444 | 6611 | 6776 | 6936 |
| | 4 | 1 | −4−ε | 17+4ε | 1400 | 1619 | 1836 | 2051 | 2264 | 2475 | | | 956 | 1179 |
| 2 | −3 | −3 | 4−ε | 21−3ε | | 1259 | | 1071 | | 875 | | | | |
| | −1 | −7 | 3−ε | 52−ε | | 3119<br>2699 | | 3051<br>2591 | | 2975<br>2475 | | 2891 | | 2700 |
| | 1 | −7 | −4−ε | 53+ε | | 3179<br>3359 | | 3231<br>3371 | | 3275<br>3375 | | 3311 | | 3339 |
| | 3 | −3 | −5−ε | 24+3ε | | 1439<br>2219 | | 1611<br>2351 | | 1775<br>2475 | | 1931 | | 2079 |
| 3 | 0 | −5 | 0−ε | 25 | 1500 | | 1356 | 1491 | | 1275 | 1464 | | | 1419 |
| | 3 | −2 | −4−ε | 16+3ε | | | 1176 | | | 1275 | 924 | | | 1059 |

$\mathfrak{A} = 16$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D: 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −7 | $21-\varepsilon$ | $117-3\varepsilon$ | 7168 | 6975 | 6780 | 6583 | 6384 | 6183 | 5980 | 5775 | 5568 | 5359 |
| | | | | | 5148 | 4935 | 4720 | 4503 | 4284 | 4063 | 3840 | | | |
| | −2 | −12 | $24-\varepsilon$ | $192-2\varepsilon$ | 12288 | 12159 | 12028 | 11895 | 11760 | 11623 | 11484 | 11343 | 11200 | 11055 |
| | | | | | 10908 | 10759 | 10608 | 10455 | 10300 | 10143 | 9984 | | | |
| | −1 | −15 | $15-\varepsilon$ | $240-\varepsilon$ | 15360 | 15295 | 15228 | 15159 | 15088 | 15015 | 14940 | 14863 | 14784 | 14703 |
| | | | | | 14620 | 14535 | 14498 | 14359 | 14268 | 14175 | 14080 | | | |
| | 0 | −16 | $0+\varepsilon$ | 256 | 16384 | 16383 | 16380 | 16375 | 16368 | 16359 | 16348 | 16335 | 16320 | 16303 |
| | | | | | 16284 | 16263 | 16240 | 16215 | 16188 | 16159 | 16128 | | | |
| | 1 | −15 | $-15-\varepsilon$ | $240+\varepsilon$ | 15360 | 15423 | 15484 | 15543 | 15600 | 15655 | 15718 | 15759 | 15808 | 15855 |
| | | | | | 15900 | 15943 | 15984 | 16023 | 16060 | 16095 | 16128 | | | |
| | 2 | −12 | $-24-\varepsilon$ | $192+2\varepsilon$ | 12288 | 12415 | 12540 | 12663 | 12784 | 12903 | 13020 | 13135 | 13248 | 13359 |
| | | | | | 13468 | 13575 | 13680 | 13783 | 13884 | 13983 | 14080 | | | |
| | 3 | −7 | $-21-\varepsilon$ | $112+3\varepsilon$ | 7168 | 7359 | 7548 | 7735 | 7920 | 8103 | 8284 | 8463 | 8640 | 8816 |
| | | | | | 8988 | 9159 | 9328 | 9495 | 9660 | 9823 | 9984 | | | |
| | 4 | 0 | $-4-\varepsilon$ | $16+4\varepsilon$ | | | | | 1008 | 1255 | 1500 | 1743 | 1984 | 2223 |
| | | | | | 2460 | 2695 | 2928 | 3159 | 3388 | 3615 | 3807 | | | |
| 2 | −2 | −6 | $6-\varepsilon$ | $48-2\varepsilon$ | 3072 | | 2940 | | 2800 | | 2652 | | 2496 | |
| | | | | | 2400 | | 2160 | | 1980 | | 1792 | | | |
| | 0 | −8 | $0-\varepsilon$ | 64 | 4096 | | 4092 | | 4080 | | 4060 | | 4032 | |
| | | | | | 3996 | | 3952 | | 3900 | | 3840 | | | |
| | 2 | −6 | $-6-\varepsilon$ | $48+2\varepsilon$ | 3072 | | 3196 | | 3312 | | 3420 | | 3520 | |
| | | | | | 3612 | | 3696 | | 3772 | | 3840 | | | |
| | 4 | 0 | $-4-\varepsilon$ | $16+4\varepsilon$ | | | | | | | | | 960 | |
| | | | | | 1180 | | 1392 | | 1596 | | 1792 | | | |

$n = 16$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | −2 | −4 | 2−ε | 20−2ε | | | 1276 | | | 1127 | | | 960 | |
| | −1 | −5 | 1−ε | 26−ε | | | 1660 | | | 1575 | | | 1472 | |
| | | | | | | 1351 | | | 1212 | | | | | |
| | 1 | −5 | −2−ε | 27+ε | | 1727 | | | 1776 | | | 1807 | | |
| | | | | | 1820 | | | 1815 | | | 1792 | | | |
| | 2 | −4 | −3−ε | 22+2ε | | 1407 | | | 1520 | | | 1615 | | |
| | | | | | 1692 | | | 1751 | | | 1792 | | | |
| | 4 | 0 | −4−ε | 16+4ε | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 880 | | | | | | | |
| 4 | 0 | −4 | 0−ε | 16 | 1024 | | | | 1008 | | | | 960 | |
| | | | | | | | 880 | | | | 768 | | | |
| | 2 | −3 | −4−ε | 17+2ε | | | | | | | | | | |
| | | | | | 988 | | | | 1020 | | | | | |
| | 4 | 0 | −4 | 16 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 768 | | | |

$\mathfrak{K} = 17$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | −1 | 4 | 17 | 1156 | | | | | | | | | |
| | −3 | −8 | 24−ε | 136−3ε | 9248 | 9043 | 8836 | 8627 | 8416 | 8203 | 7988 | 7771 | 7552 | 7331 |
| | | | | | 7108 | 6883 | 6656 | 6427 | 6196 | 5963 | 5728 | 5491 | | |
| | −2 | −13 | 26−ε | 221−2ε | 15028 | 14891 | 14752 | 14611 | 14468 | 14323 | 14176 | 14027 | 13876 | 13723 |
| | | | | | 13568 | 13411 | 13252 | 13091 | 12928 | 12763 | 12596 | 12427 | | |
| | −1 | −16 | 16−ε | 272−ε | 18496 | 18427 | 18356 | 18283 | 18208 | 18131 | 18052 | 17971 | 17888 | 17803 |
| | | | | | 17716 | 17627 | 17536 | 17443 | 17348 | 17251 | 17152 | 17051 | | |
| | 0 | −17 | 0−ε | 289 | 19652 | 19651 | 19648 | 19643 | 19636 | 19627 | 19616 | 19603 | 19588 | 19571 |
| | | | | | 19552 | 19531 | 19508 | 19483 | 19456 | 19427 | 19396 | 19363 | | |
| | 1 | −16 | −16−ε | 272+ε | 18496 | 18563 | 18628 | 18691 | 18752 | 18811 | 18868 | 18923 | 18976 | 19027 |
| | | | | | 19076 | 19123 | 19168 | 19211 | 19252 | 19291 | 19328 | 19363 | | |
| | 2 | −13 | −26−ε | 221+2ε | 15028 | 15163 | 15296 | 15427 | 15556 | 15683 | 15808 | 15931 | 16052 | 16171 |
| | | | | | 16288 | 16403 | 16516 | 16627 | 16736 | 16843 | 16984 | 17051 | | |
| | 3 | −8 | −24−ε | 136+3ε | 9248 | 9451 | 9652 | 9851 | 10048 | 10243 | 10436 | 10627 | 10816 | 11003 |
| | | | | | 11188 | 11371 | 11552 | 11731 | 11908 | 12083 | 12256 | 12427 | | |
| | 4 | −1 | −4−ε | 17+4ε | 1156 | 1427 | 1696 | 1963 | 2228 | 2491 | 2752 | 3011 | 3268 | 3523 |
| | | | | | 3776 | 4027 | 4276 | 4523 | 4768 | 5011 | 5252 | 5491 | | |

$\mathfrak{A} = 17$.

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | D 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | —3 | —4 | 6—ε | 34—3ε | 2312<br>1192 | | 2104 | | 1888 | | 1664 | | 1432 | |
| | —1 | —8 | 4—ε | 68—ε | 4624<br>4184 | | 4552<br>4072 | | 4472<br>3592 | | 4384<br>3824 | | 4288 | |
| | 1 | —8 | —4—ε | 68+ε | 4624<br>4864 | | 4688<br>4888 | | 4744<br>4904 | | 4792<br>4912 | | 4832 | |
| | 3 | —4 | —6—ε | 34+3ε | 2312<br>3232 | | 2512<br>3392 | | 2704<br>3544 | | 2888<br>3688 | | 3064 | |
| 4 | —1 | —4 | 1 | 17 | 1156 | | | | | | | | | |
| | 1 | —4 | —1—ε | 17+ε | 1156 | | <br>1216 | | 1208 | | <br>1172 | | 1228 | |
| | 3 | —2 | —5 | 19 | | | | | <br>1096 | | | | | |

**$\mathfrak{A} = 18$*)**

| a | b | c | d | ℭ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —4 | —2 | 8—ε | 36—4ε | ε | 1719 (ε=3); 1424 (ε=4) |
| 2 | 4 | —1 | —5—ε | 21+4ε | 6+2ε | 1476 (ε=0); 1736 (ε=1); 1988 (ε=2) |
| 3 | 3 | —3 | —3—ε | 18+3ε | 3ε | 1296 (ε=0); 1503 (ε=1); 1692 (ε=2); 1863 (ε=3) |

**$\mathfrak{A} = 19$**

| a' | b | c | d | ℭ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —4 | —3 | 12—ε | 57—4ε | ε | 1836 (8); 1519 (9) |
| 2 | —3 | —5 | 7—ε | 46—3ε | 1+2ε | 1675 (7); 1383 (8); 1083 (9) |
| | 5 | 3 | 7—ε | —26+5ε | 1+2ε | 1083 (9) |
| 3 | —2 | —5 | 3—ε | 31—2ε | 1+3ε | 1800 (3); 1579 (4); 1340 (5); 1083 (6) |
| | 4 | —1 | — 2—ε | 9+4ε | 2+3ε | 1475 (3); 1704 (4); 1915 (5) |
| | 5 | 2 | 3—ε | —11+5ε | 1+3ε | 1083 (6) |
| 5 | 2 | —3 | — 2—ε | 13+2ε | 4+5ε | 1083 (3) |
| | 3 | —2 | — 2—ε | 10+3ε | 4+5ε | 1083 (3) |

**$\mathfrak{A} = 20$**

| a | b | c | d | ℭ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | —4 | —2 | 4 | 20 | 0 | 1600 |
| | 4 | —2 | —4—ε | 20+4ε | 2ε | 1600 (0); 1916 (1) |
| 4 | —2 | —4 | 2 | 20 | 0 | 1600 |
| | 0 | —5 | 0—ε | 25 | 4ε | 2000 (0); 1984 (1); 1936 (2); 1856 (3); 1744 (4); 1600 (5) |
| | 2 | —4 | —2—ε | 20+2ε | 4ε | 1600 (0); 1744 (1); 1856 (2); 1936 (3); 1984 (4); 2000 (5) |
| | 4 | —1 | —1—ε | 5+4ε | 4ε | 1424 (4); 1600 (5) |

*) Der Kürze wegen sind von hier an alle diejenigen Werthe weggelassen, für welche *D* die Grenze 2000 übersteigt.

$\mathfrak{A} = 21$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | −5 | $20-\varepsilon$ | $105-4\varepsilon$ | $\varepsilon$ | 1700 (20); 1323 (21) |
| | 5 | 4 | −1 | 21 | 21 | 1323 |
| 2 | 5 | 2 | −4 | 24 | 18 | 1692 |
| 3 | −3 | −4 | 2 | 22 | 6 | 1812 |
| 4 | −1 | −5 | $1-\varepsilon$ | $26-\varepsilon$ | $1+4\varepsilon$ | 1935 (2); 1763 (3); 1559 (4); 1323 (5) |
| | 3 | −3 | $-3-\varepsilon$ | $18+3\varepsilon$ | $3+4\varepsilon$ | 1715 (1); 1895 (2) |
| | 5 | 1 | −4 | 21 | 21 | 1323 |
| 5 | 1 | −4 | −5 | 21 | 21 | 1323 |
| | 4 | −1 | −5 | 21 | 21 | 1323 |

$\mathfrak{A} = 22$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | −3 | 24 | 18 | 1788 |
| 3 | 5 | 1 | −5 | 26 | 20 | 1888 |

$\mathfrak{A} = 25$

| a | b | c | d | $\mathfrak{C}$ | B | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | −5 | −5 | 25 | 25 | 1875 |
| | 5 | 0 | −5 | 25 | 25 | 1875 |

(Die übrigen Tabellen im nächsten Hefte.)

# Tabelle der reducirten binären kubischen Formen und Klassen für alle negativen Determinanten $-D$ von $D=3$ bis $D=2000$.

| $D$. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 3 | (0, 1, 1, 0); (1, 0, −1, −1); (1, 1, 0, −1)<br>(2, 1, 2); (2, 1, 2); (2, 1, 2) | (0, 1, 1, 0); (1, 0, −1, ±1) |
| 4 | (0, 1, 0, −1); (1, 0, −1, 0)<br>(2, 0, 2); (2, 0, 2) | (0, −1, 0, 1) |
| 7 | (0, 1, 1, −1)<br>(2, 1, 4) | (0, −1, −1, 1) |
| 8 | (0, 1, 0, −2)<br>(2, 0, 4) | (0, −1, 0, 2) |
| 11 | (0, 1, 1, −2)<br>(2, 1, 6) | (0, −1, −1, 2) |
| 12 | (0, 1, 0, −3)<br>(2, 0, 6) | (0, −1, 0, 3) |
| 15 | (0, 1, 1, −3)<br>(2, 1, 8) | (0, −1, −1, 3) |
| 16 | (0, 1, 0, −4); (1, 1, −1, −1)<br>(2, 0, 8) (4, 0, 4) | (0, −1, 0, 4); (1, −1, −1, 1) |
| 19 | (0, 1, 1, −4)<br>(2, 1, 10) | (0, −1, −1, 4) |
| 20 | (0, 1, 0, −5)<br>(2, 0, 10) | (0, −1, 0, 5) |
| 23 | (0, 1, 1, −5); (1, 1, −1, −2)<br>(2, 1, 12); (4, 1, 6) | (0, −1, −1, 5); (1, ∓1, −1, ±2) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 24 | (0, 1, 0, −6)<br>(2, 0, 12) | (0, −1, 0, 6) |
| 27 | (0, 1, 1, −6); (1, −1, −2, −1); (1, 2, 1, −1); (2, 1, −1, −2)<br>(2, 1, 14); (6, 3, 6); (6, 3, 6); (6, 3, 6) | (0, −1, −1, 6); (1, ±1, −2, ±1); (2, −1, −1, 2 |
| 28 | (0, 1, 0, −7); (1, 0, −2, −2); (1, 1, −1, −3)<br>(2, 0, 14); (4, 2, 8) (4, 2, 8) | (0, −1, 0, 7); (1, 0, −2, ±2) |
| 31 | (0, 1, 1, −7); (1, 0, −2, −1)<br>(2, 1, 16); (4, 1, 8) | (0, −1, −1, 7); (1, 0, −2, ±1) |
| 32 | (0, 1, 0, −8); (1, 0, −2, 0)<br>(2, 0, 16) (4, 0, 8) | (0, −1, 0, 8); (0, −2, 0, 1) |
| 35 | (0, 1, 1, −8)<br>(2, 1, 18) | (0, −1, −1, 8) |
| 36 | (0, 1, 0, −9)<br>(2, 0, 18) | (0, −1, 0, 9) |
| 39 | (0, 1, 1, −9)<br>(2, 1, 20) | (0, −1, −1, 9) |
| 40 | (0, 1, 0, −10)<br>(2, 0, 20) | (0, −1, 0, 10) |
| 43 | (0, 1, 1, −10)<br>(2, 1, 22) | (0, −1, −1, 10) |
| 44 | (0, 1, 0, −11); (1, −1, −2, 0)<br>(2, 0, 22); (6, 2, 8) | (0, −1, 0, 11); (0, −2, ±1, 1) |
| 47 | (0, 1, 1, −11)<br>(2, 1, 24) | (0, −1, −1, 11) |
| 48 | (0, 1, 0, −12); (0, 2, 2, 0); (2, 0, −2, −2); (2, 2, 0, −2)<br>(2, 0, 24); (8, 4, 8); (8, 4, 8); (8, 4, 8) | (0, −1, 0, 12); (0, 2, 2, 0); (2, 0, −2, ±2) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 51 | (0, 1, 1, −12)<br>(2, 1, 26) | (0, −1, −1, 12) |
| 52 | (0, 1, 0, −13)<br>(2, 0, 26) | (0, −1, 0, 13) |
| 55 | (0, 1, 1, −13)<br>(2, 1, 28) | (0, −1, −1, 13) |
| 56 | (0, 1, 0, −14)<br>(2, 0, 28) | (0, −1, 0, 14) |
| 59 | (0, 1, 1, −14); (1, −1, −2, 1)<br>(2, 1, 30); (6, 1, 10) | (0, −1, −1, 14); (1, ∓1, −2, ±1) |
| 60 | (0, 1, 0, −15); (1, −2, 0, −2); (2, 0, −2, −1)<br>(2, 0, 30); (8, 2, 8); (8, 2, 8) | (0, −1, 0, 15); (1, ∓2, 0, ±2) |
| 63 | (0, 1, 1, −15)<br>(2, 1, 32) | (0, −1, −1, 15) |
| 64 | (0, 1, 0, −16); (0, −2, 0, 2); (2, 0, −2, 0)<br>(2, 0, 32); (8, 0, 8); (8, 0, 8) | (0, −1, 0, 16); (0, −2, 0, 2) |
| 67 | (0, 1, 1, −16)<br>(2, 1, 34) | (0, −1, −1, 16) |
| 68 | (0, 1, 0, −17)<br>(2, 0, 34) | (0, −1, 0, 17) |
| 71 | (0, 1, 1, −17)<br>(2, 1, 36) | (0, −1, −1, 17) |
| 72 | (0, 1, 0, −18); (1, −1, −2, 2)<br>(2, 0, 36); (6, 0, 12) | (0, −1, 0, 18); (1, ∓1, −2, ±2) |
| 75 | (0, 1, 1, −18)<br>(2, 1, 38) | (0, −1, −1, 18) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 76 | (0, 1, 0, −19); (0, 2, 1, −2)<br>(2, 0, 38); (8, 2, 10) | (0, −1, 0, 19); (0, ∓2, 1, ±2) |
| 79 | (0, 1, 1, −19)<br>(2, 1, 40) | (0, −1, −1, 19) |
| 80 | (0, 1, 0, −20); (0, 2, 2, −1)<br>(2, 0, 40); (8, 4, 12) | (0, −1, 0, 20); (0, −2, −2, 1) |
| 83 | (0, 1, 1, −20); (1, 1, −2, −3)<br>(2, 1, 42); (6, 1, 14) | (0, −1, −1, 20); (1, ∓1, −2, ±3) |
| 84 | (0, 1, 0, −21)<br>(2, 0, 42) | (0, −1, 0, 21) |
| 87 | (0, 1, 1, −21); (1, 2, 0, −3)<br>(2, 1, 44); (8, 3, 12) | (0, −1, −1, 21); (1, ∓2, 0, ±3) |
| 88 | (0, 1, 0, −22)<br>(2, 0, 44) | (0, −1, 0, 22) |
| 91 | (0, 1, 1, −22)<br>(2, 1, 46) | (0, −1, −1, 22) |
| 92 | (0, 1, 0, −23); (1, 1, −2, −4)<br>(2, 0, 46); (6, 2, 16) | (0, −1, 0, 23); (1, ∓1, −2, ±4) |
| 95 | (0, 1, 1, −23)<br>(2, 1, 48) | (0, −1, −1, 23) |
| 96 | (0, 1, 0, −24); (0, −2, 0, 3)<br>(2, 0, 48); (8, 0, 12) | (0, −1, 0, 24); (0, −2, 0, 3) |
| 99 | (0, 1, 1, −24); (1, 0, −3, −3); (1, 1, −2, −5)<br>(2, 1, 50); (6, 3, 18); (6, 3, 18) | (0, −1, −1, 24); (1, 0, −3, ±3) |
| 100 | (0, 1, 0, −25); (1, −2, −1, 2); (2, −1, −2, 1)<br>(2, 0, 50); (10, 0, 10); (10, 0, 10) | (0, −1, 0, 25); (1, ∓2, −1, ±2) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 103 | (0, 1, 1, —25)<br>(2, 1, 52) | (0, —1, —1, 25) |
| 104 | (0, 1, 0, —26); (1, 0, —3, —2)<br>(2, 0, 52); (6, 2, 18) | (0, —1, 0, 26); (1, 0, —3, ±2) |
| 107 | (0, 1, 1, —26); (1, 0, —3, —1)<br>(2, 1, 54) (6, 1, 18) | (0, —1, —1, 26); (1, 0, —3, ±1) |
| 108 | (0, 1, 0, —27); (0, 2, 1, —3); (1, 0, —3, 0)<br>(2, 0, 54); (8, 2, 14); (6, 0, 18) | (0, —1, 0, 27); (0, —3, 0, 1); (0, ∓2, 1, ±3) |
| 111 | (0, 1, 1, —27)<br>(2, 1, 56) | (0, —1, —1, 27) |
| 112 | (0, 1, 0, —28); (0, 2, 2, —2); (1, 2, 0, —4); (1, —1, —3, —1)<br>(2, 0, 56); (8, 4, 16); (8, 4, 16); (8, 4, 16) | (0, —1, 0, 28); (0, —2, —2, 2); (1, ±1, —3, ±1) |
| 115 | (0, 1, 1, —28)<br>(2, 1, 58) | (0, —1, —1, 28) |
| 116 | (0, 1, 0, —29); (2, 1, —2, —2)<br>(2, 0, 58); (10, 2, 12) | (0, —1, 0, 29); (2, ∓1, —2, ±2) |
| 119 | (0, 1, 1, —29)<br>(2, 1, 60) | (0, —1, —1, 29) |
| 120 | (0, 1, 0, —30)<br>(2, 0, 60) | (0, —1, 0, 30) |
| 123 | (0, 1, 1, —30)<br>(2, 1, 62) | (0, —1, 1, —30) |
| 124 | (0, 1, 0, —31); (2, 1, —2, —3)<br>(2, 0, 62); (10, 4, 14) | (0, —1, 0, 31); (2, ∓1, —2, ±3) |
| 127 | (0, 1, 1, —31)<br>(2, 1, 61) | (0, —1, —1, 31) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 128 | (0, 1, 0, —32); (0, —2, 0, 4)<br>(2, 0, 64); (8, 0, 16) | (0, —1, 0, 32); (0, —2, 0, 4) |
| 131 | (0, 1, 1, —32)<br>(2, 1, 66) | (0, —1, —1, 32) |
| 132 | (0, 1, 0, —33)<br>(2, 0, 66) | (0, —1, 0, 33) |
| 135 | (0, 1, 0, —33); (1, —1, —3, 0); (1, —2, —2, 1)<br>(2, 1, 68); (8, 3, 18); (12, 3, 12) | (0, —1, 0, 33); (0, ∓3, 1, ±1); (1, —2, —2, 1) |
| 136 | (0, 1, 0, —34)<br>(2, 0, 68) | (0, —1, 0, 34) |
| 139 | (0, 1, 1, —34); (1, 2, —1, —3)<br>(2, 1, 70); (10, 1, 14) | (0, —1, —1, 34); (1, ∓2, —1, ±3) |
| 140 | (0, 1, 0, —35); (0, 2, 1, —4)<br>(2, 0, 70); (8, 2, 18) | (0, —1, 0, 35); (0, ∓2, 1, ±4) |
| 143 | (0, 1, 1, —35)<br>(2, 1, 72) | (0, —1, —1, 35) |
| 144 | (0, 1, 0, —36); (0, 2, 2, —3)<br>(2, 0, 72); (8, 4, 20) | (0, —1, 0, 36); (0, —2, —2, 3) |
| 147 | (0, 1, 1, —36); (1, —2, —3, —1); (1, 3, 2, —1); (2, —1, —3, —2)<br>(2, 1, 74); (14, 7, 14); (14, 7, 14); (14, 7, 14);<br>(2, 3, 1, —2); (3, 1, —2, —3); (3, 2, —1, —3)<br>(14, 7, 14); (14, 7, 14); (14, 7, 14) | (0, —1, —1, 36); (1, ±2, —3, ±1); (2, ±1, —3, ±2)<br>(3, ∓1, —2, ±3) |
| 148 | (0, 1, 0, —37)<br>(2, 0, 74) | (0, —1, 0, 37) |
| 151 | (0, 1, 1, —37)<br>(2, 1, 76) | (0, —1, —1, 37) |

| *D.* | Reducirte Eormen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 152 | (0, 1, 0, −38); (2, 0, 76); (2, 2, −1, −3) (12, 4, 14) | (0, −1, 0, 38); (2, ∓2, −1, ±3) |
| 155 | (0, 1, 1, −38) (2, 1, 78) | (0, −1, −1, 38) |
| 156 | (0, 1, 0, −39); (2. 0, 78); (1, −1, −3, 1) (8, 2, 20) | (0, −1, 0, 39); (1, ∓1, −3, ±1) |
| 159 | (0, 1, 1, −39) (2, 1, 80) | (0, −1, −1, 39) |
| 160 | (0, 1, 0, −40); (2, 0, 80); (0. −2, 0, 5) (8, 0, 20) | (0, −1, 0, 40); (0, −2, 0, 5) |
| 163 | (0, 1, 1, −40) (2, 1, 82) | (0, −1, −1, 40) |
| 164 | (0, 1, 0, −41) (2, 0, 82) | (0, −1, 0, 41) |
| 167 | (0, 1, 1, −41) (2, 1, 84) | (0, −1, −1, 41) |
| 168 | (0, 1, 0, −42) (2, 0, 84) | (0, −1, 0, 42) |
| 171 | (0, 1, 1, −42) (2, 1, 86) | (0, −1, −1, 42) |
| 172 | (0, 1, 0, −43); (2, 0, 86); (0, 2, 1, −5) (8, 2, 22) | (0, −1, 0, 43); (0, ∓2, 1, ±5) |
| 175 | (0, 1, 1, −43); (2. 1, 88); (1, −1, −3, 2) (8, 1, 22) | (0, −1, −1, 43); (1, ∓1, −3, ±2) |
| 176 | (0, 1, 0, −44); (2, 0, 88); (0, 2, 2, −4); (8, 4, 24); (1, 2, −1, −4) (10, 2, 18) | (0, −1, 0, 44); (1, ∓2, −1, ±4); (0, −2, −2, 4) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 179 | (0, 1, 1, −44) (2, 1, 90) | (0, −1, −1, 44) |
| 180 | (0, 1, 0, −45); (2, 0, 90); (2, 0, −3, −3); (12, 6, 18); (2, 2, −1, −4) (12, 6, 18) | (0, −1, 0, 45); (2, 0, −3, ±3) |
| 183 | (0, 1, 1, −45) (2, 1, 92) | (0, −1, −1, 45) |
| 184 | (0, 1, 0, −46) (2, 0, 92) | (0, −1, 0, 46) |
| 187 | (0, 1, 1, −46) (2, 1, 94) | (0, −1, −1, 46) |
| 188 | (0, 1, 0, −47); (2, 0, 94); (1, −2, −2, 2) (12, 2, 16) | (0, −1, 0, 47); (1, ∓2, −2, ±2) |
| 191 | (0, 1, 1, −47) (2, 1, 96) | (0, −1, −1, 47) |
| 192 | (0, 1, 0, −48); (2, 0, 96); (0, −2, 0, +6); (8, 0, 24); (1, −1, −3, 3) (8, 0, 24) | (0, −1, 0, 48); (0, −2, 0, 6); (1, ∓1, −3, ±3) |
| 195 | (0, 1, 1, −48) (2, 1, 98) | (0, −1, −1, 48) |
| 196 | (0, 1, 0, −49) (2, 0, 98) | (0, −1, 0, 49) |
| 199 | (0, 1, 1, −49); (2, 1, 100); (2, −1, −3, −1) (14, 5, 16) | (0, −1, −1, 49); (1, ∓3, 1, ±2) |
| 200 | (0, 1, 0, −50); (2, 0, 100); (2, 0, −3, −2) (12, 4, 18) | (0, −1, 0, 50); (2, 0, −3, ±2) |
| 203 | (0, 1, 1, −50) (2, 1, 102) | (0, −1, −1, 50) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 204 | (0, 1, 0, —51); (0, 2, 1, —6)<br>(2, 0, 102); (8, 2, 26) | (0, —1, 0, 51); (0, ∓2, 1, ±6) |
| 207 | (0, 1, 1, —51); (1, 1, —3, —4)<br>(2, 1, 104); (8, 1, 26) | (0, —1, —1, 51); (1, ∓1, —3, ±4) |
| 208 | (0, 1, 0, —52); (0, 2, 2, —5)<br>(2, 0, 104); (8, 4, 28) | (0, —1, 0, 52); (0, —2, —2, 5) |
| 211 | (0, 1, 1, —52); (1, 2, —1, —5)<br>(2, 1, 106); (10, 3, 22) | (0, —1, —1, 52); (1, ∓2, —1, ±5) |
| 212 | (0, 1, 0, —53); (2, 0, —3, —1)<br>(2, 0, 106); (12, 2, 18) | (0, —1, 0, 53); (1, ∓3, 0, ±2) |
| 215 | (0, 1, 1, —53)<br>(2, 1, 108) | (0, —1, —1, 53) |
| 216 | (0, 1, 0, —54); (1, —2, —3, 0); (2, 0, —3, 0)<br>(2, 0, 108); (14, 6, 18); (12, 0, 18) | (0, —1, 0, 54); (0, ∓3, 0, ±2); (0, ∓3, 2, ±1) |
| 219 | (0, 1, 1, —54)<br>(2, 1, 110) | (0, —1, —1, 54) |
| 220 | (0, 1, 0, —55); (1, 1, —3, —5)<br>(2, 1, 110); (8, 2, 28) | (0, —1, 0, 55); (1, ∓1, —3, ±5) |
| 223 | (0, 1, 1, —55)<br>(2, 1, 112) | (0, —1, —1, 55) |
| 224 | (0, 1, 0, —56); (0, —2, 0, 7)<br>(2, 0, 112); (8, 0, 28) | (0, —1, 0, 56); (0, —2, 0, 7) |
| 227 | (0, 1, 1, —56)<br>(2, 1, 114) | (0, —1, —1, 56) |
| 228 | (0, 1, 0, —57)<br>(2, 0, 114) | (0, —1, 0, 57) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 231 | (0, 1, 1, −57); (1, 1, −3, −6)<br>(2, 1, 116); (8, 3, 30) | (0, −1, −1, 57); (1, ∓1, −3, ±6) |
| 232 | (0, 1, 0, −58)<br>(2, 0, 116) | (0, −1, 0, 58) |
| 235 | (0, 1, 1, −58)<br>(2, 1, 118) | (0, −1, −1, 58) |
| 236 | (0, 1, 0, −59); (0, 2, 1, −7)<br>(2, 0, 118); (8, 2, 30) | (0, −1, 0, 59); (0, ∓2, 1, ±7) |
| 239 | (0, 1, 1, −59); (1, −2, −2, 3)<br>(2, 1, 120); (12, 1, 20) | (0, −1, −1, 59); (1, ∓2, −2, ±3) |
| 240 | (0, 1, 0, −60); (0, 2, 2, −6); (1, 0, −4, −4); (1, 1, −3, −7)<br>(2, 0, 120); (8, 4, 32); (8, 4, 32); (8, 4, 32) | (0, −1, 0, 60); (0, −2, −2, 6); (1, 0, −4, ±4) |
| 243 | (0, 1, 1, −60); (0, 3, 3, 0); (2, −1, −3, 0); (3, 0, −3, −3); (3, 3, 0, −3)<br>(2, 1, 120); (18, 9, 18); (14, 3, 18); (18, 9, 18); (18, 9, 18) | (0, −1, −1, 60); (0, 3, 3, 0); (0, ∓3, 1, ±2);<br>(3, 0, −3, ±3) |
| 244 | (0, 1, 0, −61); (1, 2, −1, −6)<br>(2, 0, 122); (10, 4, 26) | (0, −1, 0, 61); (1, ∓2, −1, ±6) |
| 247 | (0, 1, 1, −61); (1, 0, −4, −3)<br>(2, 1, 124); (8, 3, 32) | (0, −1, −1, 61); (1, 0, −4, ±3) |
| 248 | (0, 1, 0, −62)<br>(2, 0, 124) | (0, −1, 0, 62) |
| 251 | (0, 1, 1, −62)<br>(2, 1, 126) | (0, −1, −1, 62) |
| 252 | (0, 1, 0, −63); (1, 0, −4, −2)<br>(2, 0, 126); (8, 2, 32) | (0, −1, 0, 63); (1, 0, −4, ±2) |
| 255 | (0, 1, 1, −63); (1, 0, −4, −1)<br>(2, 1, 128); (8, 1, 32) | (0, −1, −1, 63); (1, 0, −4, ±1) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
| --- | --- | --- |
| 256 | (0, 1, 0, —64); (0, —2, 0, 8); (1, 0, —4, 0); (2, —2, —2, 2)<br>(2, 0, 128); (8, 0, 32); (8, 0, 32); (16, 0, 16) | (0, —1, 0, 64); (0, —2, 0, 8); (0, —4, 0, 1); (2, —2, —2, 2) |
| 259 | (0, 1, 1, —64)<br>(2, 1, 130) | (0, —1, —1, 64) |
| 260 | (0, 1, 0, —65)<br>(2, 0, 130) | (0, —1, 0, 65) |
| 263 | (0, 1, 1, —65)<br>(2, 1, 132) | (0, —1, —1, 65) |
| 264 | (0, 1, 0, —66)<br>(2, 0, 132) | (0, —1, 0, 66) |
| 267 | (0, 1, 1, —66)<br>(2, 1, 134) | (0, —1, —1, 66) |
| 268 | (0, 1, 0, —67); (0, 2, 1, —8)<br>(2, 0, 134); (8, 2, 34) | (0, —1, 0, 67); (0, ∓2, 1, ±8) |
| 271 | (0, 1, 1, —67)<br>(2, 1, 136) | (0, —1, —1, 67) |
| 272 | (0, 1, 0, —68); (0, 2, 2, —7)<br>(2, 0, 136); (8, 4, 36) | (0, —1, 0, 68); (0, —2, —2, 7) |
| 275 | (0, 1, 1, —68); (1, —1, —4, —1); (1, 2, —1, —7)<br>(2, 1, 138); (10, 5, 30); (10, 5, 30) | (0, —1, —1, 68); (1, ±1, —4, ±1) |
| 276 | (0, 1, 0, —69)<br>(2, 0, 138) | (0, —1, 0, 69) |
| 279 | (0, 1, 1, —69); (2, —1, —3, 1)<br>(2, 1, 140); (14, 1, 20) | (0, —1, —1, 69); (1, ∓3, —1, ±2) |
| 280 | (0, 1, 0, —70)<br>(2, 0, 140) | (0, —1, 0, 70) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 283 | (0, 1, 1, −70); (1, −2, −3, 1)<br>(2, 1, 142); (14, 5, 22) | (0, −1, −1, 70); (1, ∓2, −3, ±1) |
| 284 | (0, 1, 0, −71); (1, 3, 1, −3)<br>(2, 0, 142); (16, 6, 20) | (0, −1, 0, 71); (1, ∓3, 1, ±3) |
| 287 | (0, 1, 1, −71)<br>(2, 1, 144) | (0, −1, −1, 71) |
| 288 | (0, 1, 0, −72); (0, −2, 0, 9); (1, −2, −2, 4); (2, 3, 0, −3); (3, 0, −3, −2)<br>(2, 0, 144); (8, 0, 36); (12, 0, 24); (18, 6, 18); (18, 6, 18) | (0, −1, 0, 72); (0, −2, 0, 9); (1, ∓2, −2, ±4);<br>(2, ∓3, 0, ±3) |
| 291 | (0, 1, 1, −72)<br>(2, 1, 146) | (0, −1, −1, 72) |
| 292 | (0, 1, 0, −73)<br>(2, 0, 146) | (0, −1, 0, 73) |
| 295 | (0, 1, 1, −73)<br>(2, 1, 148) | (0, −1, −1, 73) |
| 296 | (0, 1, 0, −74)<br>(2, 0, 148) | (0, −1, 0, 74) |
| 299 | (0, 1, 1, −74)<br>(2, 1, 150) | (0, −1, −1, 74) |
| 300 | (0, 1, 0, −75); (0, 2, 1, −9)<br>(2, 0, 150); (8, 2, 38) | (0, −1, 0, 75); (0, ∓2, 1, ±9) |
| 303 | (0, 1, 1, −75)<br>(2, 1, 152) | (0, −1, −1, 75) |
| 304 | (0, 1, 0, −76); (0, 2, 2, −8); (1, −1, −4, 0)<br>(2, 0, 152); (8, 4, 40); (10, 4, 32) | (0, −1, 0, 76); (0, −2, −2, 8); (0, ∓4, 1, ±1) |
| 307 | (0, 1, 1, −76); (2, 1, −3, −2)<br>(2, 1, 154); (14, 1, 22) | (0, −1, −1, 76); (2, ∓1, −3, ±2) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 308 | (0, 1, 0, —77)<br>(2, 0, 154) | (0, —1, 0, 77) |
| 311 | (0, 1, 1, —77)<br>(2, 1, 156) | (0, —1, —1, 77) |
| 312 | (0, 1, 0, —78)<br>(2, 0, 156) | (0, —1, 0, 78) |
| 315 | (0, 1, 1, —78); (1, 3, 0, —3); (3, 0, —3, —1)<br>(2, 1, 158); (18, 3, 18); (18, 3, 18) | (0, —1, —1, 78); (1, ∓3, 0, ±3) |
| 316 | (0, 1, 0, —79); (2, 2, —2, —3)<br>(2, 0, 158); (16, 2, 20) | (0, —1, 0, 79); (2, ∓2, —2, ±3) |
| 319 | (0, 1, 1, —79)<br>(2, 1, 160) | (0, —1, —1, 79) |
| 320 | (0, 1, 0, —80); (0, —2, 0, 10)<br>(2, 0, 160); (8, 0, 40) | (0, —1, 0, 80); (0, —2, 0, 10) |
| 323 | (0, 1, 1, —80)<br>(2, 1, 162) | (0, —1, —1, 80) |
| 324 | (0, 1, 0, —81); (0, —3, 0, 3); (0, 3, 2, —2); (3, 0, —3, 0)<br>(2, 0, 162); (18, 0, 18); (18, 6, 20); (18, 0, 18) | (0, —1, 0, 81); (0, —3, 0, 3); (0, ∓3, 2, ±2) |
| 327 | (0, 1, 1, —81); (2, 1, —3, —3)<br>(2, 1, 164); (14, 3, 24) | (0, —1, —1, 81); (2, ∓1, —3, ±3) |
| 328 | (0, 1, 0, —82)<br>(2, 0, 164) | (0, —1, 0, 82) |
| 331 | (0, 1, 1, —82); (1, —1, —4, —1)<br>(2, 1, 166); (10, 3, 24) | (0, —1, —1, 82); (1, ±1, —4, ±1) |
| 332 | (0, 1, 0, —83); (0, 2, 1, —10)<br>(2, 0, 166) (8, 2, 42) | (0, —1, 0, 83); (0, ∓2, 1, ±10) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 335 | (0, 1, 1, −83); (1, 2, −2, −5)<br>(2, 1, 168); (12, 1, 28) | (0, −1, −1, 83); (1, ∓2, −2, ±5) |
| 336 | (0, 1, 0, −84); (0, 2, 2, −9)<br>(2, 0, 168); (8, 4, 44) | (0, −1, 0, 84); (0, −2, −2, 9) |
| 339 | (0, 1, 1, −84); (2, 1, −3, −4)<br>(2, 1, 170); (14, 5, 26) | (0, −1, −1, 84); (2, ∓1, −3, ±4) |
| 340 | (0, 1, 0, −85)<br>(2, 0, 170) | (0, −1, 0, 85) |
| 343 | (0, 1, 1, −85); (2, 1, −3, −5)<br>(2, 1, 172); (14, 7, 28) | (0, −1, −1, 85); (2, −1, 3, 5) |
| 344 | (0, 1, 0, −86)<br>(2, 0, 172) | (0, −1, 0, 86) |
| 347 | (0, 1, 1, −86)<br>(2, 1, 174) | (0, −1, −1, 86) |
| 348 | (0, 1, 0, −87); (1, −2, −3, 2)<br>(2, 0, 174); (14, 4, 26) | (0, −1, 0, 87); (1, ∓2, −3, ±2) |
| 351 | (0, 1, 1, −87); (0, 3, 1, −3); (0, 3, 3, −1)<br>(2, 1, 176); (18, 3, 20); (18, 9, 24) | (0, −1, −1, 87); (0, ∓3, 1, ±3); (0, −3, −3, 1) |
| 352 | (0, 1, 0, −88); (0, −2, 0, 11)<br>(2, 0, 176) (8, 0, 44) | (0, −1, 0, 88); (0, −2, 0, 11) |
| 355 | (0, 1, 1, −88)<br>(2, 1, 178) | (0, −1, −1, 88) |
| 356 | (0, 1, 0, −89); (1, −1, −4, 2)<br>(2, 0, 178); (10, 2, 36) | (0, −1, 0, 89); (1, ∓1, −4, ±2) |
| 359 | (0, 1, 1, −89)<br>(2, 1, 180) | (0, −1, −1, 89) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 360 | (0, 1, 0, −90)<br>(2, 0, 180) | (0, −1, 0, 90) |
| 363 | (0, 1, 1, −90)<br>(2, 1, 182) | (0, −1, −1, 90) |
| 364 | (0, 1, 0, −91); (0, 2, 1, −11)<br>(2, 0, 182); (8, 2, 46) | (0, −1, 0, 91); (0, ∓2, 1, ±11) |
| 367 | (0, 1, 1, −91); (1, 3, 1, −4)<br>(2, 1, 184); (16, 7, 26) | (0, −1, −1, 91); (1, ∓3, 1, ±4) |
| 368 | (0, 1, 0, −92); (0, −2, 2, 10); (2, 2, −2, −4); (2, 3, 0, −4)<br>(2, 0, 184); (8, 4, 48); (16, 4, 24); (18, 8, 24) | (0, −1, 0, 92); (0, −2, −2, 10); (2, ∓2, −2, ±4)<br>(2, ∓3, 0, ±4) |
| 371 | (0, 1, 1, −92)<br>(2, 1, 186) | (0, −1, −1, 92) |
| 372 | (0, 1, 0, −93)<br>(2, 0, 186) | (0, −1, 0, 93) |
| 375 | (0, 1, 1, −93); (3, 2, −2, −3)<br>(2, 1, 188); (20, 5, 20) | (0, −1, −1, 93); (3, −2, −2, 3) |
| 376 | (0, 1, 0, −94)<br>(2, 0, 188) | (0, −1, 0, 94) |
| 379 | (0, 1, 1, −94); (1, −1, −4, 3)<br>(2, 1, 190); (10, 1, 38) | (0, −1, −1, 94); (1, ∓1, −4, ±3) |
| 380 | (0, 1, 0, −95); (1, 2, −2, −6)<br>(2, 0, 190); (12, 2, 32) | (0, −1, 0, 95); (1, ∓2, −2, ±6) |
| 383 | (0, 1, 1, −95)<br>(2, 1, 192) | (0, −1, −1, 95) |
| 384 | (0, 1, 0, −96); (0, −2, 0, 12)<br>(2, 0, 192); (8, 0, 48) | (0, −1, 0, 96); (0, −2, 0, 12) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 387 | (0, 1, 1, —96)<br>(2, 1, 194) | (0, —1, —1, 96) |
| 388 | (0, 1, 0, —97)<br>(2, 0, 194) | (0, —1, 0, 97) |
| 391 | (0, 1, 1, —97)<br>(2, 1, 196) | (0, —1, —1, 97) |
| 392 | (0, 1, 0, —98)<br>(2, 0, 196) | (0, —1, 0, 98) |
| 395 | (0, 1, 1, —98)<br>(2, 1, 198) | (0, —1, —1, 98) |
| 396 | (0, 1, 0, —99); (0, 2, 1, —12)<br>(2, 0, 198); (8, 2, 50) | (0, —1, 0, 99); (0, ∓2, 1, ±12) |
| 399 | (0, 1, 1, —99)<br>(2, 1, 200) | (0, —1, —1, 99) |
| 400 | (0, 1, 0, —100); (0, 2, 2, —11); (1, —1, —4, 4); (1, —3, —1, 3); (3, —1, —3, 1)<br>(2, 0, 200); (8, 4, 52); (10, 0, 40); (20, 0, 20); (20, 0, 20) | (0, —1, 0, 100); (0, —2, —2, 11); (1, ∓1, —4, ±4);<br>(1, ∓3, —1, ±3) |
| 403 | (0, 1, 1, —100)<br>(2, 1, 102) | (0, —1, —1, 100) |
| 404 | (0, 1, 0, —101)<br>(2, 0, 202) | (0, —1, 0, 101) |
| 407 | (0, 1, 1, —101)<br>(2, 1, 204) | (0, —1, —1, 101) |
| 408 | (0, 1, 0, —102)<br>(2, 0, 204) | (0, —1, 0, 102) |
| 411 | (0, 1, 1, —102); (1, —2, —3, 3)<br>(2, 1, 206); (14, 3, 30) | (0, —1, —1, 102); (1, ∓2, —3, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
| --- | --- | --- |
| 412 | (0, 1, 0, −103); (2, 2, −2, −5)<br>(2, 0, 206); (16, 6, 28) | (0, −1, 0, 103); (2, ∓2, −2, ±5) |
| 415 | (0, 1, 1, −103)<br>(2, 1, 208) | (0, −1, −1, 103) |
| 416 | (0, 1, 0, −104); (0, −2, 0, 13); (1, 3, 0, −4); (3, 2, −2, −4)<br>(2, 0, 208); (8, 0, 52); (18, 4, 24); (20, 8, 24) | (0, −1, 0, 104); (0, −2, 0, 13); (1, ∓3, 0, ±4);<br>(3, ∓2, −2, ±4) |
| 419 | (0, 1, 1, −104); (1, 1, −4, −5)<br>(2, 1, 210); (10, 1, 42) | (0, −1, −1, 104); (1, ∓1, −4, ±5) |
| 420 | (0, 1, 0, −105)<br>(2, 0, 210) | (0, −1, 0, 105) |
| 423 | (0, 1, 1, −105); (1, 2, −2, −7)<br>(2, 1, 212); (12, 3, 36) | (0, −1, −1, 105); (1, ∓2, −2, ±7) |
| 424 | (0, 1, 0, −106); (2, −2, −3, 1)<br>(2, 0, 212); (20, 4, 22) | (0, −1, 0, 106); (1, ∓3, −2, ±2) |
| 427 | (0, 1, 1, −106)<br>(2, 1, 214) | (0, −1, −1, 106) |
| 428 | (0, 1, 0, −107); (0, 2, 1, −13)<br>(2, 0, 214); (8, 2, 54) | (0, −1, 0, 107); (0, ∓2, 1, ±13) |
| 431 | (0, 1, 1, −107); (3, 1, −3, −2)<br>(2, 1, 216); (20, 3, 22) | (0, −1, −1, 107); (2, ∓3, −1, ±3) |
| 432 | (0, 1, 0, −108); (0, 2, 2, −12); (0, −3, 0, 4); (0, 3, 22, −3);<br>(2, 0, 216); (8, 4, 56); (18, 0, 24); (18, 6, 26);<br>(2, −2, −4, −2); (2, 4, 2, −2); (4, 2, −2, −4)<br>(24, 12, 24); (24, 12, 24); (24, 12, 24) | (0, −1, 0, 108); (0, −2, −2, 12); (0, −3, 0, 4);<br>(0, ∓3, 2, ±3); (2, ±2, −4, ±2); (4, −2, −2, 4) |
| 435 | (0, 1, 1, −108)<br>(2, 1, 218) | (0, −1, −1, 108) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 436 | (0, 1, 0, −109); (1, 1, −4, −6)<br>(2, 0, 218); (10, 2, 44) | (0, −1, 0, 109); (1, ∓1, −4, ±6) |
| 439 | (0, 1, 1, −109); (3, 1, −3, −4)<br>(2, 1, 220); (20, 9, 26) | (0, −1, −1, 109); (3, ∓1, −3, ±4) |
| 440 | (0, 1, 0, −110); (2, −1, −4, −2)<br>(2, 0, 220); (18, 8, 28) | (0, −1, 0, 110); (2, ±1, −4, ±2) |
| 443 | (0, 1, 1, −110)<br>(2, 1, 222) | (0, −1, −1, 110) |
| 444 | (0, 1, 0, −111); (3, 1, −3, −3)<br>(2, 0, 222); (20, 6, 24) | (0, −1, 0, 111); (3, ∓1, −3, ±3) |
| 447 | (0, 1, 1, −111)<br>(2, 1, 224) | (0, −1, −1, 111) |
| 448 | (0, 1, 0, −112); (0, −2, 0, 14); (1, −2, −4, 0); (1, 3, 1, −5);<br>(2, 0, 224); (8, 0, 56); (16, 8, 32); (16, 8, 32);<br>(2, 0, −4, −4); (2, 2, −2, −6)<br>(16, 8, 32); (16, 8, 32) | (0, −1, 0, 112); (0, −2, 0, 14); (0, −4, ∓2, 1);<br>(2, 0, −4, ±4) |
| 451 | (0, 1, 1, −112); (1, 1, −4, −7)<br>(2, 1, 226); (10, 3, 46) | (0, −1, −1, 112); (1, ∓1, −4, ±7) |
| 452 | (0, 1, 0, −113)<br>(2, 0, 226) | (0, −1, 0, 113) |
| 455 | (0, 1, 1, −113)<br>(2, 1, 228) | (0, −1, −1, 113) |
| 456 | (0, 1, 0, −114)<br>(2, 0, 228) | (0, −1, 0, 114) |
| 459 | (0, 1, 1, −114); (0, 3, 1, −4); (0, 3, 3, −2)<br>(2, 1, 230); (18, 3, 26); (18, 9, 36) | (0, −1, −1, 114); (0, ∓3, 1, ±4); (0, −3, −3, 2) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 460 | (0, 1, 0, —115); (0, 2, 1, —14)<br>(2, 0, 230); (8, 2, 58) | (0, —1, 0, 115); (0, ∓2, 1, ±14) |
| 463 | (0, 1, 1, —115)<br>(2, 1, 232) | (0, —1, —1, 115) |
| 464 | (0, 1, 0, —116); (0, 2, 2, —13); (1, 1, —4, —8); (1, 2, —2, —8)<br>(2, 0, 232); (8, 4, 60); (10, 4, 48); (12, 4, 40) | (0, —1, 0, 116); (0, —2, —2, 13); (1, ∓1, —4, ±8);<br>(1, ∓2, —2, ±8) |
| 467 | (0, 1, 1, —116)<br>(2, 1, 234) | (0, —1, —1, 116) |
| 468 | (0, 1, 0, —117)<br>(2, 0, 234) | (0, —1, 0, 117) |
| 471 | (0, 1, 1, —117)<br>(2, 1, 236) | (0, —1, —1, 117) |
| 472 | (0, 1, 0, —118); (1, —2, —3, 4)<br>(2, 0, 236); (14, 2, 34) | (0, —1, 0, 118); (1, ∓2, —3, ±4) |
| 475 | (0, 1, 1, —118); (1, 0, —5, —5); (1, 1, —4, —9)<br>(2, 1, 238); (10, 5, 50); (10, 5, 50) | (0, —1, —1, 118); (1, 0, —5, ±5) |
| 476 | (0, 1, 0, —119); (2, 0, —4, —3)<br>(2, 0, 238); (16, 6, 32) | (0, —1, 0, 119); (2, 0, —4, ±3) |
| 479 | (0, 1, 1, —119)<br>(2, 1, 240) | (0, —1, —1, 119) |
| 480 | (0, 1, 0, —120); (0, —2, 0, 15)<br>(2, 0, 240); (8, 0, 60) | (0, —1, 0, 120); (0, —2, 0, 15) |
| 483 | (0, 1, 1, —120)<br>(2, 1, 242) | (0, —1, —1, 120) |
| 484 | (0, 1, 0, —121); (1, 0, —5, —4)<br>(2, 0, 242); (10, 4, 50) | (0, —1, 0, 121); (1, 0, —5, ±4) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 487 | (0, 1, 1, −121)<br>(2, 1, 244) | (0, −1, −1, 121) |
| 488 | (0, 1, 0, −122)<br>(2, 0, 244) | (0, −1, 0, 122) |
| 491 | (0, 1, 1, −122); (1, 0, −5, −3)<br>(2, 1, 246); (10, 3, 50) | (0, −1, −1, 122); (1, 0, −5, ±3) |
| 492 | (0, 1, 0, −123); (0, 2, 1, −15)<br>(2, 0, 246); (8, 2, 62) | (0, −1, 0, 123); (0, ∓2, 1, ±15) |
| 495 | (0, 1, 1, −123)<br>(2, 1, 248) | (0, −1, −1, 123) |
| 496 | (0, 1, 0, −124); (0, 2, 2, −14); (1, 0, −5, −2); (2, 0, −4, −2)<br>(2, 0, 248); (8, 4, 64); (10, 2, 50); (16, 4, 32) | (0, −1, 0, 124); (0, −2, −2, 14); (1, 0, −5, ±2);<br>(2, 0, −4, ±2) |
| 499 | (0, 1, 1, −124); (1, 0, −5, −1)<br>(2, 1, 250); (10, 1, 50) | (0, −1, −1, 124); (1, 0, −5, ±1) |
| 500 | (0, 1, 0, −125); (1, 0, −5, 0)<br>(2, 0, 250); (10, 0, 50) | (0, −1, 0, 125); (0, −5, 0, 1) |
| 503 | (0, 1, 1, −125); (1, 2, −2, −9)<br>(2, 1, 252); (12, 5, 44) | (0, −1, −1, 125); (1, ∓2, −2, ±9) |
| 504 | (0, 1, 0, −126); (2, −1, −4, −1)<br>(2, 0, 252); (18, 6, 30) | (0, −1, 0, 126); (1, ∓4, 1, ±2) |
| 507 | (0, 1, 1, −126); (1, −3, −4, −1); (1, 4, 3, −1); (3, −1, −4, −3);<br>(2, 1, 254); (26, 13, 26); (26, 13, 26); (26, 13, 26);<br>(3, 4, 1, −3); (4, 1, −3, −4); (4, 3, −1, −4)<br>(26, 13, 26); (26, 13, 26); (26, 13, 26) | (0, −1, −1, 126); (1, ±3, −4, ±1); (3, ±1, −4, ±3);<br>(4, ∓1, −3, ±4) |
| 508 | (0, 1, 0, −127); (2, 0, −4, −1)<br>(2, 0, 254); (16, 2, 32) | (0, −1, 0, 127); (1, ∓4, 0, ±2) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 511 | (0, 1, 1, −127)<br>(2, 1, 256) | (0, −1, −1, 127) |
| 512 | (0, 1, 0, −128); (0, −2, 0, 16); (1, −3, −3, 1); (2, 0, −4, 0)<br>(2, 0, 256); (8, 0, 64); (24, 8, 24); (16, 0, 32) | (0, −1, 0, 128); (0, −2, 0, 16); (1, −3, −3, 1);<br>(0, −4, 0, 2) |
| 515 | (0, 1, 1, −128); (1, 3, 0, −5)<br>(2, 1, 258); (18, 5, 30) | (0, −1, −1, 128); (1, ∓3, 0, ±5) |
| 516 | (0, 1, 0, −129); (2, −2, −3, 2)<br>(2, 0, 258); (20, 2, 26) | (0, −1, 0, 129); (2, ∓2, −3, ±2) |
| 519 | (0, 1, 1, −129); (1, 3, −1, −4)<br>(2, 1, 260); (20, 1, 26) | (0, −1, −1, 129); (1, ∓3, −1, ±4) |
| 520 | (0, 1, 0, −130)<br>(2, 0, 260) | (0, −1, 0, 130) |
| 523 | (0, 1, 1, −130)<br>(2, 1, 262) | (0, −1, −1, 131) |
| 524 | (0, 1, 0, −131); (0, 2, 1, −16)<br>(2, 0, 262); (8, 2, 66) | (0, −1, 0, 131); (0, ∓2, 1, ±16) |
| 527 | (0, 1, 1, −131); (1, −2, −4, 1)<br>(2, 1, 264); (16, 7, 36) | (0, −1, −1, 131); (1, ∓2, −4, ±1) |
| 528 | (0, 1, 0, −132); (0, 2, 2, −15)<br>(2, 0, 264); (8, 4, 68) | (0, −1, 0, 132); (0, −2, −2, 15) |
| 531 | (0, 1, 1, −132); (1, −2, −3, 5)<br>(2, 1, 266); (14, 1, 38) | (0, −1, −1, 132); (1, ∓2, −3, ±5) |
| 532 | (0, 1, 0, −133)<br>(2, 0, 266) | (0, −1, 0, 133) |
| 535 | (0, 1, 1, −133)<br>(2, 1, 268) | (0, −1, −1, 133) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 536 | (0, 1, 0, −134)<br>(2, 0, 268) | (0, −1, 0, 134) |
| 539 | (0, 1, 1, −134)<br>(2, 1, 270) | (0, −1, −1, 134) |
| 540 | (0, 1, 0, −135); (0, −3, 0, 5); (0, 3, 2, −4); (1, −1, −5, −1); (1, 2, −2, −10)<br>(2, 0, 270); (18, 0, 30); (18, 6, 32); (12, 6, 48); (12, 6, 48) | (0, −1, 0, 135); (0, −3, 0, 5); (0, ∓3, 2, ±4);<br>(1, ±1, −5, ±1) |
| 543 | (0, 1, 1, −135); (3, 3, −1, −4)<br>(2, 1, 272); (24, 9, 26) | (0, −1, −1, 135); (3, ∓3, −1, ±4) |
| 544 | (0, 1, 0, −136); (0, −2, 0, 17)<br>(2, 0, 272) (8, 0, 68) | (0, −1, 0, 136); (0, −2, 0, 17) |
| 547 | (0, 1, 1, −136); (2, 3, −1, −4)<br>(2, 1, 274); (22, 5, 26) | (0, −1, −1, 136); (2, ∓3, −1, ±4) |
| 548 | (0, 1, 0, −137)<br>(2, 0, 274) | (0, −1, 0, 137) |
| 551 | (0, 1, 1, −137)<br>(2, 1, 276) | (0, −1, −1, 137) |
| 552 | (0, 1, 0, −138)<br>(2, 0, 276) | (0, −1, 0, 138) |
| 555 | (0, 1, 1, −138)<br>(2, 1, 278) | (0, −1, −1, 138) |
| 556 | (0, 1, 0, −139); (0, 2, 1, −17)<br>(2, 0, 278); (8, 2, 70) | (0, −1, 0, 139); (0, ∓2, 1, ±17) |
| 559 | (0, 1, 1, −139)<br>(2, 1, 280) | (0, −1, −1, 139) |
| 560 | (0, 1, 0, −140); (0, 2, 2, −16); (2, −1, −4, 0)<br>(2, 0, 280); (8, 4, 72); (18, 4, 32) | (0, −1, 0, 140); (0, −2, −2, 16); (0, ∓4, 1, ±2) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 563 | (0, 1, 1, —140); (1, —3, —2, 3)<br>(2, 1, 282) (22, 3, 26) | (0, —1, —1, 140); (1, ∓3, —2, ±3) |
| 564 | (0, 1, 0, —141)<br>(2, 0, 282) | (0, —1, 0, 141) |
| 567 | (0, 1, 1, —141); (0, 3, 1, —5); (0, 3, 3, —3)<br>(2, 1, 284); (18, 3, 32); (18, 9, 36) | (0, —1, —1, 141); (0, ∓3, 1, ±5); (0, —3, —3, 3) |
| 568 | (0, 1, 0, —142)<br>(2, 0, 284) | (0, —1, 0, 142) |
| 571 | (0, 1, 1, —142)<br>(2, 1, 286) | (0, —1, —1, 142) |
| 572 | (0, 1, 0, —143); (2, —2, —4, —1)<br>(2, 0, 286); (24, 10, 28) | (0, —1, 0, 143); (1, ∓4, 2, ±2) |
| 575 | (0, 1, 1, —143); (1, —1, —5, 0)<br>(2, 1, 288); (12, 5, 50) | (0, —1, —1, 143); (0, ∓5, 1, ±1) |
| 576 | (0, 1, 0, —144); (0, —2, 0, 18)<br>(2, 0, 288); (8, 0, 72) | (0, —1, 0, 144); (0, —2, 0, 18) |
| 579 | (0, 1, 1, —144)<br>(2, 1, 290) | (0, —1, —1, 144) |
| 580 | (0, 1, 0, —145)<br>(2, 0, 290) | (0, —1, 0, 145) |
| 583 | (0, 1, 1, —145)<br>(2, 1, 292) | (0, —1, —1, 145) |
| 584 | (0, 1, 0, —146)<br>(2, 0, 292) | (0, —1, 0, 146) |
| 587 | (0, 1, 1, —146)<br>(2, 1, 294) | (0, —1, —1, 146) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 588 | (0, 1, 0, —147); (0, 2, 1, —18); (1, 2, —3, —6)<br>(2, 0, 294); (8, 2, 74); (14, 0, 42) | (0, —1, 0, 147); (0, ∓2, 1, ±18); (1, ∓2, —3, ±6) |
| 591 | (0, 1, 1, —147)<br>(2, 1, 296) | (0, —1, —1, 147) |
| 592 | (0, 1, 0, —148); (0, 2, 2, —17)<br>(2, 0, 296); (8, 4, 76) | (0, —1. 0, 148); (0, —2, —2, 17) |
| 595 | (0, 1, 1, —148)<br>(2, 1, 298) | (0, —1, —1, 148) |
| 596 | (0, 1, 0, —149)<br>(2, 0, 298) | (0, —1, 0, 149) |
| 599 | (0, 1, 1, —149)<br>(2, 1, 300) | (0, —1, —1, 149) |
| 600 | (0, 1, 0, —150); (2, —2, —3, 3)<br>(2, 0, 300); (20, 0, 30) | (0, —1, 0, 150); (2, ∓2, —3, ±3) |
| 603 | (0, 1, 1, —150)<br>(2, 1, 302) | (0, —1, —1, 150) |
| 604 | (0, 1, 0, —151); (1, —2, —4, 2)<br>(2, 0, 302); (16, 6, 40) | (0, —1, 0, 151); (1. ∓2, —4, ±2) |
| 607 | (0, 1, 1, —151)<br>(2, 1, 304) | (0, —1, —1, 151) |
| 608 | (0, 1, 0, —152); (0, —2, 0, 19); (1, —1, —5, 1); (2, —1, —4, 1)<br>(2, 0, 304); (8, 0, 76); (12, 4, 52); (18, 2, 34) | (0, —1, 0, 152); (0, —2, 0, 19); (1, ∓1, —5, ±1);<br>(1, ∓4, —1, ±2) |
| 611 | (0, 1, 1, —152)<br>(2, 1, 306) | (0, —1, —1, 152) |
| 612 | (0, 1, 0, —153); (1, 3, 0, —6)<br>(2, 0, 306); (18, 6, 36) | (0, —1, 0, 153); (1, ∓3, 0, ±6) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 615 | (0, 1, 1, —153)<br>(2, 1, 308) | (0, —1, —1, 153) |
| 616 | (0, 1, 0, —154)<br>(2, 0, 308) | (0, —1, 0, 154) |
| 619 | (0, 1, 1, —154)<br>(2, 1, 310) | (0, —1, —1, 154) |
| 620 | (0, 1, 0, —155); (0, 2, 1, —19)<br>(2, 0, 310); (8, 2, 78) | (0, —1, 0, 155); (0, ∓2, 1, ±19) |
| 623 | (0, 1, 1, —155)<br>(2, 1, 312) | (0, —1, —1, 155) |
| 624 | (0, 1, 0, —156); (0, 2, 2, —18); (3, 0, —4, —4); (3, 3, —1, —5)<br>(2, 0, 312); (8, 4, 80); (24, 12, 32); (24, 12, 32) | (0, —1, 0, 156); (0, —2, —2, 18); (3, 0, —4, ±4) |
| 627 | (0, 1, 1, —156)<br>(2, 1, 314) | (0, —1, —1, 156) |
| 628 | (0, 1, 0, —157); (3, —1, —4, —2)<br>(2, 0, 314); (26, 10, 28) | (0, —1, 0, 157); (2, ∓4, 1, ±3) |
| 631 | (0, 1, 1, —157)<br>(2, 1, 316) | (0, —1, —1, 157) |
| 632 | (0, 1, 0, —158)<br>(2, 0, 316) | (0, —1, 0, 158) |
| 635 | (0, 1, 1, —158)<br>(2, 1, 318) | (0, —1, —1, 158) |
| 636 | (0, 1, 0, —159); (1, 3, —1, —5)<br>(2, 0, 318); (20, 2, 32) | (0, —1, 0, 159); (1, ∓3, —2, ±5) |
| 639 | (0. 1, 1, —159); (1, —1, —5, 2)<br>(2, 1, 320); (12, 3, 54) | (0, —1, —1, 159); (1, ∓1, —5, ±2) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 640 | (0, 1, 0, −160); (0, −2, 0, 20)<br>(2, 0, 320); (8, 0, 80) | (0, −1, 0, 160); (0, −2, 0, 20) |
| 643 | (0, 1, 1, −160); (1, 2, −3, −7)<br>(2, 1, 322) (14, 1, 46) | (0, −1, −1, 160); (1, ∓2, −3, ±7) |
| 644 | (0, 1, 0, −161)<br>(2, 0, 322) | (0, −1, 0, 161) |
| 647 | (0, 1, 1, −161)<br>(2, 1, 324) | (0, −1, −1, 161) |
| 648 | (0, 1, 0, −162); (0, −3, 0, 6); (0, 3, 2, −5); (2, −1, −4, 2)<br>(2, 0, 324); (18, 0, 36); (18, 6, 38); (18, 0, 36) | (0, −1, 0, 162); (0, −3, 0, 6); (0, ∓3, 2, ±5);<br>(2, ∓1, −4, ±2) |
| 651 | (0, 1, 1, −162)<br>(2, 1, 326) | (0, −1, −1, 162) |
| 652 | (0, 1, 0, −163); (0, 2, 1, −20)<br>(2, 0, 326); (8, 2, 82) | (0, −1, 0, 163); (0, ∓2, 1, ±20) |
| 655 | (0, 1, 1, −163); (2, 3, −1, −5)<br>(2, 1, 328); (22, 7, 32) | (0, −1, −1, 163); (2, ∓3, −1, ±5) |
| 656 | (0, 1, 0, −164); (0, 2, 2, −19)<br>(2, 0, 328); (8, 4, 84) | (0, −1, 0, 164); (0, −2, −2, 19) |
| 659 | (0, 1, 1, −164)<br>(2, 1, 330) | (0, −1, −1, 164) |
| 660 | (0, 1, 0, −165)<br>(2, 0, 330) | (0, −1, 0, 165) |
| 663 | (0, 1, 1, −165)<br>(2, 1, 332) | (0, −1, −1, 165) |
| 664 | (0, 1, 0, −166)<br>(2, 0, 332) | (0, −1, 0, 166) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 667 | (0, 1, 1, —166)<br>(2, 1, 334) | (0, —1, —1, 166) |
| 668 | (0, 1, 0, —167); (1, —1, —5, 3)<br>(2, 0, 334); (12, 2, 56) | (0, —1, 0, 167); (1, ∓1, —5, ±3) |
| 671 | (0, 1, 1, —167); (1, —3, —3, 2)<br>(2, 1, 336); (24, 7, 30) | (0, —1, —1, 167); (1, ∓3, —3, ±2) |
| 672 | (0, 1, 0, —168); (0, —2, 0, 21)<br>(2, 0, 336); (8, 0, 84) | (0, —1, 0, 168); (0, —2, 0, 21) |
| 675 | (0, 1, 1, —168); (0, 3, 1, —6); (0, 3, 3, —4)<br>(2, 1, 338); (18, 3, 38); (18, 9, 42) | (0, —1, —1, 168); (0, ∓3, 1, ±6); (0, —3, —3, 4) |
| 676 | (0, 1, 0, —169); (2, 2, —3, —4); (2, —3, —2, 3); (3, —2, —3, 2)<br>(2, 0, 338); (20, 2, 34); (26, 0, 26); (26, 0, 26) | (0, —1, 0, 169); (2, ∓2, —3, ±4); (2, ∓3, —2, ±3) |
| 679 | (0, 1, 1, —169); (1, —2, —4, 3)<br>(2, 1, 340); (16, 5, 44) | (0, —1, —1, 169); (1, ∓2, —4, ±3) |
| 680 | (0, 1, 0, —170); (2, 1, —4, —3)<br>(2, 0, 340); (18, 2, 38) | (0, —1, 0, 170); (2, ∓1, —4, ±3) |
| 683 | (0, 1, 1, —170)<br>(2, 1, 342) | (0, —1, —1, 170) |
| 684 | (0, 1, 0, —171); (0, 2, 1, —21)<br>(2, 0, 342); (8, 2, 86) | (0, —1, 0, 171); (0, ∓2, 1, ±21) |
| 687 | (0, 1, 1, —171); (3, 0, —4, —3)<br>(2, 1, 344); (24, 9, 32) | (0, —1, —1, 171); (3, 0, —4, ±3) |
| 688 | (0, 1, 0, —172); (0, 2, 2, —20); (1, —3, —4, 0)<br>(2, 0, 344); (8, 4, 88); (26, 12, 32) | (0, —1, 0, 172); (0, —2, —2, 20); (0, ∓4, 3, ±1) |
| 691 | (0, 1, 1, —172)<br>(2, 1, 346) | (0, —1, —1, 172) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 692 | (0, 1, 0, —173)<br>(2, 0, 346) | (0, —1, 0, 173) |
| 695 | (0, 1, 1, —173); (1, —1, —5, 4)<br>(2, 1, 348); (12, 1, 58) | (0, —1, —1, 173); (1, ∓1, —5, ±4) |
| 696 | (0, 1, 0, —174); (1, 2, —3, —8)<br>(2, 0, 348); (14, 2, 50) | (0, —1, 0, 174); (1, ∓2, —3, ±8) |
| 699 | (0, 1, 1, —174)<br>(2, 1, 350) | (0, —1, —1, 174) |
| 700 | (0, 1, 0, —175); (1, —3, —2, 4)<br>(2, 0, 350); (22. 2, 32) | (0, —1, 0, 175); (1, ∓3, —2, ±4) |
| 703 | (0, 1, 1, —175)<br>(2, 1, 352) | (0, —1, —1, 175) |
| 704 | (0, 1, 0, —176); (0, —2, 0, 22); (2, 1, —4, —4); (2, —2, —4, 0)<br>(2, 0, 352); (8, 0, 88); (18, 4, 40); (24, 8, 32) | (0, —1, 0, 176); (0, —2, 0, 22); (2, ∓1, —4, ±4);<br>(0, ∓4, 2, ±2) |
| 707 | (0, 1, 1, —176); (1, 3, 0, —7)<br>(2, 1, 354); (18, 7, 42) | (0, —1, —1, 176); (1, ∓3, 0, ±7) |
| 708 | (0, 1, 0, — 177)<br>(2, 0, 354) | (0, —1, 0, 177) |
| 711 | (0, 1, 1, — 177)<br>(2, 1, 356) | (0, —1, —1, 177) |
| 712 | (0, 1, 0, —178)<br>(2, 0, 356) | (0, —1, 0, 178) |
| 715 | (0, 1, 1, —178)<br>(2, 1, 358) | (0, —1, —1, 178) |
| 716 | (0, 1, 0, —179); (0, 2, 1, —22)<br>(2, 0, 358); (8, 2, 90) | (0, —1, 0, 179); (0, ∓2, 1, ±22) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 719 | (0, 1, 1, −179)<br>(2, 1, 360) | (0, −1, −1, 179) |
| 720 | (0, 1, 0, −180); (0, 2, 2, −21); (1, −1, −5, 5); (2, 1, −4, −5)<br>(2, 0, 360); (8, 4, 92); (12, 0, 60); (18, 6, 42) | (0, −1, 0, 180); (0, −2, −2, 21); (1, ∓1, −5, ±5);<br>(2, ∓1, −4, ±5) |
| 723 | (0, 1, 1, −180)<br>(2, 1, 362) | (0, −1, −1, 180) |
| 724 | (0, 1, 0, −181)<br>(2, 0, 362) | (0, −1, 0, 181) |
| 727 | (0, 1, 1, −181)<br>(2, 1, 364) | (0, −1, −1, 181) |
| 728 | (0, 1, 0, −182); (2, 1, −4, −6)<br>(2, 0, 364); (18, 8, 44) | (0, −1, 0, 182); (2, ∓1, −4, ±6) |
| 731 | (0, 1, 1, −182); (3, −1, −4, −1)<br>(2, 1, 366); (26, 7, 30) | (0, −1, −1, 182); (1, ∓4, 1, ±3) |
| 732 | (0, 1, 0, −183); (3, 0, −4, −2)<br>(2, 0, 366); (24, 6, 32) | (0, −1, 0, 183); (2, ∓4, 0, ±3) |
| 735 | (0, 1, 1, −183)<br>(2, 1, 368) | (0, −1, −1, 183) |
| 736 | (0, 1, 0, −184); (0, −2, 0, 23)<br>(2, 0, 368); (8, 0, 92), | (0, −1, 0, 184); (0, −2, 0, 23) |
| 739 | (0, 1, 1, −184)<br>(2, 1, 370) | (0, −1, −1, 184) |
| 740 | (0, 1, 0, −185)<br>(2, 0, 370) | (0, −1, 0, 185) |
| 743 | (0, 1, 1, −185); (1, 1, −5, −6)<br>(2, 1, 372); (12, 1, 62) | (0, −1, −1, 185); (1, ∓1, −5, ±6) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik | Klassen. |
|---|---|---|
| 744 | (0, 1, 0, −186); (2, 2, −3, −5)<br>(2, 0, 372); (20, 4, 38) | (0, −1, 0, 186); (2, ∓2, −3, ±5) |
| 747 | (0, 1, 1, −186); (1, 2, −3, −9)<br>(2, 1, 374); (14, 3, 54) | (0, −1, −1, 186); (1, ∓2, −3, ±9) |
| 748 | (0, 1, 0, −187); (0, 2, 1, −23)<br>(2, 0, 374); (8, 2, 94) | (0, −1, 0, 187); (0, ∓2, 1, ±23) |
| 751 | (0, 1, 1, −187); (1, 3, −1, −6)<br>(2, 1, 376); (20, 3, 38) | (0, −1, −1, 187); (1, ∓3, −1, ±6) |
| 752 | (0, 1, 0, −188); (0, 2, 2, −22); (1, −2, −4, 4)<br>(2, 0, 376); (8, 4, 96); (16, 4, 48) | (0, −1, 0, 188); (0, −2, −2, 22); (1, ∓2, −4, ±4) |
| 755 | (0, 1, 1, −188); (2, 3, −1, −6)<br>(2, 1, 378); (22, 9, 38) | (0, −1, −1, 188); (2, ∓3, −1, ±6) |
| 756 | (0, 1, 0, −189); (0, −3, 0, 7); (0, 3, 2, −6)<br>(2, 0, 378); (18, 0, 42); (18, 6, 44) | (0, −1, 0, 189); (0, −3, 0, 7); (0, ∓3, 2, ±6) |
| 759 | (0, 1, 1, −189); (3, 0, −4, −1)<br>(2, 1, 380); (24, 3, 32) | (0, −1, −1, 189); (1, ∓4, 0, ±3) |
| 760 | (0, 1, 0, −190)<br>(2, 0, 380) | (0, −1, 0, 190) |
| 763 | (0, 1, 1, −190)<br>(2, 1, 382) | (0, −1, −1, 190) |
| 764 | (0, 1, 0, −191); (1, 1, −5, −7)<br>(2, 0, 382); (12, 2, 64) | (0, −1, 0, 191); (1, ∓1, −5, ±7) |
| 767 | (0, 1, 1, −191)<br>(2, 1, 384) | (0, −1, −1, 191) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 768 | (0, 1, 0, −192); (0, −2, 0, 24); (0, 4, 4, 0); (3, 0, −4, 0);<br>(2, 0, 384); (8, 0, 96); (32, 16, 32); (24, 0, 32);<br>(4, 0, −4, −4); (4, 4, 0, −4)<br>(32, 16, 32); (32, 16, 32) | (0, −1, 0, 192); (0, −2, 0, 24); (0, 4, 4, 0);<br>(0, −4, 0, 3); (4, 0, −4, ±4) |
| 771 | (0, 1, 1, −192); (3, 2, −3, −3)<br>(2, 1, 386); (26, 3, 30) | (0, −1, −1, 192); (3, ∓2, −3, ±3) |
| 772 | (0, 1, 0, −193)<br>(2, 0, 386) | (0, −1, 0, 193) |
| 775 | (0, 1, 1, −193); (1, 4, 2, −3)<br>(2, 1, 388); (28, 11, 32) | (0, −1, −1, 193); (1, ∓4, 2, ±3) |
| 776 | (0, 1, 0, −194)<br>(2, 0, 388) | (0, −1, 0, 194) |
| 779 | (0, 1, 1, −194)<br>(2, 1, 390) | (0, −1, −1, 194) |
| 780 | (0, 1, 0, −195); (0, 2, 1, −24)<br>(2, 0, 390); (8, 2, 98) | (0, −1, 0, 195); (0, ∓2, 1, ±24) |
| 783 | (0, 1, 1, −195); (0, 3, 1, −7); (0, 3, 3, −5); (1, 1, −5, −8)<br>(2, 1, 392); (18, 3, 44); (18, 9 48); (12, 3, 66) | (0, −1, −1, 195); (0, ∓3, 1, ±7); (0, −3, −3, 5);<br>(1, ∓1, −5, ±8) |
| 784 | (0, 1, 0, −196); (0, 2, 2, −23)<br>(2, 0, 392); (8, 4, 100) | (0, −1, 0, 196); (0, −2, −2, 23) |
| 787 | (0, 1, 1, −196)<br>(2, 1, 394) | (0, −1, −1, 196) |
| 788 | (0, 1, 0, −197)<br>(2, 0, 394) | (0, −1, 0, 197) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 791 | (0, 1, 1, —197)<br>(2, 1, 396) | (0, —1, —1, 197) |
| 792 | (0, 1, 0, —198)<br>(2, 0, 396) | (0, —1, 0, 198) |
| 795 | (0, 1, 1, —198)<br>(2, 1, 398) | (0, —1, —1, 198) |
| 796 | (0, 1, 0, —199); (1, 2, —3, —10)<br>(2, 0, 398); (14, 4, 58) | (0, —1, 0, 199); (1, ∓2, —3, ±10) |
| 799 | (0, 1, 1, —199)<br>(2, 1, 400) | (0, —1, —1, 199) |
| 800 | (0, 1, 0, —200); (0, —2, 0, 25); (1, 1, —5, —9); (1, 3, 0, —8)<br>(2, 0, 400); (8, 0, 100); (12, 4, 68); (18, 8, 48) | (0, —1, 0, 200); (0, —2, 0, 25);<br>(1, ∓1, —5, ±9); (1, ∓3, 0, ±8) |
| 803 | (0, 1, 1, —200)<br>(2, 1, 402) | (0, —1, —1, 200) |
| 804 | (0, 1, 0, —201); (2, 2, —3, —6)<br>(2, 0, 402); (20, 6, 42) | (0, —1, 0, 201); (2, ∓2, —3, ±6) |
| 807 | (0, 1, 1, —201)<br>(2, 1, 404) | (0, —1, —1, 201) |
| 808 | (0, 1, 0, —202); (2, 4, 1, —4)<br>(2, 0, 404); (28, 12, 34) | (0, —1, 0, 202); (2, ∓4, 1, ±4) |
| 811 | (0, 1, 1, —202)<br>(2, 1, 406) | (0, —1, —1, 202) |
| 812 | (0, 1, 0, —203); (0, 2, 1, —25)<br>(2, 0, 406); (8, 2, 102) | (0, —1, 0, 203); (0, ∓2, —1, ±25) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 815 | (0, 1, 1, —203); (1, 1, —5, —10)<br>(2, 1, 408); (12, 5, 70) | (0, —1, —1, 203); (1, $\mp$1, —5, $\pm$10) |
| 816 | (0, 1, 0, —204); (0, 2, 2, —24); (3, —1, —4, 0)<br>(2, 0, 408); (8, 4, 104); (26, 4, 32) | (0, —1, 0, 204); (0, —2, —2, 24); (0, $\mp$4, 1, $\pm$3) |
| 819 | (0, 1, 1, —204)<br>(2, 1, 410) | (0, —1, —1, 204) |
| 820 | (0, 1, 0, —205)<br>(2, 0, 410) | (0, —1, 0, 205) |
| 823 | (0, 1, 1, —205); (1, —2, —4, 5)<br>(2, 1, 412); (16, 3, 52) | (0, —1, —1, 205); (1, $\mp$2, —4, $\pm$5) |
| 824 | (0, 1, 0, —206)<br>(2, 0, 412) | (0, —1, 0, 206) |
| 827 | (0, 1, 1, —206)<br>(2, 1, 414) | (0, —1, —1, 206) |
| 828 | (0, 1, 0, —207); (1, 0, —6, —6); (1, 1, —5, —11); (1, —3, —3, 3);<br>(2, 0, 414); (12, 6, 72); (12, 6, 72); (24, 6, 36);<br>(2, —2, —4, 1); (2, 3, —2, —4)<br>(24, 6, 36); (26, 2, 32) | (0, —1, 0, 207); (1, 0, —6, $\pm$6); (1, $\mp$3, —3, $\pm$3);<br>(1, $\mp$4, 2, $\pm$2); (2, $\mp$3, —2, $\pm$4) |
| 831 | (0, 1, 1, —207)<br>(2, 1, 416) | (0, —1, —1, 207) |
| 832 | (0, 1, 0, —208); (0, —2, 0, 26)<br>(2, 0, 416); (8, 0, 104) | (0, —1, 0, 208); (0, —2, 0, 26) |
| 835 | (0, 1, 1, —208); (1, —3, —2, 5)<br>(2, 1, 418); (22, 1, 38) | (0, —1, —1, 208); (1, $\mp$3, —2, $\pm$5) |
| 836 | (0, 1, 0, —209)<br>(2, 0, 418) | (0, —1, 0, 209) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 839 | (0, 1, 1, −209); (1, 0, −6, −5)<br>(2, 1, 420); (12, 5, 72) | (0, −1, −1, 209); (1, 0, −6, ±5) |
| 840 | (0, 1, 0, −210)<br>(2, 0, 420) | (0, −1, 0, 210) |
| 843 | (0, 1, 1, −210); (1, 2, −3, −11)<br>(2, 1, 422); (14, 5, 62) | (0, −1, −1, 210); (1, ∓2, −3, ±11) |
| 844 | (0, 1, 0, −211); (0, 2, 1, −26)<br>(2, 0, 422); (8, 2, 106) | (0, −1, 0, 211); (0, ∓2, 1, ±26) |
| 847 | (0, 1, 1, −211); (2, −1, −5, −3); (2, 3, −1, −7)<br>(2, 1, 424); (22, 11, 44); (22, 11, 44) | (0, −1, −1, 211); (2, ±1, −5, ±3) |
| 848 | (0, 1, 0, −212); (0, 2, 2, −25); (1, 0, −6, −4); (3, 2, −3, −4)<br>(2, 0, 424); (8, 4, 108); (12, 4, 72); (26, 6, 34) | (0, −1, 0, 212); (0, −2, −2, 25); (1, 0, −6, ±4);<br>(3, ∓2, −3, ±4) |
| 851 | (0, 1, 1, −212)<br>(2, 1, 426) | (0, −1, −1, 212) |
| 852 | (0, 1, 0, −213)<br>(2, 0, 426) | (0, −1, 0, 213) |
| 855 | (0, 1, 1, −213); (1, 0, −6, −3)<br>(2, 1, 428); (12, 3, 72) | (0, −1, −1, 213); (1, 0, −6, ±3) |
| 856 | (0, 1, 0, −214); (2, 2, −3, −7)<br>(2, 0, 428); (20, 8, 46) | (0, −1, 0, 214); (2, ∓2, −3, ±7) |
| 859 | (0, 1, 1, −214)<br>(2, 1, 430) | (0, −1, −1, 214) |
| 860 | (0, 1, 0, −215); (1, 0, −6, −2)<br>(2, 0, 430); (12, 2, 72) | (0, −1, 0, 215); (1, 0, −6, ±2) |
| 863 | (0, 1, 1, −215); (1, 0, −6, −1)<br>(2, 1, 432); (12, 1, 72) | (0, −1, −1, 215); (1, 0, −6, ±1) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 864 | (0, 1, 0, −216); (0, −2, 0, 27); (0, −3, 0, 8); (0, 3, 2, −7);<br>(2, 0, 432); (8, 0, 108); (18, 0, 48); (18, 6, 60);<br>(1, 0, −6, 0); (1, 3, −1, −7)<br>(12, 0, 72); (20, 4, 44) | (0, −1, 0, 216); (0, −2, 0, 27); (0, −3, 0, 8);<br>(0, ∓3, 2, ±7); (0, −6, 0, 1); (1, ∓3, −1, ±7) |
| 867 | (0, 1, 1, −216); (1, −3, −4, 1)<br>(2, 1, 434); (26, 11, 38) | (0, −1, −1, 216); (1, ∓3, −4, ±1) |
| 868 | (0, 1, 0, −217)<br>(2, 0, 434) | (0, −1, 0, 217) |
| 871 | (0, 1, 1, −217)<br>(2, 1, 436) | (0, −1, −1, 217) |
| 872 | (0, 1, 0, −218)<br>(2, 0, 436) | (0, −1, 0, 218) |
| 875 | (0, 1, 1, −218); (2, −3, −3, 2)<br>(2, 1, 438); (30, 5, 30) | (0, −1, −1, 218); (2, −3, −3, 2) |
| 876 | (0, 1, 0, −219); (0, 2, 1, −27)<br>(2, 0, 438); (8, 2, 110) | (0, −1, 0, 219); (0, ∓2, 1, ±27) |
| 879 | (0, 1, 1, −219)<br>(2, 1, 440) | (0, −1, −1, 219) |
| 880 | (0, 1, 0, −220); (0, 2, 2, −26); (3, 4, 0, −4); (4, 0, −4, −3)<br>(2, 0, 440); (8, 4, 112); (32, 12, 32); (32, 12, 32) | (0, −1, 0, 220); (0, −2, −2, 26); (3, ∓4, 0, ±4) |
| 883 | (0, 1, 1, −220); (3, −1, −4, 1)<br>(2, 1, 442); (26, 1, 34) | (0, −1, −1, 220); (1, ∓4, −1, ±3) |
| 884 | (0, 1, 0, −221)<br>(2, 0, 442) | (0, −1, 0, 221) |
| 887 | (0, 1, 1, −221)<br>(2, 1, 444) | (0, −1, −1, 221) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 888 | (0, 1, 0, −222); (1, 2, −3, −12)<br>(2, 0, 444); (14, 6, 66) | (0, −1, 0, 222); (1, ∓2, −3, ±12) |
| 891 | (0, 1, 1, −222); (0, 3, 1, −8); (0, 3, 3, −6); (1, −2, −5, 1); (1, 3, 0, −9)<br>(2, 1, 446); (18, 3, 50); (18, 9, 54); (18, 9, 54); (18, 9, 54) | (0, −1, −1, 222); (0, ∓3, 1, ±8); (0, −3, −3, 6);<br>(1, ∓2, −5, ±1) |
| 892 | (0, 1, 0, −223); (1, −2, −4, 6)<br>(2, 0, 446); (16, 2, 56) | (0, −1, 0, 223); (1, ∓2, −4, ±6) |
| 895 | (0, 1, 1, −223)<br>(2, 1, 448) | (0, −1, −1, 223) |
| 896 | (0, 1, 0, −224); (0, −2, 0, 28)<br>(2, 0, 448); (8, 0, 112) | (0, −1, 0, 224); (0, −2, 0, 28) |
| 899 | (0, 1, 1, −224)<br>(2, 1, 450) | (0, −1, −1, 224) |
| 900 | (0, 1, 0, −225); (2, 0, −5, −5); (2, 2, −3, −8)<br>(2, 0, 450); (20, 10, 50); (20, 10, 50) | (0, −1, 0, 225); (2, 0, −5, ±5) |
| 903 | (0, 1, 1, −225)<br>(2, 1, 452) | (0, −1, −1, 225) |
| 904 | (0, 1, 0, −226)<br>(2, 0, 452) | (0, −1, 0, 226) |
| 907 | (0, 1, 1, −226); (3, 2, −3, −5)<br>(2, 1, 454); (26, 9, 38) | (0, −1, −1, 226); (3, ∓2, −3, ±5) |
| 908 | (0, 1, 0, −227); (0, 2, 1, −28)<br>(2, 0, 454); (8, 2, 114) | (0, −1, 0, 227); (0, ∓2, 1, ±28) |
| 911 | (0, 1, 1, −227)<br>(2, 1, 456) | (0, −1, −1, 227) |
| 912 | (0, 1, 0, −228); (0, 2, 2, −27)<br>(2, 0, 456); (8, 4, 116) | (0, −1, 0, 228); (0, −2, −2, 27) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 915 | (0, 1, 1, —228)<br>(2, 1, 458) | (0, —1, —1, 228) |
| 916 | (0, 1, 0, —229)<br>(2, 0, 458) | (0, —1, 0, 229) |
| 919 | (0, 1, 1, —229)<br>(2, 1, 460) | (0, —1, —1, 229) |
| 920 | (0, 1, 0, —230)<br>(2, 0, 460) | (0, —1, 0, 230) |
| 923 | (0, 1, 1, —230)<br>(2, 1, 462) | (0, —1, —1, 230) |
| 924 | (0, 1, 0, —231); (3, 3, —2, —4)<br>(2, 0, 462) (30, 6, 32) | (0, —1, 0, 231); (3, ∓3, —2, ±4) |
| 927 | (0, 1, 1, —231)<br>(2, 1, 464) | (0, —1, —1, 231) |
| 928 | (0, 1, 0, —232); (0, —2, 0, 29)<br>(2, 0, 464); (8, 0, 116) | (0, —1, 0, 232); (0, —2, 0, 29) |
| 931 | (0, 1, 1, —232); (1, —1, —6, —1); (1, 2, —3, —13); (2, —1, —5, —2)<br>(2, 1, 466); (14, [illegible], 70); (14, 7, 70); (22, 9, 46) | (0, —1, —1, 232); (1, ±1, —6, ±1); (2, ±1, —5, ±2) |
| 932 | (0, 1, 0, —233); (3, 1, —4, —2)<br>(2, 0, 466); (26, 2, 36) | (0, —1, 0, 233); (2, ∓4, —1, ±3) |
| 935 | (0, 1, 1, —233)<br>(2, 1, 468) | (0, —1, —1, 233) |
| 936 | (0, 1, 0, —234); (2, 0, —5, —4)<br>(2, 0, 468); (20, 8, 50) | (0, —1, 0, 234); (2, 0, —5, ±4) |
| 939 | (0, 1, 1, —234)<br>(2, 1, 470) | (0, —1, —1, 234) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 940 | (0, 1, 0, −235) (2, 0, 470); (0, 2, 1, −29) (8, 2, 118) | (0, −1, 0, 235); (0, ∓2, 1, ±29) |
| 943 | (0, 1, 1, −235) (2, 1, 472) | (0, −1, −1, 235) |
| 944 | (0, 1, 0, −236) (2, 0, 472); (0, 2, 2, −28) (8, 4, 120); (0, 4, 3, −2) (32, 12, 34); (2, −2, −4, 2) (24, 4, 40) | (0, −1, 0, 236); (0, −2, −2, 28); (0, ∓4, 3, ±2); (2, ∓2, −4, ±2) |
| 947 | (0, 1, 1, −236) (2, 1, 474) | (0, −1, −1, 236) |
| 948 | (0, 1, 0, −237) (2, 0, 474); (3, 2, −3, −6) (26, 12, 42) | (0, −1, 0, 237); (3, ∓2, −3, ±6) |
| 951 | (0, 1, 1, −237) (2, 1, 476) | (0, −1, −1, 237) |
| 952 | (0, 1, 0, −238) (2, 0, 476) | (0, −1, 0, 238) |
| 955 | (0, 1, 1, −238) (2, 1, 478) | (0, −1, −1, 238) |
| 956 | (0, 1, 0, −239) (2, 0, 478); (1, 4, 1, −4) (30, 8, 34) | (0, −1, 0, 239); (1, ∓4, 1, ±4) |
| 959 | (0, 1, 1, −239) (2, 1, 480); (1, −2, −4, 7) (16, 1, 60) | (0, −1, −1, 239); (1, ∓2, −4, ±7) |
| 960 | (0, 1, 0, −240) (2, 0, 480); (0, −2, 0, 30) (8, 0, 120); (0, 4, 2, −3) (32, 8, 32); (2, 4, 0, −4) (32, 8, 32); (3, −2, −4, 0) (32, 8, 32); (4, 0, −4, −2) (32, 8, 32) | (0, −1, 0, 240); (0, −2, 0, 30); (0, ∓4, 2, ±3); (2, ∓4, 0, ±4) |
| 963 | (0, 1, 1, −240) (2, 1, 482); (3, 1, −4, −3) (26, 5, 38) | (0, −1, −1, 240); (3, ∓1, −4, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 964 | (0, 1, 0, −241); (2, 0, −5, −3)<br>(2, 0, 482); (20, 6, 50) | (0, −1, 0, 241); (2, 0, −5, ±3) |
| 967 | (0, 1, 1, −241)<br>(2, 1, 484) | (0, −1, −1, 241) |
| 968 | (0, 1, 0, −242); (1, −3, −2, 6)<br>(2, 0, 484); (22, 0, 44) | (0, −1, 0, 242); (1, ∓3, −2, ±6) |
| 971 | (0, 1, 1, −242); (3, 1, −4, −5)<br>(2, 1, 486); (26, 11, 42) | (0, −1, −1, 242); (3, ∓1, −4, ±5) |
| 972 | (0, 1, 0, −243); (0, 2, 1, −30); (0, 3, 0, −9); (0, 3, 2, −8);<br>(2, 0, 486); (8, 2, 122); (18, 0, 54); (18, 6, 56);<br>(1, −1, −6, 0); (2, 3, −2, −5)<br>(14, 6, 72); (26, 4, 38) | (0, −1, 0, 243); (0, ∓2, 1, ±30); (0, −3, 0, 9);<br>(0, ∓3, 2, ±8); (0, ∓6, 1, ±1); (2, ∓3, −2, ±5) |
| 975 | (0, 1, 1, −243); (1, 3, −1, −8)<br>(2, 1, 488); (20, 5, 50) | (0, −1, −1, 243); (1, ∓3, −1, ±8) |
| 976 | (0, 1, 0, −244); (0, 2, 2, −29); (1, 4, 2, −4); (3, 1, −4, −4)<br>(2, 0, 488); (8, 4, 124); (28, 12, 40); (26, 8, 40) | (0, −1, 0, 244); (0, −2, −2, 29); (1, ∓4, 2, ±4);<br>(3, ∓1, −4, ±4) |
| 979 | (0, 1, 1, −244)<br>(2, 1, 490) | (0, −1, −1, 244) |
| 980 | (0, 1, 0, −245); (1, −2, −5, 2); (2, −2, −5, −2); (2, 4, 1, −5)<br>(2, 0, 490); (18, 8, 58); (28, 14, 42); (28, 14, 42) | (0, −1, 0, 245); (1, ∓2, −5, ±2); (2, ±2, −5, ±2) |
| 983 | (0, 1, 1, −245); (1, −3, −3, 4)<br>(2, 1, 492); (24, 5, 42) | (0, −1, −1, 245); (1, ∓3, −3, ±4) |
| 984 | (0, 1, 0, −246); (2, 0, −5, −2)<br>(2, 0, 492); (20, 4, 50) | (0, −1, 0, 246); (2, 0, −5, ±2) |
| 987 | (0, 1, 1, −246)<br>(2, 1, 494) | (0, −1, −1, 246) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 988 | (0, 1, 0, −247); (2, 0, 494); (4, 2, −3, −4) (32, 10, 34) | (0, −1, 0, 247); (4, ∓2, −3, ±4) |
| 991 | (0, 1, 1, −247) (2, 1, 496) | (0, −1, −1, 247) |
| 992 | (0, 1, 0, −248); (2, 0, 496); (0, −2, 0, 31) (8, 0, 124) | (0, −1, 0, 248); (0, −2, 0, 31) |
| 995 | (0, 1, 1, −248) (2, 1, 498) | (0, −1, −1, 248) |
| 996 | (0, 1, 0, −249); (2, 0, 498); (2, 0, −5, −1) (20, 2, 50) | (0, −1, 0, 249); (1, ∓5, 0, ±2) |
| 999 | (0, 1, 1, −249); (2, 1, 500); (0, 3, 1, −9); (18, 3, 56); (0, 3, 3, −7) (18, 9, 60) | (0, −1, −1, 249); (0, ∓3, 1, ±9); (0, −3, −3, 7) |
| 1000 | (0, 1, 0, −250); (2, 0, 500); (2, 0, −5, 0) (20, 0, 50) | (0, −1, 0, 250); (0, −5, 0, 2) |
| 1003 | (0, 1, 1, −250) (2, 1, 502) | (0, −1, −1, 250) |
| 1004 | (0, 1, 0, −251); (2, 0, 502); (0, 2, 1, −31) (8, 2, 126) | (0, −1, 0, 251); (0, ∓2, 1, ±31) |
| 1007 | (0, 1, 1, −251); (2, 1, 504); (2, −1, −5, −1) (22, 7, 48) | (0, −1, −1, 251); (1, ∓5, 1, ±2) |
| 1008 | (0, 1, 0, −252); (2, 0, 504); (0, 2, 2, −30); (8, 4, 128); (1, 4, 0, −[illegible]); (32, 4, 32); (4, 0, −4, −1) (32, 4, 32) | (0, −1, 0, 252); (0, −2, −2, 30); (1, ∓4, 0, ±4) |
| 1011 | (0, 1, 1, −252); (2, 1, 506); (1, −1, −6, 1) (14, 5, 74) | (0, −1, −1, 252); (1, ∓1, −6, ±1) |
| 1012 | (0, 1, 0, −253) (2, 0, 506) | (0, −1, 0, 253) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1015 | (0, 1, 1, −253) (2, 1, 508) | (0, −1, −1, 253) |
| 1016 | (0, 1, 0, −254) (2, 0, 508) | (0, −1, 0, 254) |
| 1019 | (0, 1, 1, −254) (2, 1, 510) | (0, −1, −1, 254) |
| 1020 | (0, 1, 0, −255); (2, 0, 510); (4, 2, −3, −5) (32, 14, 38) | (0, −1, 0, 255); (4, ∓2, −3, ±5) |
| 1023 | (0, 1, 1, −255) (2, 1, 512) | (0, −1, −1, 255) |
| 1024 | (0, 1, 0, −256); (2, 0, 152); (0, −2, 0, 32); (8, 0, 128); (0, −4, 0, 4); (32, 0, 32); (0, 4, 4, −1); (32, 16, 40); (1, −2, −4, 8); (16, 0, 64); (4, 0, −4, 0) (32, 0, 32) | (0, −1, 0, 256); (0, −2, 0, 32); (0, −4, 0, 4); (0, −4, −4, 1); (1, ∓2, −4, ±8) |
| 1027 | (0, 1, 1, −256) (2, 1, 514) | (0, −1, −1, 256) |
| 1028 | (0, 1, 0, −257) (2, 0, 514) | (0, −1, 0, 257) |
| 1031 | (0, 1, 1, −257) (2, 1, 516) | (0, −1, −1, 257) |
| 1032 | (0, 1, 0, −258) (2, 0, 516) | (0, −1, 0, 258) |
| 1035 | (0, 1, 1, −258) (2, 1, 518) | (0, −1, −1, 258) |
| 1036 | (0, 1, 0, −259); (2, 0, 518); (0, 2, 1, −32) (8, 2, 130) | (0, −1, 0, 259); (0, ∓2, 1, ±32) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 988 | (0, 1, 0, —247); (4, 2, —3, —4)<br>(2, 0, 494); (32, 10, 34) | (0, —1, 0, 247); (4, ∓2, —3, ±4) |
| 991 | (0, 1, 1, —247)<br>(2, 1, 496) | (0, —1, —1, 247) |
| 992 | (0, 1, 0, —248); (0, —2, 0, 31)<br>(2, 0, 496); (8, 0, 124) | (0, —1, 0, 248); (0, —2, 0, 31) |
| 995 | (0, 1, 1, —248)<br>(2, 1, 498) | (0, —1, —1, 248) |
| 996 | (0, 1, 0, —249); (2, 0, —5, —1)<br>(2, 0, 498); (20, 2, 50) | (0, —1, 0, 249); (1, ∓5, 0, ±2) |
| 999 | (0, 1, 1, —249); (0, 3, 1, —9); (0, 3, 3, —7)<br>(2, 1, 500); (18, 3, 56); (18, 9, 60) | (0, —1, —1, 249); (0, ∓3, 1, ±9); (0, —3, —3, 7) |
| 1000 | (0, 1, 0, —250); (2, 0, —5, 0)<br>(2, 0, 500); (20, 0, 50) | (0, —1, 0, 250); (0, —5, 0, 2) |
| 1003 | (0, 1, 1, —250)<br>(2, 1, 502) | (0, —1, —1, 250) |
| 1004 | (0, 1, 0, —251); (0, 2, 1, —31)<br>(2, 0, 502); (8, 2, 126) | (0, —1, 0, 251); (0, ∓2, 1, ±31) |
| 1007 | (0, 1, 1, —251); (2, —1, —5, —1)<br>(2, 1, 504); (22, 7, 48) | (0, —1, —1, 251); (1, ∓5, 1, ±2) |
| 1008 | (0, 1, 0, —252); (0, 2, 2, —30); (1, 4, 0, —[illegible]); (4, 0, —4, —1)<br>(2, 0, 504); (8, 4, 128); (32, 4, 32); (32, 4, 32) | (0, —1, 0, 252); (0, —2, —2, 30); (1, ∓4, 0, ±4) |
| 1011 | (0, 1, 1, —252); (1, —1, —6, 1)<br>(2, 1, 506); (14, 5, 74) | (0, —1, —1, 252); (1, ∓1, —6, ±1) |
| 1012 | (0, 1, 0, —253)<br>(2, 0, 506) | (0, —1, 0, 253) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1015 | (0, 1, 1, —253)<br>(2, 1, 508) | (0, —1, —1, 253) |
| 1016 | (0, 1, 0, —254)<br>(2, 0, 508) | (0, —1, 0, 254) |
| 1019 | (0, 1, 1, —254)<br>(2, 1, 510) | (0, —1, —1, 254) |
| 1020 | (0, 1, 0, —255); (4, 2, —3, —5)<br>(2, 0, 510); (32, 14, 38) | (0, —1, 0, 255); (4, ∓2, —3, ±5) |
| 1023 | (0, 1, 1, —255)<br>(2, 1, 512) | (0, —1, —1, 255) |
| 1024 | (0, 1, 0, —256); (0, —2, 0, 32); (0, —4, 0, 4); (0, 4, 4, —1);<br>(2, 0, 152); (8, 0, 128); (32, 0, 32); (32, 16, 40);<br>(1, —2, —4, 8); (4, 0, —4, 0)<br>(16, 0, 64); (32, 0, 32) | (0, —1, 0, 256); (0, —2, 0, 32); (0, —4, 0, 4);<br>(0, —4, —4, 1); (1, ∓2, —4, ±8) |
| 1027 | (0, 1, 1, —256)<br>(2, 1, 514) | (0, —1, —1, 256) |
| 1028 | (0, 1, 0, —257)<br>(2, 0, 514) | (0, —1, 0, 257) |
| 1031 | (0, 1, 1, —257)<br>(2, 1, 516) | (0, —1, —1, 257) |
| 1032 | (0, 1, 0, —258)<br>(2, 0, 516) | (0, —1, 0, 258) |
| 1035 | (0, 1, 1, —258)<br>(2, 1, 518) | (0, —1, —1, 258) |
| 1036 | (0, 1, 0, —259); (0, 2, 1, —32)<br>(2, 0, 518); (8, 2, 130) | (0, —1, 0, 259); (0, ∓2, 1, ±32) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1039 | (0, 1, 1, −259) (2, 1, 520) | (0, −1, −1, 259) |
| 1040 | (0, 1, 0, −260); (2, 0, 520); (0, 2, 2, −31) (8, 4, 132) | (0, −1, 0, 260); (0, −2, −2, 31) |
| 1043 | (0, 1, 1, −260) (2, 1, 522) | (0, −1, −1, 260) |
| 1044 | (0, 1, 0, −261); (2, 0, 522); (1, −3, −4, 2) (26, 10, 44) | (0, −1, 0, 261); (1, ∓3, −4, ±2) |
| 1047 | (0, 1, 1, −261) (2, 1, 524) | (0, −1, −1, 261) |
| 1048 | (0, 1, 0, −262); (2, 0, 524); (1, −1, −6, 2) (14, 4, 76) | (0, −1, 0, 262); (1, ∓1, −6, ±2) |
| 1051 | (0, 1, 1, −262) (2, 1, 526) | (0, −1, −1, 262) |
| 1052 | (0, 1, 0, −263); (2, 0, 526); (2, −2, −4, 3) (24, 2, 44) | (0, −1, 0, 263); (2, ∓2, −4, ±3) |
| 1055 | (0, 1, 1, −263); (2, 1, 528); (3, 4, 0, −5) (32, 15, 40) | (0, −1, −1, 263); (3, ∓4, 0, ±5) |
| 1056 | (0, 1, 0, −264); (2, 0, 528); (0, −2, 0, 33) (8, 0, 132) | (0, −1, 0, 264); (0, −2, 0, 33) |
| 1059 | (0, 1, 1, −264); (2, 1, 530); (3, 3, −2, −5) (30, 9, 38) | (0, −1, −1, 264); (3, ∓3, −2, ±5) |
| 1060 | (0, 1, 0, −265) (2, 0, 530) | (0, −1, 0, 265) |
| 1063 | (0, 1, 1, −265) (2, 1, 532) | (0, −1, −1, 265) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1064 | (0, 1, 0, —266)<br>(2, 0, 532) | (0, —1, 0, 266) |
| 1067 | (0, 1, 1, —266); (1, —2, —5, 3)<br>(2, 1, 534); (18, 7, 62) | (0, —1, —1, 266); (1, ∓2, —5, ±3) |
| 1068 | (0, 1, 0, —267); (0, 2, 1, —33)<br>(2, 0, 534); (8, 2, 134) | (0, —1, 0, 267); (0, ∓2, 1, ±33) |
| 1071 | (0, 1, 1, —267); (2, —3, —3, 3)<br>(2, 1, 536); (30, 3, 36) | (0, —1, —1, 267); (2, ∓3, —3, ±3) |
| 1072 | (0, 1, 0, —268); (0, 2, 2, —32); (0, 4, 1, —4)<br>(2, 0, 536); (8, 4, 136); (32, 4, 34) | (0, —1, 0, 268); (0, —2, —2, 32); (0, ∓4, 1, ±4) |
| 1075 | (0, 1, 1, —268); (2, —1, —5, 0)<br>(2, 1, 538); (22, 5, 50) | (0, —1, —1, 268); (0, ∓5, 1, ±2) |
| 1076 | (0, 1, 0, —269)<br>(2, 0, 538) | (0, —1, 0, 269) |
| 1079 | (0, 1, 1, —269)<br>(2, 1, 540) | (0, —1, —1, 269) |
| 1080 | (0, 1, 0, —270); (0, —3, 0, 10); (0, 3, 2, —9)<br>(2, 0, 540); (18, 0, 60); (18, 6, 62) | (0, —1, 0, 270); (0, —3, 0, 10); (0, ∓3, 2, ±9) |
| 1083 | (0, 1, 1, —270); (1, —1, —6, 3); (2, —3, —5, —2); (2, 5, 3, —2);<br>(2, 1, 542); (14, 3, 78); (38, 19, 38); (38, 19, 38);<br>(3, —2, —5, —3); (3, 5, 2, —3); (5, 2, —3, —5); (5, 3, —2, —5)<br>(38, 19, 38); (38, 19, 38); (38, 19, 38); (38, 19, 38) | (0, —1, —1, 270); (1, ∓1, —6, ±3); (2, ±3, —5, ±2);<br>(3, ±2, —5, ±3); (5, ∓2, —3, ±5) |
| 1084 | (0, 1, 0, —271); (1, 3, —1, —9)<br>(2, 0, 542); (20, 6, 56) | (0, —1, 0, 271); (1, ∓3, —1, ±9) |
| 1087 | (0, 1, 1, —271); (1, 2, —4, —9)<br>(2, 1, 544); (16, 1, 68) | (0, —1, —1, 271); (1, ∓2, —4, ±9) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1088 | (0, 1, 0, —272); (0, —2, 0, 34)<br>(2, 0, 544); (8, 0, 136) | (0, —1, 0, 272); (0, —2, 0, 34) |
| 1091 | (0, 1, 1, —272)<br>(2, 1, 546) | (0, —1, —1, 272) |
| 1092 | (0, 1, 0, —273)<br>(2, 0, 546) | (0, —1, 0, 273) |
| 1095 | (0, 1, 1, —273)<br>(2, 1, 548) | (0, —1, —1, 273) |
| 1096 | (0, 1, 0, —274); (4, 3, —2, —5)<br>(2, 0, 548); (34, 14, 38) | (0, —1, 0, 274); (4, ∓3, —2, ±5) |
| 1099 | (0, 1, 1, —274); (1, 3, —2, —7)<br>(2, 1, 550); (22, 1, 50) | (0, —1, —1, 274); (1, ∓3, —2, ±7) |
| 1100 | (0, 1, 0, —275); (0, 2, 1, —34)<br>(2, 0, 550); (8, 2, 138) | (0, —1, 0, 275); (0, ∓2, 1, ±34) |
| 1103 | (0, 1, 1, —275)<br>(2, 1, 552) | (0, —1, —1, 275) |
| 1104 | (0, 1, 0, —276); (0, 2, 2, —33)<br>(2, 0, 552); (8, 4, 140) | (0, —1, 0, 276); (0, —2, —2, 33) |
| 1107 | (0, 1, 1, —276); (0, 3, 1, —10); (0, 3, 3, —8)<br>(2, 1, 554); (18, 3, 62); (18, 9, 66) | (0, —1, —1, 276); (0, ∓3, 1, ±10); (0, —3, —3, 8) |
| 1108 | (0, 1, 0, —277); (2, 3, —2, —6)<br>(2, 0, 554); (26, 6, 44) | (0, —1, 0, 277); (2, ∓3, —2, ±6) |
| 1111 | (0, 1, 1, —277)<br>(2, 1, 556) | (0, —1, —1, 277) |
| 1112 | (0, 1, 0, —278)<br>(2, 0, 556) | (0, —1, 0, 278) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1115 | (0, 1, 1, −278)<br>(2, 1, 558) | (0, −1, −1, 278) |
| 1116 | (0, 1, 0, −279); (1, −1, −6, 4)<br>(2, 0, 558); (14, 2, 80) | (0, −1, 0, 279); (1, ∓1, −6, ±4) |
| 1119 | (0, 1, 1, −279)<br>(2, 1, 560) | (0, −1, −1, 279) |
| 1120 | (0, 1, 0, −280); (0, −2, 0, 35)<br>(2, 0, 560); (8, 0, 140) | (0, −1, 0, 280); (0, −2, 0, 35) |
| 1123 | (0, 1, 1, −280)<br>(2, 1, 562) | (0, −1, −1, 280) |
| 1124 | (0, 1, 0, −281)<br>(2, 0, 562) | (0, −1, 0, 281) |
| 1127 | (0, 1, 1, −281); (3, −2, −4, 1)<br>(2, 1, 564); (32, 5, 36) | (0, −1, −1, 281); (1, ∓4, −2, ±3) |
| 1128 | (0, 1, 0, −282)<br>(2, 0, 564) | (0, −1, 0, 282) |
| 1131 | (0, 1, 1, −282)<br>(2, 1, 566) | (0, −1, −1, 282) |
| 1132 | (0, 1, 0, −283); (0, 2, 1, −35)<br>(2, 0, 566); (8, 2, 142) | (0, −1, 0, 283); (0, ∓2, 1, ±35) |
| 1135 | (0, 1, 1, −283); (2, −1, −5, 1)<br>(2, 1, 568); (22, 3, 52) | (0, −1, −1, 283); (1, ∓5, −1, ±2) |
| 1136 | (0, 1, 0, −284); (0, 2, 2, −34); (1, −3, −3, 5)<br>(2, 0, 568); (8, 4, 144); (24, 4, 48) | (0, −1, 0, 284); (0, −2, −2, 34); (1, ∓3, −3, ±5) |
| 1139 | (0, 1, 1, −284)<br>(2, 1, 570) | (0, ±1, −1, 284) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1140 | (0, 1, 0, —285)<br>(2, 0, 570) | (0, —1, 0, 285) |
| 1143 | (0, 1, 1, —285)<br>(2, 1, 572) | (0, —1, —1, 285). |
| 1144 | (0, 1, 0, —286); (2, —2, —5, —1)<br>(2, 0, 572); (28, 12, 46) | (0, —1, 0, 286); (1, ∓5, 2, ±2) |
| 1147 | (0, 1, 1, —286); (1, —1, —6, 5)<br>(2, 1, 574); (14, 1, 82) | (0, —1, —1, 286); (1, ∓1, —6, ±5) |
| 1148 | (0, 1, 0, —287); (1, 2, —4, —10)<br>(2, 0, 574); (16, 2, 72) | (0, —1, 0, 287); (1, ∓2, —4, ±10) |
| 1151 | (0, 1, 1, —287)<br>(2, 1, 576) | (0, —1, —1, 287) |
| 1152 | (0, 1, 0, —288); (0, —2, 0, 36); (1, —2, —5, 4); (2, —2, —4, 4)<br>(2, 0, 576); (8, 0, 144); (18, 6, 66); (24, 0, 48) | (0, —1, 0, 288); (0, —2, 0, 36); (1, ∓2, —5, ±4);<br>(2, ∓2, —4, ±4) |
| 1155 | (0, 1, 1, —288)<br>(2, 1, 578) | (0, —1, —1, 288) |
| 1156 | (0, 1, 0, —289); (1, —4, —1, 4); (4, —1, —4, 1)<br>(2, 0, 578); (34, 0, 34); (34, 0, 34) | (0, —1, 0, 289); (1, ∓4, —1, ±4) |
| 1159 | (0, 1, 1, —289); (1, 4, 1, —5)<br>(2, 1, 580); (30, 9, 42) | (0, —1, —1, 289); (1, ∓4, 1, ±5) |
| 1160 | (0, 1, 0, —290)<br>(2, 0, 580) | (0, —1, 0, 290) |
| 1163 | (0, 1, 1, —290)<br>(2, 1, 582) | (0, —1, —1, 290) |
| 1164 | (0, 1, 0, —291); (0, 2, 1, —36)<br>(2, 0, 582); (8, 2, 146) | (0, —1, 0, 291); (0, ∓2, 1, ±36) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1167 | (0, 1, 1, −291)<br>(2, 1, 584) | (0, −1, −1, 291) |
| 1168 | (0, 1, 0, −292); (0, 2, 2, −35)<br>(2, 0, 584); (8, 4, 148) | (0, −1, 0, 292); (0, −2, −2, 35) |
| 1171 | (0, 1, 1, −292)<br>(2, 1, 586) | (0, −1, −1, 292) |
| 1172 | (0, 1, 0, −293); (4, 1, −4, −5)<br>(2, 0, 586); (34, 16, 42) | (0, −1, 0, 293); (4, ∓1, −4, ±5) |
| 1175 | (0, 1, 1, −293); (1, 4, 2, −5)<br>(2, 1, 588); (28, 13, 48) | (0, −1, −1, 293); (1, ∓4, 2, ±5) |
| 1176 | (0, 1, 0, −294); (1, −1, −6, 6); (3, 3, −2, −6)<br>(2, 0, 588); (14, 0, 84); (30, 12, 44) | (0, −1, 0, 294); (1, ∓1, −6, ±6); (3, ∓3, −2, ±6) |
| 1179 | (0, 1, 1, −294)<br>(2, 1, 590) | (0, −1, −1, 294) |
| 1180 | (0, 1, 0, −295); (2, 4, 0, −5)<br>(2, 0, 590); (32, 10, 40) | (0, −1, 0, 295); (2, ∓4, 0, ±5) |
| 1183 | (0, 1, 1, −295)<br>(2, 1, 592) | (0, −1, −1, 295) |
| 1184 | (0, 1, 0, −296); (0, −2, 0, 37)<br>(2, 0, 592); (8, 0, 148) | (0, −1, 0, 296); (0, −2, 0, 37) |
| 1187 | (0, 1, 1, −296); (2, −1, −5, 2)<br>(2, 1, 594); (22, 1, 54) | (0, −1, −1, 296); (2, ∓1, −5, ±2) |
| 1188 | (0, 1, 0, −297); (0, −3, 0, 11); (0, 3, 2, −10)<br>(2, 0, 594); (18, 0, 66); (18, 6, 68) | (0, −1, −1, 297); (0, −3, 0, 11); (0, ∓3, 2, ±10) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1191 | (0, 1, 1, −297); (1, 3, −1, −10)<br>(2, 1, 596); (20, 7, 62) | (0, −1, −1, 297); (1, ∓3, −1, ±10) |
| 1192 | (0, 1, 0, −298); (2, −3, −4, 1)<br>(2, 0, 596); (34, 10, 38) | (0, −1, 0, 298); (1, ∓4, 3, ±2) |
| 1195 | (0, 1, 1, −298)<br>(2, 1, 598) | (0, −1, −1, 298) |
| 1196 | (0, 1, 0, −299); (0, 2, 1, −37)<br>(2, 0, 598); (8, 2, 150) | (0, −1, 0, 299); (0, ∓2, 1, ±37) |
| 1199 | (0, 1, 1, −299)<br>(2, 1, 600) | (0, −1, −1, 299) |
| 1200 | (0, 1, 0, −300); (0, 2, 2, −36); (0, 4, 3, −3)<br>(2, 0, 600); (8, 4, 152); (32, 12, 42) | (0, −1, 0, 300); (0, −2, −2, 36); (0, ∓4, 3, ±3) |
| 1203 | (0, 1, 1, −300); (1, 1, −6, −7)<br>(2, 1, 602); (14, 1, 86) | (0, −1, −1, 300); (1, ∓1, −6, ±7) |
| 1204 | (0, 1, 0, −301)<br>(2, 0, 602) | (0, −1, 0, 301) |
| 1207 | (0, 1, 1, −301); (1, 2, −4, −11)<br>(2, 1, 604); (16, 3, 76) | (0, −1, −1, 301); (1, ∓2, −4, ±11) |
| 1208 | (0, 1, 0, −302); (4, 1, −4, −2)<br>(2, 0, 604); (34, 4, 36) | (0, −1, 0, 302); (2, ∓4, −1, ±4) |
| 1211 | (0, 1, 1, −302)<br>(2, 1, 606) | (0, −1, −1, 302) |
| 1212 | (0, 1, 0, −303); (3, −1, −5, −3)<br>(2, 0, 606); (32, 14, 44) | (0, −1, 0, 303); (3, ±1, −5, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1215 | (0, 1, 1, —303); (0, 3, 1, —11); (0, 3, 3, —9)<br>(2, 1, 608); (18, 3, 68); (18, 9, 72) | (0, —1, —1, 303); (0, ∓3, 1, ±11); (0, —3, —3, 9) |
| 1216 | (0, 1, 0, —304); (0, —2, 0, 38); (0, 4, 2, —4); (4, 1, —4, —4)<br>(2, 0, 608); (8, 0, 152); (32, 8, 40); (34, 12, 40) | (0, —1, 0, 304); (0, —2, 0, 38); (0, ∓4, 2, ±4);<br>(4, ∓1, —4, ±4) |
| 1219 | (0, 1, 1, —304); (1, —3, —4, 3)<br>(2, 1, 610); (26, 9, 50) | (0, —1, —1, 304); (1, ∓3, —4, ±3) |
| 1220 | (0, 1, 0, —305)<br>(2, 0, 610) | (0, —1, 0, 305) |
| 1223 | (0, 1, 1, —305)<br>(2, 1, 612) | (0, —1, —1, 305) |
| 1224 | (0, 1, 0, —306)<br>(2, 0, 612) | (0, —1, 0, 306) |
| 1227 | (0, 1, 1, —306)<br>(2, 1, 614) | (0, —1, —1, 306) |
| 1228 | (0, 1, 0, —307); (0, 2, 1, —38); (1, 1, —6, —8); (1, 3, —2, —8); (4, 1, —4, —3)<br>(2, 0, 614); (8, 2, 154); (14, 2, 88); (22, 2, 56); (34, 8, 38) | (0, —1, 0, 307); (0, ∓2, 1, ±38); (1, ∓1, —6, ±8);<br>(1, ∓3, —2, ±8); (3, ∓4, —1, ±4) |
| 1231 | (0, 1, 1, —307); (2, 1, —5, —3)<br>(2, 1, 616); (22, 1, 56) | (0, —1, —1, 307); (2, ∓1, —5, ±3) |
| 1232 | (0, 1, 0, —308); (0, 2, 2, —37)<br>(2, 0, 616); (8, 4, 156) | (0, —1, 0, 308); (0, —2, —2, 37) |
| 1235 | (0, 1, 1, —308); (1, —2, —5, 5)<br>(2, 1, 618); (18, 5, 70) | (0, —1, —1, 308); (1, ∓2, —5, ±5) |
| 1236 | (0, 1, 0, —309); (2, 3, —2, —7)<br>(2, 0, 618); (26, 8, 50) | (0, —1, 0, 309); (2, ∓3, —2, ±7) |
| 1239 | (0, 1, 1, —309)<br>(2, 1, 620) | (0, —1, —1, 309) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1240 | (0, 1, 0, —310)<br>(2, 0, 620) | (0, —1, 0, 310) |
| 1243 | (0, 1, 1, —310)<br>(2, 1, 622) | (0, —1, —1, 310) |
| 1244 | (0, 1, 0, —311); (2, 2, —4, —5)<br>(2, 0, 622); (24, 2, 52) | (0, —1, 0, 311); (2, ∓2, —4, ±5) |
| 1247 | (0, 1, 1, —311)<br>(2, 1, 624) | (0, —1, —1, 311) |
| 1248 | (0, 1, 0, —312); (0, —2, 0, 39)<br>(2, 0, 624); (8, 0, 156) | (0, —1, 0, 312); (0, —2, 0, 39) |
| 1251 | (0, 1, 1, —312); (1, 1, —6, —9)<br>(2, 1, 626); (14, 3, 90) | (0, —1, —1, 312); (1, ∓1, —6, ±9) |
| 1252 | (0, 1, 0, —313)<br>(2, 0, 626). | (0, —1, 0, 313) |
| 1255 | (0, 1, 1, —313); (1, 4, 0, —5)<br>(2, 1, 628); (32, 5, 40) | (0, —1, —1, 313); (1, ∓4, 0, ±5) |
| 1256 | (0, 1, 0, —314)<br>(2, 0, 628) | (0, —1, 0, 314) |
| 1259 | (0, 1, 1, —314); (2, —3, —3, 4)<br>(2, 1, 630); (30, 1, 42) | (0, —1, —1, 314); (2, ∓3, —3, ±4) |
| 1260 | (0, 1, 0, —315); (0, 2, 1, —39)<br>(2, 0, 630); (8, 2, 158) | (0, —1, 0, 315); (0, ∓2, 1, ±39) |
| 1263 | (0, 1, 1, —315)<br>(2, 1, 632) | (0, —1, —1, 315) |
| 1264 | (0, 1, 0, —316); (0, 2, 2, —38); (1, 2, —4, —12)<br>(2, 0, 632); (8, 4, 160); (16, 4, 80) | (0, —1, 0, 316); (0, —2, —2, 38); (1, ∓2, —4, ±12) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1267 | (0, 1, 1, —316); (2, 1, —5, —4)<br>(2, 1, 634); (22, 3, 58) | (0, —1, —1, 316); (2, ∓1, —5, ±4) |
| 1268 | (0, 1, 0, —317)<br>(2, 0, 634) | (0, —1, 0, 317) |
| 1271 | (0, 1, 1, —317)<br>(2, 1, 636) | (0, —1, —1, 317) |
| 1272 | (0, 1, 0, —318); (1, 1, —6, —10)<br>(2, 0, 636); (14, 4, 92) | (0, —1, 0, 318); (1, ∓1, —6, ±10) |
| 1275 | (0, 1, 1, —318); (3, 0, —5, —5); (3, 3, —2, —7)<br>(2, 1, 638); (30, 15, 50); (30, 15, 50) | (0, —1, —1, 318); (3, 0, —5, ±5) |
| 1276 | (0, 1, 0, —319); (3, —2, —4, 2)<br>(2, 0, 638); (32, 2, 40) | (0, —1, 0, 319); (2, ∓4, —2, ±3) |
| 1279 | (0, 1, 1, —319)<br>(2, 1, 640) | (0, —1, —1, 319) |
| 1280 | (0, 1, 0, —320); (0, —2, 0, 40); (0, —4, 0, 5); (0, 4, 4, —2)<br>(2, 0, 640); (8, 0, 160); (32, 0, 40); (32, 16, 48) | (0, —1, 0, 320); (0, —2, 0, 40); (0, —4, 0, 5;<br>(0, —4, —4, 2) |
| 1283 | (0, 1, 1, —320)<br>(2, 1, 642) | (0, —1, —1, 320) |
| 1284 | (0, 1, 0, —321)<br>(2, 0, 642) | (0, —1, 0, 321) |
| 1287 | (0, 1, 1, —321); (1, —3, —3, 6)<br>(2, 1, 644); (24, 3, 54) | (0, —1, —1, 321); (1, ∓3, —3, ±6) |
| 1288 | (0, 1, 0, —322)<br>(2, 0, 644) | (0, —1, 0, 322) |
| 1291 | (0, 1, 1, —322); (1, 1, —6, —11)<br>(2, 1, 646); (14, 5, 94) | (0, —1, —1, 322); (1, ∓1, —6, ±11) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Classen. |
|---|---|---|
| 1292 | (0, 1, 0, —323); (0, 2, 1, —40)<br>(2, 0, 646); (8, 2, 162) | (0, —1, 0, 323); (0, ∓2, 1, ±40) |
| 1295 | (0, 1, 1, —323); (2, 1, —5, —5)<br>(2, 1, 648); (22, 5, 60) | (0, —1, —1, 323); (2, ∓1, —5, ±5) |
| 1296 | (0, 1, 0, —324); (0, 2, 2, —39); (0, —3, 0, 12); (0, 3, 2, —11);<br>(2, 0, 648); (8, 4, 164); (18, 0, 72); (18, 6, 74);<br>(1, 3, —1, —11); (3, —3, —3, 3)<br>(20, 8, 68); (36, 0, 36) | (0, —1, 0, 324); (0, —2, —2, 39); (0, —3, 0, 12);<br>(0, ∓3, 2, ±11); (1, ∓3, —1, ±11); (3, —3, —3, 3) |
| 1299 | (0, 1, 1, —324)<br>(2, 1, 650) | (0, —1, —1, 324) |
| 1300 | (0, 1, 0, —325); (2, —2, —5, 0)<br>(2, 0, 650); (28, 10, 50) | (0, —1, 0, 325); (0, ∓5, 2, ±2) |
| 1303 | (0, 1, 1, —325)<br>(2, 1, 652) | (0, —1, —1, 325) |
| 1304 | (0, 1, 0, —326)<br>(2, 0, 652) | (0, —1, 0, 326) |
| 1307 | (0, 1, 1, —326)<br>(2, 1, 654) | (0, —1, —1, 326) |
| 1308 | (0, 1, 0, —327); (1, 1, —6, —2)<br>(2, 0, 654); (14, 6, 96) | (0, —1, 0, 327); (1, ∓1, —6, ±2) |
| 1311 | (0, 1, 1, —327)<br>(2, 1, 656) | (0, —1, —1, 327) |
| 1312 | (0, 1, 0, —328); (0, —2, 0, 41)<br>(2, 0, 656); (8, 0, 164) | (0, —1, 0, 328); (0, —2, 0, 41) |
| 1315 | (0, 1, 1, —328); (2, 1, —5, —6)<br>(2, 1, 658) (22, 7, 62) | (0, —1, —1, 328); (2, ∓1, —5, ±6) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1316 | (0, 1, 0, −329); (1, −2, −5, 6)<br>(2, 0, 658); (18, 4, 74) | (0, −1, 0, 329); (1, ∓2, −5, ±6) |
| 1319 | (0, 1, 1, −329); (1, 2, −4, −13)<br>(2, 1, 660); (16, 5, 84) | (0, −1, −1, 329); (1, ∓2, −4, ±13) |
| 1320 | (0, 1, 0, −330)<br>(2, 0, 660) | (0, −1, 0, 330) |
| 1323 | (0, 1, 1, −330); (0, 3, 1, −12); (0, 3, 3, −10); (1, 0, −7, −7);<br>(2, 1, 662); (18, 3, 74); (18, 4, 78); (14, 7, 98);<br>(1, 1, −6, −13); (1, −4, −5, −1); (1, 5, 4, −1); (4, −1, −5, −4);<br>(14, 7, 98); (42, 21, 42); (42, 21, 42); (42, 21, 42);<br>(4, 5, 1, −4); (5, 1, −4, −5); (5, 4, −1, −5)<br>(42, 21, 42); (42, 21, 42); (42, 21, 42) | (0, −1, −1, 330); (0, ∓3, 1, ±12); (0, −3, −3, 10);<br>(1, 0, −7, ±7); (1, ±4, −5, ±1); (4, ±1, −5, ±4);<br>(5, ∓1, −4, ±5) |
| 1324 | (0, 1, 0, −331); (0, 2, 1, −41)<br>(2, 0, 662); (8, 2, 166) | (0, −1, 0, 331); (0, ∓2, 1, ±41) |
| 1327 | (0, 1, 1, −331); (2, 1, −5, −7)<br>(2, 1, 664); (22, 9, 64) | (0, −1, −1, 331); (2, ∓1, −5, ±7) |
| 1328 | (0, 1, 0, −332); (0, 2, 2, −40); (0, 4, 1, −5); (2, 2, −4, −6)<br>(2, 0, 664); (8, 4, 168); (32, 4, 42); (24, 4, 56) | (0, −1, 0, 332); (0, −2, −2, 40); (0, ∓4, 1, ±5);<br>(2, ∓2, −4, ±6) |
| 1331 | (0, 1, 1, −332); (2, 1, −5, −8)<br>(2, 1, 666); (22, 11, 66) | (0, −1, −1, 332); (2, −1, −5, 8) |
| 1332 | (0, 1, 0, −333)<br>(2, 0, 666) | (0, −1, 0, 333) |
| 1335 | (0, 1, 1, −333)<br>(2, 1, 668) | (0, −1, −1, 333) |
| 1336 | (0, 1, 0, −334); (1, 0, −7, −6)<br>(2, 0, 668); (14, 6, 98) | (0, −1, 0, 334); (1, 0, −7, ±6) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1339 | (0, 1, 1, −334)<br>(2, 1, 670) | (0, −1, −1, 334) |
| 1340 | (0, 1, 0, −335); (3, −2, −5, −2)<br>(2, 0, 670); (38, 16, 42) | (0, −1, 0, 335); (2, ∓5, 2, ±3) |
| 1343 | (0, 1, 1, −335)<br>(2, 1, 672) | (0, −1, −1, 335) |
| 1344 | (0, 1, 0, −336); (0, −2, 0, 42)<br>(2, 0, 672); (8, 0, 168) | (0, −1, 0, 336); (0, −2, 0, 42) |
| 1347 | (0, 1, 1, −336); (1, 0, −7, −5)<br>(2, 1, 674); (14, 5, 98) | (0, −1, −1, 336); (1, 0, −7, ±5) |
| 1348 | (0, 1, 0, −337)<br>(2, 0, 674) | (0, −1, 0, 337) |
| 1351 | (0, 1, 1, −337); (3, −1, −5, −2)<br>(2, 1, 676); (32, 11, 46) | (0, −1, −1, 337); (2, ∓5, 1, ±3) |
| 1352 | (0, 1, 0, −338)<br>(2, 0, 676) | (0, −1, 0, 338) |
| 1355 | (0, 1, 1, −338); (1, 3, −2, −9)<br>(2, 1, 678); (22, 3, 62) | (0, −1, −1, 338); (1, ∓3, −2, ±9) |
| 1356 | (0, 1, 0, −339); (0, 2, 1, −42); (1, 0, −7, −4); (2, 3, −2, −8); (3, 0, −5, −4)<br>(2, 0, 678); (8, 2, 170); (14, 4, 98); (26, 10, 56); (30, 12, 50) | (0, −1, 0, 339); (0, ∓2, 1, ±42); (1, 0, −7, ±4);<br>(2, ∓3, −2, ±8); (3, 0, −5, ±4) |
| 1359 | (0, 1, 1, −339)<br>(2, 1, 680) | (0, −1, −1, 339) |
| 1360 | (0, 1, 0, −340); (0, 2, 2, −41)<br>(2, 0, 680); (8, 4, 172) | (0, −1, 0, 340); (0, −2, −2, 41) |
| 1363 | (0, 1, 1, −340); (1, 0, −7, −3)<br>(2, 1, 682); (14, 3, 98) | (0, −1, −1, 340); (1, 0, −7, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1364 | (0, 1, 0, —341)<br>(2, 0, 682) | (0, —1, 0, 341) |
| 1367 | (0, 1, 1, —341)<br>(2, 1, 684) | (0, —1, —1, 341) |
| 1368 | (0, 1, 0, —342); (1, 0, —7, —2)<br>(2, 0, 684); (14, 2, 98) | (0, —1, 0, 342); (1, 0, —7, ±2) |
| 1371 | (0, 1, 1, —342); (1, 0, —7, —1)<br>(2, 1, 686); (14, 1, 98) | (0, —1, —1, 342); (1, 0, —7, ±1) |
| 1372 | (0, 1, 0, —343); (1, 0, —7, 0); (1, 2, —4, —14); (1, —3, —5, 1); (1, 4, 2, —6)<br>(2, 0, 686); (14, 0, 98); (16, 6, 88); (28, 14, 56); (28, 14, 56) | (0, —1, 0, 343); (0, —7, 0, 1); (1, ∓2, —4, ±14);<br>(1, ∓3, —5, ±1) |
| 3175 | (0, 1, 1, —343)<br>(2, 1, 688) | (0, —1, —1, 343) |
| 1376 | (0, 1, 0, —344); (0, —2, 0, 43)<br>(2, 0, 688); (8, 0, 172) | (0, —1, 0, 344); (0, —2, 0, 43) |
| 1379 | (0, 1, 1, —344)<br>(2, 1, 690) | (0, —1, —1, 344) |
| 1380 | (0, 1, 0, —345)<br>(2, 0, 690) | (0, —1, 0, 345) |
| 1383 | (0, 1, 1, —345); (2, —3, —5, —1)<br>(2, 1, 692); (38, 17, 44) | (0, —1, —1, 345); (1, ∓5, 3, ±2) |
| 1384 | (0, 1, 0, —346)<br>(2, 0, 692) | (0, —1, 0, 346) |
| 1387 | (0, 1, 1, —346)<br>(2, 1, 694) | (0, —1, —1, 346) |
| 1388 | (0, 1, 0, —347); (0, 2, 1, —43)<br>(2, 0, 694); (8, 2, 174) | (0, —1, 0, 347); (0, ∓2, 1, ±43) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1391 | (0, 1, 1, −347)<br>(2, 1, 696) | (0, −1, −1, 347) |
| 1392 | (0, 1, 0, −348); (0, 2, 2, −42); (1, −3, −4, 4); (2, 4, 0, −6)<br>(2, 0, 696); (8, 4, 176); (26, 8, 56); (32, 12, 48) | (0, −1, 0, 348); (0, −2, −2, 42); (1, ∓3, −4, ±4);<br>(2, ∓4, 0, ±6) |
| 1395 | (0, 1, 1, −348); (1, −2, −5, 7)<br>(2, 1, 698); (18, 3, 78) | (0, −1, −1, 348); (1, ∓2, −5, ±7) |
| 1396 | (0, 1, 0, −349)<br>(2, 0, 698) | (0, −1, 0, 349) |
| 1399 | (0, 1, 1, −349); (1, 3, −1, −12)<br>(2, 1, 700); (20, 9, 74) | (0, −1, −1, 349); (1, ∓3, −1, ±12) |
| 1400 | (0, 1, 0, −350); (1, 4, 1, −6)<br>(2, 0, 700); (30, 10, 50) | (0, −1, 0, 350); (1, ∓4, 1, ±6) |
| 1403 | (0, 1, 1, −350)<br>(2, 1, 702) | (0, −1, −1, 350) |
| 1404 | (0, 1, 0, −351); (0, −3, 0, 13); (0, 3, 2, −12); (2, 2, −4, −7)<br>(2, 0, 702); (18, 0, 78); (18, 6, 80); (24, 6, 60) | (0, −1, 0, 351); (0, −3, 0, 13); (0, ∓3, 2, ±12);<br>(2, ∓2, −4, ±7) |
| 1407 | (0, 1, 1, −351); (3, 2, −4, −3)<br>(2, 1, 704); (32, 1, 44) | (0, −1, −1, 351); (3, ∓2, −4, ±3) |
| 1408 | (0, 1, 0, −352); (0, −2, 0, 44)<br>(2, 0, 704); (8, 0, 176) | (0, −1, 0, 352); (0, −2, 0, 44) |
| 1411 | (0, 1, 1, −352)<br>(2, 1, 706) | (0, −1, −1, 352) |
| 1412 | (0, 1, 0, −353)<br>(2, 0, 706) | (0, −1, 0, 353) |
| 1415 | (0, 1, 1, −353)<br>(2, 1, 708) | (0, −1, −1, 353) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1416 | (0, 1, 0, —354)<br>(2, 0, 708) | (0, —1, 0, 354) |
| 1419 | (0, 1, 1, —354); (3, 0, —5, —3)<br>(2, 1, 710); (30, 9, 50) | (0, —1, —1, 354); (3, 0, —5, ±3) |
| 1420 | (0, 1, 0, —355); (0, 2, 1, —44)<br>(2, 0, 710); (8, 2, 178) | (0, —1, 0, 355); (0, ∓2, 1, ±44) |
| 1423 | (0, 1, 1, —355); (1, 2, —4, —15)<br>(2, 1, 712); (16, 7, 92) | (0, —1, —1, 355); (1, ∓2, —4, ±15) |
| 1424 | (0, 1, 0, —356); (0, 2, 2, —43); (1, —4, —2, 4); (4, 4, —1, —5)<br>(2, 0, 712); (8, 4, 180); (36, 4, 40); (40, 16, 42) | (0, —1, 0, 356); (0, —2, —2, 43); (1, ∓4, —2, ±4);<br>(4, ∓4, —1, ±5) |
| 1427 | (0, 1, 1, —356); (1, 4, —1, —5)<br>(2, 1, 714); (34, 1, 42) | (0, —1, —1, 356); (1, ∓4, —1, ±5) |
| 1428 | (0, 1, 0, —357)<br>(2, 0, 714) | (0, —1, 0, 357) |
| 1431 | (0, 1, 1, —357); (0, 3, 1, —13); (0, 3, 3, —11)<br>(2, 1, 716); (18, 3, 80); (18, 9, 84) | (0, —1, —1, 357); (0, ∓3, 1, ±13); (0, —3, —3, 11) |
| 1432 | (0, 1, 0, —358); (2, —3, —4, 2)<br>(2, 0, 716); (34, 8, 44) | (0, —1, 0, 358); (2, ∓3, —4, ±2) |
| 1435 | (0, 1, 1, —358)<br>(2, 1, 718) | (0, —1, —1, 358) |
| 1436 | (0, 1, 0, —359); (2, —3, —3, 7)<br>(2, 0, 718); (24, 2, 60) | (0, —1, 0, 359); (1, ∓3, —3, ±7) |
| 1439 | (0, 1, 1, —359); (2, 3, —3, —5)<br>(2, 1, 720); (30, 1, 48) | (0, —1, —1, 359); (2, ∓3, —3, ±5) |
| 1440 | (0, 1, 0, —360); (0, —2, 0, 45)<br>(2, 0, 720); (8, 0, 180) | (0, —1, 0, 360); (0, —2, 0, 45) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1443 | (0, 1, 1, —360)<br>(2, 1, 722) | (0, —1, —1, 360) |
| 1444 | (0, 1, 0, —361)<br>(2, 0, 722) | (0, —1, 0, 361) |
| 1447 | (0, 1, 1, —361)<br>(2, 1, 724) | (0, —1, —1, 361) |
| 1448 | (0, 1, 0, —362); (2, —2, —5, 1)<br>(2, 0, 724); (28, 8, 54) | (0, —1, 0, 362); (2, ∓2, —5, ±1) |
| 1451 | (0, 1, 1, —362)<br>(2, 1, 726) | (0, —1, —1, 362) |
| 1452 | (0, 1, 0, —363); (0, 2, 1, —45)<br>(2, 0, 726); (8, 2, 182) | (0, —1, 0, 363); (0, ∓2, 1, ±45) |
| 1455 | (0, 1, 1, —363)<br>(2, 1, 728) | (0, —1, —1, 363) |
| 1456 | (0, 1, 0, —364); (0, 2, 2, —44); (0, 4, 3, —4)<br>(2, 0, 728); (8, 4, 184); (32, 12, 50) | (0, —1, 0, 364); (0, —2, —2, 44); (0, ∓4, 3, ±4) |
| 1459 | (0, 1, 1, —364)<br>(2, 1, 730) | (0, —1, —1, 364) |
| 1460 | (0, 1, 0, —365)<br>(2, 0, 730) | (0, —1, 0, 365) |
| 1463 | (0, 1, 1, —365)<br>(2, 1, 732) | (0, —1, —1, 365) |
| 1464 | (0, 1, 0, —366); (3, 0, —5, —2)<br>(2, 0, 732); (30, 6, 50) | (0, —1, 0, 366); (2, ∓5, 0, ±3) |
| 1467 | (0, 1, 1, —366)<br>(2, 1, 734) | (0, —1, —1, 366) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1468 | (0, 1, 0, —367); (2, 3, —2, —9)<br>(2, 0, 734); (26, 12, 62) | (0, —1, 0, 367); (2, ∓3, —2, ±9) |
| 1471 | (0, 1, 1, —367)<br>(2, 1, 736) | (0, —1, —1, 367) |
| 1472 | (0, 1, 0, —368); (0, —2, 0, 46); (0, 4, 2, —5); (1, —1, —7, —1);<br>(2, 0, 736); (8, 0, 184); (32, 8, 48); (16, 8, 96);<br>(1, 2, —4, —16); (1, —2, —5, 8); (2, 2, —4, —8); (3, —1, —8, —1)<br>(16, 8, 96); (18, 2, 82); (24, 8, 64); (32, 8, 48) | (0, —1, 0, 368); (0, —2, 0, 46); (0, ∓4, 2, ±5);<br>(1, ±1, —7, ±1); (1, ∓2, —5, ±8); (2, ∓2, —4, ±8);<br>(1, ∓5, 1, ±3) |
| 1475 | (0, 1, 1, —368); (3, 4, —1, —5)<br>(2, 1, 738); (38, 11, 42) | (0, —1, —1, 368); (3, ∓4, —1, ±5) |
| 1476 | (0, 1, 0, —369); (2, 4, —1, —5)<br>(2, 0, 738); (36, 6, 42) | (0, —1, 0, 369); (2, ∓4, —1, ±5) |
| 1479 | (0, 1, 1, —369)<br>(2, 1, 740) | (0, —1, —1, 369) |
| 1480 | (0, 1, 0, —370); (1, 3, —2, —10)<br>(2, 0, 740); (22, 4, 68) | (0, —1, 0, 370); (1, ∓3, —2, ±10) |
| 1483 | (0, 1, 1, —370)<br>(2, 1, 742) | (0, —1, —1, 370) |
| 1484 | (0, 1, 0, —371); (0, 2, 1, —46)<br>(2, 0, 742); (8, 2, 186) | (0, —1, 0, 371); (0, ∓2, 1, ±46) |
| 1487 | (0, 1, 1, —371)<br>(2, 1, 744) | (0, —1, —1, 371) |
| 1488 | (0, 1, 0, —372); (0, 2, 2, —45)<br>(2, 0, 744); (8, 4, 188) | (0, —1, 0, 372); (0, —2, —2, 45) |
| 1491 | (0, 1, 1, —372); (3, 0, —5, —1)<br>(2, 1, 746); (30, 3, 50) | (0, —1, —1, 372); (1, ∓5, 0, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1492 | (0, 1, 0, —373)<br>(2, 0, 746) | (0, —1, 0, 373) |
| 1495 | (0, 1, 1, —373)<br>(2, 1, 748) | (0, —1, —1, 373) |
| 1496 | (0, 1, 0, —374)<br>(2, 0, 748) | (0, —1, 0, 374) |
| 1499 | (0, 1, 1, —374)<br>(2, 1, 750) | (0, —1, —1, 374) |
| 1500 | (0, 1, 0, —375); (1, —2, —6, 2); (1, 3, —1, —13); (1, 4, 0, —6); (3, 0, —5, 0)<br>(2, 0, 750); (20, 10, 80); (20, 10, 80); (32, 6, 48); (30, 0, 50) | (0, —1, 0, 375); (1, ∓2, —6, ±2); (1, ∓4, 0, ±6);<br>(0, —5, 0, 3) |
| 1503 | (0, 1, 1, —375); (3, 3, —3, —4)<br>(2, 1, 752); (36, 3, 42) | (0, —1, —1, 375); (3, ∓3, —3, ±4) |
| 1504 | (0, 1, 0, —376); (0, —2, 0, 47)<br>(2, 0, 752); (8, 0, 188) | (0, —1, 0, 376); (0, —2, 0, 47) |
| 1507 | (0, 1, 1, —376)<br>(2, 1, 754) | (0, —1, —1, 376) |
| 1508 | (0, 1, 0, —377)<br>(2, 0, 754) | (0, —1, 0, 377) |
| 1511 | (0, 1, 1, —377)<br>(2, 1, 756) | (0, —1, —1, 377) |
| 1512 | (0, 1, 0, —378); (0, —3, 0, 14); (0, 3, 2, —13)<br>(2, 0, 756); (18, 0, 84); (18, 6, 86) | (0, —1, 0, 378); (0, —3, 0, 14); (0, ∓3, 2, ±13) |
| 1515 | (0, 1, 1, —378)<br>(2, 1, 758) | (0, —1, —1, 378) |
| 1516 | (0, 1, 0, —379); (0, 2, 1, —47)<br>(2, 0, 758); (8, 2, 190) | (0, —1, 0, 379); (0, ∓2, 1, ±47) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1519 | (0, 1, 1, —379); (1, 1, —7, 0); (1, —4, —3, 3)<br>(2, 1, 760); (16, 7, 98); (38, 9, 42) | (0, −1, −1, 379); (0, ∓7, −1, ±1); (1, ∓4, −3, ±3) |
| 1520 | (0, 1, 0, —380); (0, 2, 2, —46); (3, 2, —4, —4)<br>(2, 0, 760); (8, 4, 192); (32, 4, 48) | (0, −1, 0, 380); (0, −2, −2, 46); (3, ∓2, −4, ±4) |
| 1523 | (0, 1, 1, —380)<br>(2, 1, 762) | (0, —1, —1, 380) |
| 1524 | (0, 1, 0, —381)<br>(2, 0, 762) | (0, —1, 0, 381) |
| 1527 | (0, 1, 1, —381)<br>(2, 1, 764) | (0, —1, —1, 381) |
| 1528 | (0, 1, 0, —382)<br>(2, 0, 764) | (0, —1, 0, 382) |
| 1531 | (0, 1, 1, —382)<br>(2, 1, 766) | (0, —1, —1, 382) |
| 1532 | (0, 1, 0, —383); (2, 2, —4, —9)<br>(2, 0, 766); (24, 10, 68) | (0, —1, 0, 383); (2, ∓2, —4, ±9) |
| 1535 | (0, 1, 1, —383)<br>(2, 1, 768) | (0, —1, —1, 383) |
| 1536 | (0, 1, 0, —384); (0, 2, 0, 48); (0, —4, 0, 6); (0, 4, 4, —3)<br>(2, 0, 768); (8, 0, 192); (32, 0, 48); (32, 16, 56) | (0, —1, 0, 384); (0, —2, 0, 48); (0, —4, 0, 6);<br>(0, ∓4, 4, ±3) |
| 1539 | (0, 1, 1, —384); (0, 3, 1, —14); (0, 3, 3, —12)<br>(2, 1, 770); (18, 3, 86); (18, 9, 90) | (0, −1, −1, 384); (0, ∓3, 1, ±14); (0, −3, −3, 12) |
| 1540 | (0, 1, 0, —385)<br>(2, 0, 770) | (0, —1, 0, 385) |
| 1543 | (0, 1, 1, —385)<br>(2, 1, 772) | (0, —1, —1, 385) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1544 | (0, 1, 0, −386)<br>(2, 0, 772) | (0, −1, 0, 386) |
| 1547 | (0, 1, 1, −386); (1, −2, −5, 9)<br>(2, 1, 774); (18, 1, 86) | (0, −1, −1, 386); (1, ∓2, −5, ±9) |
| 1548 | (0, 1, 0, −387); (0, 2, 1, −48)<br>(2, 0, 774); (8, 2, 194) | (0, −1, 0, 387); (0, ∓2, 1, ±48) |
| 1551 | (0, 1, 1, −387)<br>(2, 1, 776) | (0, −1, −1, 387) |
| 1552 | (0, 1, 0, −388); (0, 2, 2, −47)<br>(2, 0, 776); (8, 4, 196) | (0, −1, 0, 388); (0, −2, −2, 47) |
| 1555 | (0, 1, 1, −388)<br>(2, 1, 778) | (0, −1, −1, 388) |
| 1556 | (0, 1, 0, −389)<br>(2, 0, 778) | (0, −1, 0, 389) |
| 1559 | (0, 1, 1, −389); (4, −1, −5, −3)<br>(2, 1, 780); (42, 17, 44) | (0, −1, −1, 389); (3, ∓5, 1, ±4) |
| 1560 | (0, 1, 0, −390)<br>(2, 0, 780) | (0, −1, 0, 390) |
| 1563 | (0, 1, 1, −390); (1, −3, −4, 5)<br>(2, 1, 782); (26, 7, 62) | (0, −1, −1, 390); (1, ∓3, −4, ±5) |
| 1564 | (0, 1, 0, −391); (1, −1, −7, 1)<br>(2, 0, 782); (16, 6, 100) | (0, −1, 0, 391); (1, ∓1, −7, ±1) |
| 1567 | (0, 1, 1, −391); (1, −3, −5, 2)<br>(2, 1, 784); (28, 13, 62) | (0, −1, −1, 391); (1, ∓1, −7, ±1) |
| 1568 | (0, 1, 0, −392); (0, −2, 0, 49)<br>(2, 0, 784); (8, 0, 196) | (0, −1, 0, 392); (0, −2, 0, 49) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1571 | (0, 1, 1, —392)<br>(2, 1, 786) | (0, —1, —1, 392) |
| 1572 | (0, 1, 0, —393); (2, —1, —6, —3)<br>(2, 0, 786); (26, 12, 66) | (0, —1, 0, 393); (2, ±1, —6, ±3) |
| 1575 | (0, 1, 1, —393); (3, —1, —5, 0)<br>(2, 1, 788); (32, 5, 50) | (0, —1, —1, 393); (0, ∓5, 1, ±3) |
| 1576 | (0, 1, 0, —394)<br>(2, 0, 788) | (0, —1, 0, 394) |
| 1579 | (0, 1, 1, —394); (3, —2, —5, —1)<br>(2, 1, 790); (38, 13, 46) | (0, —1, —1, 394); (1, ∓5, 2, ±3) |
| 1580 | (0, 1, 0, —395); (0, 2, 1, —49)<br>(2, 0, 790); (8, 2, 198) | (0, —1, 0, 395); (0, ∓2, 1, ±49) |
| 1583 | (0, 1, 1, —395); (1, —3, —3, 8)<br>(2, 1, 792); (24, 1, 66) | (0, —1, —1, 395); (1, ∓3, —3, ±8) |
| 1584 | (0, 1, 0, —396); (0, 2, 2, —48); (0, 4, 1, —6); (2, 0, —6, —6); (2, 2, —4, —10)<br>(2, 0, 792); (8, 4, 200); (32, 4, 50); (24, 12, 72); (24, 12, 72) | (0, —1, 0, 396); (0, —2, —2, 48); (0, ∓4, 1, ±6);<br>(2, 0, —6, ±6) |
| 1587 | (0, 1, 1, —396)<br>(2, 1, 794) | (0, —1, —1, 396) |
| 1588 | (0, 1, 0, —397); (2, —2, —5, 2)<br>(2, 0, 794); (28, 6, 58) | (0, —1, 0, 397); (2, ∓2, —5, ±2) |
| 1591 | (0, 1, 1, —397)<br>(2, 1, 796) | (0, —1, —1, 397) |
| 1592 | (0, 1, 0, —398)<br>(2, 0, 796) | (0, —1, 0, 398) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1595 | (0, 1, 1, —398)<br>(2, 1, 798) | (0, —1, —1, 398) |
| 1596 | (0, 1, 0, —399); (2, 4, 0, —7)<br>(2, 0, 798); (32, 14, 56) | (0, —1, 0, 399); (2, ∓4, 0, ±7) |
| 1599 | (0, 1, 1, —399); (1, —2, —6, 3)<br>(2, 1, 800); (20, 9, 84) | (0, —1, —1, 399); (1, ∓2, —6, ±3) |
| 1600 | (0, 1, 0, —400); (0, —2, 0, 50); (2, —4, —2, 4); (4, 0, —5, —5);<br>(2, 0, 800); (8, 0, 200); (40, 0, 40); (40, 20, 40);<br>(4, —2, —4, 2); (4, 4, —1, —6)<br>(40, 0, 40); (40, 20, 50) | (0, —1, 0, 400); (0, —2, 0, 50); (2, ∓4, —2, ±4);<br>(4, 0, —5, ±5) |
| 1603 | (0, 1, 1, —400); (1, 3, —2, —11)<br>(2, 1, 802); (22, 5, 74) | (0, —1, —1, 400); (1, ∓3, —2, ±11) |
| 1604 | (0, 1, 0, —401)<br>(2, 0, 802) | (0, —1, 0, 401) |
| 1607 | (0, 1, 1, —401); (1, —1, —7, 2)<br>(2, 1, 804); (16, 5, 102) | (0, —1, —1, 401); (1, ∓1, —7, ±2) |
| 1608 | (0, 1, 0, —402)<br>(2, 0, 804) | (0, —1, 0, 402) |
| 1611 | (0, 1, 1, —402); (2, 3, —3, —6)<br>(2, 1, 806); (30, 3, 54) | (0, —1, —1, 402); (2, ∓3, —3, ±6) |
| 1612 | (0, 1, 0, —403); (0, 2, 1, —50)<br>(2, 0, 806); (8, 2, 202) | (0, —1, 0, 403); (0, ∓2, 1, ±50) |
| 1615 | (0, 1, 1, —403); (3, 2, —4, —5)<br>(2, 1, 808); (32, 7, 52) | (0, —1, —1, 403); (3, ∓2, —4, ±5) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1616 | (0, 1, 0, —404); (0, 2, 2, —49)<br>(2, 0, 808); (8, 4, 204) | (0, —1, 0, 404); (0, —2, —2, 49) |
| 1619 | (0, 1, 1, —404); (1, 4, 1, —7)<br>(2, 1, 810); (30, 11, 58) | (0, —1, —1, 404); (1, ∓4, 1, ±7) |
| 1620 | (0, 1, 0, —405); (0, —3, 0, 15); (0, 3, 2, —14); (1, —2, —5, 10)<br>(2, 0, 810); (18, 0, 90); (18, 6, 92); (18, 0, 90) | (0, —1, 0, 405); (0, —3, 0, 15); (0, ∓3, 2, ±14);<br>(1, ∓2, —5, ±10) |
| 1623 | (0, 1, 1, —405)<br>(2, 1, 812) | (0, —1, —1, 405) |
| 1624 | (0, 1, 0, —406)<br>(2, 0, 812) | (0, —1, 0, 406) |
| 1627 | (0, 1, 1, —406)<br>(2, 1, 814) | (0, —1, —1, 406) |
| 1628 | (0, 1, 0, —407); (2, 0, —6, —5)<br>(2, 0, 814); (24, 10, 22) | (0, —1, 0, 407); (2, 0, —6, ±5) |
| 1631 | (0, 1, 1, —407)<br>(2, 1, 816) | (0, —1, —1, 407) |
| 1632 | (0, 1, 0, —408); (0, —2, 0, 51)<br>(2, 0, 816); (8, 0, 204) | (0, —1, 0, 408); (0, —2, 0, 51) |
| 1635 | (0, 1, 1, —408)<br>(2, 1, 818) | (0, —1, —1, 408) |
| 1636 | (0, 1, 0, —409)<br>(2, 0, 818) | (0, —1, 0, 409) |
| 1639 | (0, 1, 1, —409)<br>(2, 1, 820) | (0, —1, —1, 409) |
| 1640 | (0, 1, 0, —410)<br>(2, 0, 820) | (0, —1, 0, 410) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1643 | (0, 1, 1, −410)<br>(2, 1, 822) | (0, −1, −1, 410) |
| 1644 | (0, 1, 0, −411); (0, 2, 1, −51)<br>(2, 0, 822); (8, 2, 206) | (0, −1, 0, 411); (0, ∓2, 1, ±51) |
| 1647 | (0, 1, 1, −411); (0, 3, 1, −15); (0, 3, 3, −13)<br>(2. 1, 824); (18, 3, 92); (18, 9, 96) | (0, −1, −1, 411); (0, ∓3, 1, ±15); (0, −3, −3, 13) |
| 1648 | (0, 1, 0, −412); (0, 2, 2, −50); (1, −1, −7, 3)<br>(2, 0, 824); (8, 4, 208); (16, 4, 104) | (0, −1, 0, 412); (0, −2, −2, 50); (1, ∓1, −7, ±3) |
| 1651 | (0, 1, 1, −412)<br>(2, 1, 826) | (0, −1, −1, 412) |
| 1652 | (0, 1, 0, −413)<br>(2, 0, 826) | (0, −1, 0, 413) |
| 1655 | (0, 1, 1, −413)<br>(2, 1, 828) | (0, −1, −1, 413) |
| 1656 | (0, 1, 0, −414)<br>(2, 0, 828) | (0, −1, 0, 414) |
| 1659 | (0, 1, 1, −414)<br>(2, 1, 830) | (0, −1, −1, 414) |
| 1660 | (0, 1, 0, −415); (3, −1, −5, 1)<br>(2, 0, 830); (32, 2, 52) | (0, −1, 0, 415); (1, ∓5, −1, ±3) |
| 1663 | (0, 1, 1, −415)<br>(2, 1, 832) | (0, −1, −1, 415) |
| 1664 | (0, 1, 0, −416); (0, −2, 0, 52); (2, 0, −6, −4); (2, −3, −4, 3)<br>(2, 0, 832); (8, 0, 208); (24, 8, 72); (34, 6, 50) | (0, −1, 0, 416); (0, −2, 0, 52); (2, 0, −6, ±4); (2, ∓3, −4, ±3) |
| 1667 | (0, 1, 1, −416)<br>(2, 1, 834) | (0, −1, −1, 416) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1668 | (0, 1, 0, —417); (2, —1, —6, —2)<br>(2, 0, 834); (26, 0, 68) | (0, —1, 0, 417); (2, ±1, —6, ±2) |
| 1671 | (0, 1, 1, —417)<br>(2, 1, 836) | (0, —1, —1, 417) |
| 1672 | (0, 1, 0, —418)<br>(2, 0, 836) | (0, —1, 0, 418) |
| 1675 | (0, 1, 1, —418); (2, —3, —5, 0)<br>(2, 1, 838); (38, 15, 50) | (0, —1, —1, 418); (0, ∓5, 3, ±2) |
| 1676 | (0, 1, 0, —419); (0, 2, 1, —52)<br>(2, 0, 838); (8, 2, 210) | (0, —1, 0, 419); (0, ∓2, 1, ±52) |
| 1679 | (0, 1, 1, —419)<br>(2, 1, 840) | (0, —1, —1, 419) |
| 1680 | (0, 1, 0, —420); (0, 2, 2, —51)<br>(2, 0, 840); (8, 4, 212) | (0, —1, 0, 420); (0, —2, —2, 51) |
| 1683 | (0, 1, 1, —420)<br>(2, 1, 842) | (0, —1, —1, 420) |
| 1684 | (0, 1, 0, —421)<br>(2, 0, 842) | (0, —1, 0, 421) |
| 1687 | (0, 1, 1, —421); (1, —1, —7, 4)<br>(2, 1, 844); (16, 3, 106) | (0, —1, —1, 421); (1, ∓1, —7, ±4) |
| 1688 | (0, 1, 0, —422)<br>(2, 0, 844) | (0, —1, 0, 422) |
| 1691 | (0, 1, 1, —422); (1, 2, —5, —11)<br>(2, 1, 846); (18, 1, 94) | (0, —1, —1, 422); (1, ∓2, —5, ±11) |
| 1692 | (0, 1, 0, —423); (2, 0, —6, —3); (2, 5, 2, —4); (3, 2, —4, —6); (3, 3, —3, —5)<br>(2, 0, 846); (24, 6, 72); (42, 18, 48); (32, 10, 56); (36, 6, 48) | (0, —1, 0, 423); (2, 0, —6, ±3); (2, ∓5, 2, ±4);<br>(3, ∓2, —4, ±6); (3, ∓3, —3, ±5) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1695 | (0, 1, 1, −423)<br>(2, 1, 848) | (0, −1, −1, 423) |
| 1696 | (0, 1, 0, −424); (0, −2, 0, 53); (1, −2, −6, 4); (1, 4, −1, −6)<br>(2, 0, 848); (8, 0, 212); (20, 8, 88); (34, 2, 50); | (0, −1, 0, 424); (0, −2, 0, 53); (1, ∓2, −6, ±4);<br>(1, ∓4, −1, ±6) |
| 1699 | (0, 1, 1, −424)<br>(2, 1, 850) | (0, −1, −1, 424) |
| 1700 | (0, 1, 0, −425); (1, −4, −5, 0)<br>(2, 0, 850); (42, 20, 50) | (0, −1, 0, 425); (0, ∓5, 4, ±1) |
| 1703 | (0, 1, 1, −425)<br>(2, 1, 852) | (0, −1, −1, 425) |
| 1704 | (0, 1, 0, −426); (3, 4, −1, −6)<br>(2, 0, 852); (38, 14, 50) | (0, −1, 0, 426); (3, ∓4, −1, ±6) |
| 1707 | (0, 1, 1, −426)<br>(2, 1, 854) | (0, −1, −1, 426) |
| 1708 | (0, 1, 0, −427); (0, 2, 1, −53)<br>(2, 0, 854); (8, 2, 214) | (0, −1, 0, 427); (0, ∓2, 1, ±53) |
| 1711 | (0, 1, 1, −427)<br>(2, 1, 856) | (0, −1, −1, 427) |
| 1712 | (0, 1, 0, −428); (0, 2, 2, −52); (0, 4, 3, −5); (2, 0, −6, −2)<br>(2, 0, 856); (8, 4, 216); (32, 12, 58); (24, 4, 72) | (0, −1, 0, 428); (0, −2, −2, 52); (0, ∓4, 3, ±5);<br>(2, 0, −6, ±2) |
| 1715 | (0, 1, 1, −428); (4, 3, −3, −4)<br>(2, 1, 858); (42, 7, 42) | (0, −1, −1, 428); (4, ∓3, −3, ±4) |
| 1716 | (0, 1, 0, −429)<br>(2, 0, 858) | (0, −1, 0, 429) |
| 1719 | (0, 1, 1, −429); (1, −4, −2, 5)<br>(2, 1, 860); (36, 3, 48) | (0, −1, −1, 429); (1, ∓4, −2, ±5) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1720 | (0, 1, 0, —430); (2, —2, —5, 3)<br>(2, 0, 860); (28, 4, 62) | (0, —1, 0, 430); (2, ∓2, —5, ±3) |
| 1723 | (0, 1, 1, —430)<br>(2, 1, 862) | (0, —1, —1, 430) |
| 1724 | (0, 1, 0, —431); (1, —1, —7, 5); (1, 3, —2, —12); (2, 0, —6, —1)<br>(2, 0, 862); (16, 2, 108); (22, 6, 80); (24, 2, 72) | (0, —1, 0, 431); (1, ∓1, —7, ±5); (1, ∓3, —2, ±12);<br>(1, ∓6, 0, ±2) |
| 1727 | (0, 1, 1, —431); (3, 1, —5, —2)<br>(2, 1, 864); (32, 1, 54) | (0, —1, —1, 431); (2, ∓5, —1, ±3) |
| 1728 | (0, 1, 0, —432); (0, —2, 0, 54); (0, —3, 0, 16); (0, 3, 2, —15);<br>(2, 0, 864); (8, 0, 216); (18, 0, 96); (18, 6, 96);<br>(0, 4, 2, —6); (1, —3, —3, 9); (2, 0, —6, 0)<br>(32, 8, 56); (24, 0, 72); (24, 0, 72) | (0, —1, 0, 432); (0, —2, 0, 54); (0, —3, 0, 16);<br>(0, ∓3, 2, ±15); (0, ∓4, 2, ±6); (0, —6, 0, 2);<br>(1, ∓3, —3, ±9) |
| 1731 | (0, 1, 1, —432)<br>(2, 1, 866) | (0, —1, —1, 432) |
| 1732 | (0, 1, 0, —433); (1, —3, —4, 6)<br>(2, 0, 866); (26, 6, 68) | (0, —1, 0, 433); (1, ∓3, —4, ±6) |
| 1735 | (0, 1, 1, —433)<br>(2, 1, 868) | (0, —1, —1, 433) |
| 1736 | (0, 1, 0, —434); (2, 4, —1, —6)<br>(2, 0, 868); (36, 8, 50) | (0, —1, 0, 434); (2, ∓4, —1, ±6) |
| 1739 | (0, 1, 1, —434)<br>(2, 1, 870) | (0, —1, —1, 434) |
| 1740 | (0, 1, 0, —435); (0, 2, 1, —54)<br>(2, 0, 870); (8, 2, 218) | (0, —1, 0, 435); (0, ∓2, 1, ±54) |
| 1743 | (0, 1, 1, —435); (1, 4, 0, —7)<br>(2, 1, 872); (32, 7, 56) | (0, —1, —1, 435); (1, ∓4, 0, ±7) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1744 | (0, 1, 0, −436); (0, 2, 2, −53); (4, 0, −5, −4); (4, 2, −4, −3)<br>(2, 0, 872); (8, 4, 220); (40, 16, 50); (40, 4, 44) | (0, −1, 0, 436); (0, −2, −2, 53); (4, 0, −5, ±4);<br>(3, ∓4, −2, ±4) |
| 1747 | (0, 1, 1, −436)<br>(2, 1, 874) | (0, −1, −1, 436) |
| 1748 | (0, 1, 0, −437)<br>(2, 0, 874) | (0, −1, 0, 437) |
| 1751 | (0, 1, 1, −437); (3, 2, −4, −7)<br>(2, 1, 876); (32, 13, 60) | (0, −1, −1, 437); (3, ∓2, −4, ±7) |
| 1752 | (0, 1, 0, −438)<br>(2, 0, 876) | (0, −1, 0, 438) |
| 1755 | (0, 1, 1, −438); (0, 3, 1, −16); (0, 3, 3, −14)<br>(2, 1, 878); (18, 3, 98); (18, 9, 102) | (0, −1, −1, 438); (0, ∓3, 1, ±16); (0, −3, −3, 14) |
| 1756 | (0, 1, 0, −439); (2, −1, −6, −1)<br>(2, 0, 878); (26, 8, 70) | (0, −1, 0, 439); (1, ∓6, 1, ±2) |
| 1759 | (0, 1, 1, −439); (1, −1, −7, 6)<br>(2, 1, 880); (16, 1, 110) | (0, −1, −1, 439); (1, ∓1, −7, ±6) |
| 1760 | (0, 1, 0, −440); (0, −2, 0, 55); (1, 2, −5, −12); (1, −3, −5, 3)<br>(2, 0, 880); (8, 0, 220); (18, 2, 98); (28, 12, 68) | (0, −1, 0, 440); (0, −2, 0, 55); (1, ∓2, −5, ±12);<br>(1, ∓3, −5, ±3) |
| 1763 | (0, 1, 1, −440); (4, −1, −5, −2)<br>(2, 1, 882); (42, 13, 46) | (0, −1, −1, 440); (2, ∓5, 1, ±4) |
| 1764 | (0, 1, 0, −441)<br>(2, 0, 882) | (0, −1, 0, 441) |
| 1767 | (0, 1, 1, −441)<br>(2, 1, 884) | (0, −1, −1, 441) |
| 1768 | (0, 1, 0, −442)<br>(2, 0, 884) | (0, −1, 0, 442) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1771 | (0, 1, 1, —442)<br>(2, 1, 886) | (0, —1, —1, 442) |
| 1772 | (0, 1, 0, —443); (0, 2, 1, —55)<br>(2, 0, 886); (8, 2, 222) | (0, —1, 0, 443); (0, ∓2, 1, ±55) |
| 1775 | (0, 1, 1, —443); (2, 3, —3, —7)<br>(2, 1, 888); (30, 5, 60) | (0, —1, —1, 443); (2, ∓3, —3, ±7) |
| 1776 | (0, 1, 0, —444); (0, 2, 2, —54); (3, 1, —5, —3)<br>(2, 0, 888); (8, 4, 224); (32, 4, 56) | (0, —1, 0, 444); (0, —2, —2, 54); (3, ∓1, —5, ±3) |
| 1779 | (0, 1, 1, —444)<br>(2, 1, 890) | (0, —1, —1, 444) |
| 1780 | (0, 1, 0, —445)<br>(2, 0, 890) | (0, —1, 0, 445) |
| 1783 | (0, 1, 1, —445)<br>(2, 1, 892) | (0, —1, —1, 445) |
| 1784 | (0, 1, 0, —446)<br>(2, 0, 892) | (0, —1, 0, 446) |
| 1787 | (0, 1, 1, —446)<br>(2, 1, 894) | (0, —1, —1, 446) |
| 1788 | (0, 1, 0, —447); (1, 5, 3, —3)<br>(2, 0, 894); (44, 18, 48) | (0, —1, 0, 447); (1, ∓5, 3, ±3) |
| 1791 | (0, 1, 1, —447); (1, —2, —6, 5)<br>(2, 1, 896); (20, 7, 92) | (0, —1, —1, 447); (1, ∓2, —6, ±5) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1792 | (0,1,0,−448); (0,−2,0,56); (0,−4,0,7); (0,4,4,−4); (1,−1,−7,7);<br>(2, 0, 896); (8, 0, 224); (32, 0, 56); (32, 16, 64); (16,0,112);<br>(2, −2, −6, −2); (2,4,0,−8); (3,1,−5,−7); (3,2,−4,−8)<br>(32, 16, 64); (32, 16, 64); (32, 16, 24); (32, 16, 64) | (0, −1, 0, 448); (0, −2, 0, 56);<br>(0, −4, 0, 7); (0, −4, 4, 4);<br>(1, ∓1, −7, ±7); (2, ±2, −6, ±2);<br>(3, ∓1, −5, ±7) |
| 1795 | (0, 1, 0, −448)<br>(2, 1, 898) | (0, −1, −1, 448) |
| 1796 | (0, 1, 0, −449)<br>(2, 0, 898) | (0, −1, 0, 449) |
| 1799 | (0, 1, 1, −449)<br>(2, 1, 900) | (0, −1, −1, 449) |
| 1800 | (0, 1, 0, −450); (1, −2, −5, 10); (3, −2, −5, 0)<br>(2, 0, 900); (20, 0, 90); (38, 10, 50) | (0, −1, 0, 450); (1, ∓2, −5, ±10); (0, ∓5, 2, ±3) |
| 1803 | (0, 1, 1, −450)<br>(2, 1, 902) | (0, −1, −1, 450) |
| 1804 | (0, 1, 0, −451); (0, 2, 1, −56)<br>(2, 0, 902); (8, 2, 226) | (0, −1, 0, 451); (0, ∓2, 1, ±56) |
| 1807 | (0, 1, 1, −451); (3, 1, −5, −4)<br>(2, 1, 904); (32, 7, 58) | (0, −1, −1, 451); (3, ∓1, −5, ±4) |
| 1808 | (0, 1, 0, −452); (0, 2, 2, −55)<br>(2, 0, 904); (8, 4, 228) | (0, −1, 0, 452); (0, −2, −2, 55) |
| 1811 | (0, 1, 1, −452)<br>(2, 1, 906) | (0, −1, −1, 452) |
| 1812 | (0, 1, 0, −453); (3, −3, −4, 2)<br>(2, 0, 906); (42, 6, 44) | (0, −1, 0, 453); (2, ∓4, −3, ±3) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1815 | (0, 1, 1, −453); (3, 1, −5, −6)<br>(2, 1, 908); (32, 13, 62) | (0, −1, −1, 453); (3, ∓1, −5, ±6) |
| 1816 | (0, 1, 0, −454)<br>(2, 0, 908) | (0, −1, 0, 454) |
| 1819 | (0, 1, 1, −454)<br>(2, 1, 910) | (0, −1, −1, 454) |
| 1820 | (0, 1, 0, −455); (3, 1, −5, −5)<br>(2, 0, 910); (32, 10, 60) | (0, −1, 0, 455); (3, ∓1, −5, ±5) |
| 1823 | (0, 1, 1, −455); (1, 1, −7, −8)<br>(2, 1, 912); (16, 1, 114) | (0, −1, −1, 455); (1, ∓1, −7, ±8) |
| 1824 | (0, 1, 0, −456); (0, −2, 0, 57)<br>(2, 0, 912); (8, 0, 228) | (0, −1, 0, 456); (0, −2, 0, 57) |
| 1827 | (0, 1, 1, −456); (1, 2, −5, −13)<br>(2, 1, 914); (18, 3, 102) | (0, −1, −1, 456); (1, ∓2, −5, ±13) |
| 1828 | (0, 1, 0, −457)<br>(2, 0, 914) | (0, −1, 0, 457) |
| 1831 | (0, 1, 1, −457)<br>(2, 1, 916) | (0, −1, −1, 457) |
| 1832 | (0, 1, 0, −458)<br>(2, 0, 916) | (0, −1, 0, 458) |
| 1835 | (0, 1, 1, −458)<br>(2, 1, 918) | (0, −1, −1, 458) |
| 1836 | (0, 1, 0, −459); (0, 2, 1, −57); (0, −3, 0, 17); (0, 3, 2, −16);<br>(2, 0, 918); (8, 2, 230); (18, 0, 102); (18, 6, 104);<br>(1, −4, −3, 4); (1, 4, 1, −8); (2, −1, −6, 0)<br>(38, 8, 50); (30, 12, 66); (26, 6, 72) | (0, −1, 0, 459); (0, ∓2, 1, ±57); (0, −3, 0, 17);<br>(0, ∓3, 2, ±16); (1, ∓4, −3, ±4); (1, ∓4, 1, ±8);<br>(0, ∓6, 1, ±2) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1839 | (0, 1, 1, −459)<br>(2, 1, 920) | (0, −1, −1, 459) |
| 1840 | (0, 1, 0, −460); (0, 2, 2, −56); (0, 4, 1, −7)<br>(2, 0, 920); (8, 4, 32); (32, 4, 58) | (0, −1, 0, 460); (0, −2, −2, 56); (0, ∓4, 1, ±7). |
| 1843 | (0, 1, 1, −460); (1, 3, −2, −13)<br>(2, 1, 922); (22, 7, 86) | (0, −1, −1, 460); (1, ∓3, −2, ±13) |
| 1844 | (0, 1, 0, −461); (2, −2, −5, 4)<br>(2, 0, 922); (28, 2, 66) | (0, −1, 0, 461); (2, ∓2, −5, ±4) |
| 1847 | (0, 1, 1, −461)<br>(2, 1, 924) | (0, −1, −1, 461) |
| 1848 | (0, 1, 0, −462)<br>(2, 0, 924) | (0, −1, 0, 462) |
| 1851 | (0, 1, 1, −462)<br>(2, 1, 926) | (0, −1, −1, 462) |
| 1852 | (0, 1, 0, −463); (1, 1, −7, −9)<br>(2, 0, 926); (16, 2, 116) | (0, −1, 0, 463); (1, ∓1, −7, ±9) |
| 1855 | (0, 1, 1, −463)<br>(2, 1, 928) | (0, −1, −1, 463) |
| 1856 | (0, 1, 0, −464); (0, −2, 0, 58); (4, 0, −5, −3); (4, 2, −4, −4)<br>(2, 0, 928); (8, 0, 232); (40, 12, 50); (40, 8, 48) | (0, −1, 0, 464); (0, −2, 0, 58); (3, ∓5, 0, ±4);<br>(4, ∓2, −4, ±4) |
| 1859 | (0, 1, 1, −464)<br>(2, 1, 930) | (0, −1, −1, 464) |
| 1860 | (0, 1, 0, −465)<br>(2, 0, 930) | (0, −1, 0, 465) |
| 1863 | (0, 1, 1, −465); (0, 3, 1, −17); (0, 3, 3, −15); (3, 3, −3, −6)<br>(2, 1, 932); (18, 3, 104); (18, 9, 108); (36, 9, 54) | (0, −1, −1, 465); (0, ∓3, 1, ±17); (0, −3, −3, 15);<br>(3, ∓3, −3, ±6) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1864 | (0, 1, 0, —466)<br>(2, 0, 932) | (0, —1, 0, 466) |
| 1867 | (0, 1, 1, —466)<br>(2, 1, 934) | (0, —1, —1, 466) |
| 1868 | (0, 1, 0, —467); (0, 2, 1, —58)<br>(2, 0, 934); (8, 2, 234) | (0, —1, 0, 467); (0, ∓2, 1, ±58) |
| 1871 | (0, 1, 1, —467)<br>(2, 1, 936) | (0, —1, —1, 467) |
| 1872 | (0, 1, 0, —468); (0, 2, 2, —57)<br>(2, 0, 936); (8, 4, 236) | (0, —1, 0, 468); (0, —2, —2, 57) |
| 1875 | (0, 1, 1, —468); (0, 5, 5, 0); (5, 0, —5, —5); (5, 5, 0, —5)<br>(2, 1, 938); (50, 25, 50); (50, 25, 50); (50, 25, 50) | (0, —1, —1, 468); (0, 5, 5, 0); (5, 0, —5, ±5) |
| 1876 | (0, 1, 0, —469)<br>(2, 0, 938). | (0, —1, 0, 469) |
| 1879 | (0, 1, 1, —469); (1, 1, —7, —10); (1, 2, —5, —11)<br>(2, 1, 940); (16, 3, 118); (20, 1, 94) | (0, —1, —1, 469); (1, ∓1, —7, ±10);<br>(1, ∓2, —5, ±11) |
| 1880 | (0, 1, 0, —470)<br>(2, 0, 940) | (0, —1, 0, 470) |
| 1883 | (0, 1, 1, —470)<br>(2, 1, 942) | (0, —1, —1, 470) |
| 1884 | (0, 1, 0, —471); (1, —2, —6, 6)<br>(2, 0, 942); (20, 6, 96) | (0, 1, 0, —471); (1, ∓2, —6, ±6) |
| 1887 | (0, 1, 1, —471)<br>(2, 1, 944) | (0, —1, —1, 471) |
| 1888 | (0, 1, 0, —472); (0, —2, 0, 59); (2, —3, —4, 4); (3, 5, 1, —5)<br>(2, 0, 944); (8, 0, 236); (34, 4, 56); (44, 20, 52) | (0, —1, 0, 472); (0, —2, 0, 59); (2, ∓3, —4, ±4);<br>(3, ∓5, 1, ±5) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1891 | (0, 1, 1, −472)<br>(2, 1, 946) | (0, −1, −1, 472) |
| 1892 | (0, 1, 0, −473); (1, 2, −5, −14)<br>(2, 0, 946); (18, 4, 106) | (0, −1, 0, 473); (1, ∓2, −5, ±14) |
| 1895 | (0, 1, 1, −473); (4, 3, −3, −5)<br>(2, 1, 948); (42, 11, 48) | (0, −1, −1, 473); (4, ∓3, −3, ±5) |
| 1896 | (0, 1, 0, −474)<br>(2, 0, 948) | (0, −1, 0, 474) |
| 1899 | (0, 1, 1, −474); (1, −3, −4, 7)<br>(2, 1, 950); (26, 5, 74) | (0, −1, −1, 474); (1, ∓3, −4, ±7) |
| 1900 | (0, 1, 0, −475); (0, 2, 1, −59)<br>(2, 0, 950); (8, 2, 238) | (0, −1, 0, 475); (0, ∓2, 1, ±59) |
| 1903 | (0, 1, 1, −475)<br>(2, 1, 952) | (0, −1, −1, 475) |
| 1904 | (0, 1, 0, −476); (0, 2, 2, −58); (1, 1, −7, −11)<br>(2, 0, 952); (8, 4, 240); (16, 4, 120) | (0, −1, 0, 476); (0, −2, −2, 58); (1, ∓1, −7, ±11) |
| 1907 | (0, 1, 1, −476)<br>(2, 1, 954) | (0, −1, −1, 476) |
| 1908 | (0, 1, 0, −477); (2, −1, −6, 1)<br>(2, 0, 954); (26, 4, 74) | (0, −1, 0, 477); (1, ∓6, −1, ±2) |
| 1911 | (0, 1, 1, −477)<br>(2, 1, 956) | (0, −1, −1, 477) |
| 1912 | (0, 1, 0, −478)<br>(2, 0, 956) | (0, −1, 0, 478) |
| 1915 | (0, 1, 1, −478); (3, 4, −1, −7)<br>(2, 1, 958); (38, 17, 58) | (0, −1, −1, 478); (3, ∓4, −1, ±7) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1916 | (0, 1, 0, −479); (2, 4, −2, −5)<br>(2, 0, 958); (40, 2, 48) | (0, −1, 0, 479); (2, ∓4, −2, ±5) |
| 1919 | (0, 1, 1, −479)<br>(2, 1, 960) | (0, −1, −1, 479) |
| 1920 | (0, 1, 0, −480); (0, −2, 0, 60)<br>(2, 0, 960); (8, 0, 240) | (0, −1, 0, 480); (0, −2, 0, 60) |
| 1923 | (0, 1, 1, −480)<br>(2, 1, 962) | (0, −1, −1, 480) |
| 1924 | (0, 1, 0, −481)<br>(2, 0, 962) | (0, −1, 0, 481) |
| 1927 | (0, 1, 1, −481); (1, 1, −7, −12)<br>(2, 1, 964); (16, 5, 122) | (0, −1, −1, 481); (1, ∓1, −7, ±12) |
| 1928 | (0, 1, 0, −482)<br>(2, 0, 964) | (0, −1, 0, 482) |
| 1931 | (0, 1, 1, −482); (2, 3, −3, −8)<br>(2, 1, 966); (30, 7, 66) | (0, −1, −1, 482); (2, ∓3, −3, ±8) |
| 1932 | (0, 1, 0, −483); (0, 2, 1, −60)<br>(2, 0, 966); (8, 2, 242) | (0, −1, 0, 483); (0, ∓2, 1, ±60) |
| 1935 | (0, 1, 1, −483); (4, −1, −5, −1)<br>(2, 1, 968); (42, 9, 48) | (0, −1, −1, 483); (1, ∓5, 1, ±4) |
| 1936 | (0, 1, 0, −484); (0, 2, 2, −59); (4, 0, −5, −2)<br>(2, 0, 968); (8, 4, 244); (40, 8, 50) | (0, −1, 0, 484); (0, −2, −2, 59); (2, ∓5, 0, ±4) |
| 1939 | (0, 1, 1, −484)<br>(2, 1, 970) | (0, −1, −1, 484) |
| 1940 | (0, 1, 0, −485)<br>(2, 0, 970) | (0, −1, 0, 485) |

| D | Reducirte Formen |
|---|---|
| 1896 | [illegible] |
| 1899 | (0, 1, [illegible] (2, 1, [illegible] |
| 1900 | (0, 1, 0, −4[illegible] (2, 0, 950); |
| 1903 | (0, 1, 1, −475) (2, 1, 952) |
| 1904 | (0, 1, 0, −476); (2, 0, 952); (0, 2, 2, [illegible] (8, 4, 240, |
| 1907 | (0, 1, 1, −476) (2, 1, 954) |
| 1908 | (0, 1, 0, −477); (2, 0, 954); (2, −1, −6, 1) (26, 4, 74) |
| 1911 | (0, 1, 1, −477) (2, 1, 956) |
| 1912 | (0, 1, 0, −478) (2, 0, 956) |
| 1915 | (0, 1, 1, −478); (2, 1, 958); (3, 4, −1, −7) (38, 17, 58) |

| [illegible]rakteristik. |
|---|
| [illegible], 2, −17) [illegible], 6, 110) |

| Klassen. |
|---|
| (0, −1, −1, 485) |
| (0, −1, 0, 486); (0, −3, 0, 18); (0, ∓3, 2, ±17) |
| (0, −1, −1, 486) |
| (0, −1, 0, 487); (1, ∓1, −7, ±13) |
| (0, −1, −1, 487); (1, ∓3, −5, ±4) |
| (0, −1, 0, 488); (0, −2, 0, 61) |
| (0, −1, −1, 488); (1, ∓2, −5, ±15) |
| (0, −1, 0, 489); (1, ∓2, −5, ±12) |
| (0, −1, −1, 489) |
| (0, −1, 0, 490); (1, ∓3, −2, ±14); (2, ∓2, −5, ±5) |
| (0, −1, −1, 490); (1, ∓4, −1, ±7) |
| (0, −1, 0, 491); (0, ∓2, 1, ±61) |
| (0, −1, −1, 491); (1, ∓1, −7, ±14) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1968 | (0, 1, 0, —492); (0, 2, 2, —60); (0, 4, 3, —6)<br>(2, 0, 984); (8, 4, 248); (32, 12, 66) | (0, —1, 0, 492); (0, —2, —2, 60); (0, ∓4, 3, ±6) |
| 1971 | (0, 1, 1, —492); (0, 3, 1, —18); (0, 3, 3, —16)<br>(2, 1, 986); (18, 3, 108); (18, 9, 114) | (0, —1, —1, 492); (0, ∓3, 1, ±18); (0, —3, —3, 16) |
| 1972 | (0, 1, 0, —493); (2, —1, —6, 2)<br>(2, 0, 986); (26, 2, 76) | (0, —1, 0, 493); (2, ∓1, —6, ±2) |
| 1975 | (0, 1, 1, —493); (1, —2, —6, 7<br>(2, 1, 988); (20, 5, 100 | (0, —1, —1, 493); (1, ∓2, —6, ±7) |
| 1976 | (0, 1, 0, —494)<br>(2, 0, 988) | (0, —1, 0, 494) |
| 1979 | (0, 1, 1, —494)<br>(2, 1, 990) | (0, —1, —1, 494) |
| 1980 | (0, 1, 0, —49<br>(2, 0, 990 | (0, —1, 0, 495); (1, ∓6, 2, ±2) |
| 1983 | (0, 1, 1<br>(2, | (0, —1, —1, 495) |
| 1984 | (0 ... 7); (1, 0, —8, —8);<br>); (16, 8, 128);<br>); (4, 2, —4, —6)<br>(40, 16, 56) | (0, —1, 0, 496); (0, —2, 0, 62); (0, ∓4, 2, ±7);<br>(1, 0, —8, ±8); (1, ∓4, 0, ±8);<br>(1, ∓5, 0, ±4); (4, ∓2, —4, ±6) |
| | | (0, —1, —1, 496) |
| | | (0, —1, 0, 497); (2, ∓4, —1, ±7) |

| -D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1943 | (0, 1, 1, −485)<br>(2, 1, 972) | (0, −1, −1, 485) |
| 1944 | (0, 1, 0, −486); (0, −3, 0, 18); (0, 3, 2, −17)<br>(2, 0, 972); (18, 0, 18); (18, 6, 110) | (0, −1, 0, 486); (0, −3, 0, 18); (0, ∓3, 2, ±17) |
| 1947 | (0, 1, 1, −486)<br>(2, 1, 974) | (0, −1, −1, 486) |
| 1948 | (0, 1, 0, −487); (1, 1, −7, −13)<br>(2, 0, 974); (16, 6, 124) | (0, −1, 0, 487); (1, ∓1, −7, ±13) |
| 1951 | (0, 1, 1, −487); (1, −3, −5, 4)<br>(2, 1, 976); (28, 11, 74) | (0, −1, −1, 487); (1, ∓3, −5, ±4) |
| 1952 | (0, 1, 0, −488); (0, −2, 0, 61)<br>(2, 0, 976); (8, 0, 244) | (0, −1, 0, 488); (0, −2, 0, 61) |
| 1955 | (0, 1, 1, −488); (1, 2, −5, −15)<br>(2, 1, 978); (18, 5, 110) | (0, −1, −1, 488); (1, ∓2, −5, ±15) |
| 1956 | (0, 1, 0, −489); (1, 2, −5, −12)<br>(2, 0, 978); (20, 2, 98) | (0, −1, 0, 489); (1, ∓2, −5, ±12) |
| 1959 | (0, 1, 1, −489)<br>(2, 1, 980) | (0, −1, −1, 489) |
| 1960 | (0, 1, 0, −490); (1, 3, −2, −14); (2, −2, −5, 5)<br>(2, 0, 980); (22, 8, 92); (28, 0, 70) | (0, −1, 0, 490); (1, ∓3, −2, ±14); (2, ∓2, −5, ±5) |
| 1963 | (0, 1, 1, −490); (1, 4, −1, −7)<br>(2, 1, 982); (34, 3, 58) | (0, −1, −1, 490); (1, ∓4, −1, ±7) |
| 1964 | (0, 1, 0, −491); (0, 2, 1, −61)<br>(2, 0, 982); (8, 2, 246) | (0, −1, 0, 491); (0, ∓2, 1, ±61) |
| 1967 | (0, 1, 1, −491); (1, 1, −7, −14)<br>(2, 1, 984); (16, 7, 126) | (0, −1, −1, 491); (1, ∓1, −7, ±14) |

| *D.* | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1968 | (0, 1, 0, —492); (0, 2, 2, —60); (0, 4, 3, —6)<br>(2, 0, 984); (8, 4, 248); (32, 12, 66) | (0, —1, 0, 492); (0, —2, —2, 60); (0, ∓4, 3, ±6) |
| 1971 | (0, 1, 1, —492); (0, 3, 1, —18); (0, 3, 3, —16)<br>(2, 1, 986); (18, 3, 108); (18, 9, 114) | (0, —1, —1, 492); (0, ∓3, 1, ±18); (0, —3, —3, 16) |
| 1972 | (0, 1, 0, —493); (2, —1, —6, 2)<br>(2, 0, 986); (26, 2, 76) | (0, —1, 0, 493); (2, ∓1, —6, ±2) |
| 1975 | (0, 1, 1, —493); (1, —2, —6, 7)<br>(2, 1, 988); (20, 5, 100) | (0, —1, —1, 493); (1, ∓2, —6, ±7) |
| 1976 | (0, 1, 0, —494)<br>(2, 0, 988) | (0, —1, 0, 494) |
| 1979 | (0, 1, 1, —494)<br>(2, 1, 990) | (0, —1, —1, 494) |
| 1980 | (0, 1, 0, —495); (2, —2, —6, —1)<br>(2, 0, 990); (32, 14, 68) | (0, —1, 0, 495); (1, ∓6, 2, ±2) |
| 1983 | (0, 1, 1, —495)<br>(2, 1, 992) | (0, —1, —1, 495) |
| 1984 | (0, 1, 0, —496); (0, —2, 0, 62); (0, 4, 2, —7); (1, 0, —8, —8);<br>(2, 0, 992); (8, 0, 248); (32, 8, 64); (16, 8, 128);<br>(1, 1, —7, —15); (1, 4, 0, —8); (4, 0, —5, —1); (4, 2, —4, —6)<br>(16, 8, 128); (32, 8, 64); (40, 4, 50); (40, 16, 56) | (0, —1, 0, 496); (0, —2, 0, 62); (0, ∓4, 2, ±7);<br>(1, 0, —8, ±8); (1, ∓4, 0, ±8);<br>(1, ∓5, 0, ±4); (4, ∓2, —4, ±6) |
| 1987 | (0, 1, 1, —496)<br>(2, 1, 994) | (0, —1, —1, 496) |
| 1988 | (0, 1, 0, —497); (2, 4, —1, —7)<br>(2, 0, 994); (36, 10, 58) | (0, —1, 0, 497); (2, ∓4, —1, ±7) |

| D. | Reducirte Formen mit Charakteristik. | Klassen. |
|---|---|---|
| 1991 | (0, 1, 1, —497)<br>(2, 1, 996) | (0, —1, —1, 497) |
| 1992 | (0, 1, 0, —498)<br>(2, 0, 996) | (0, —1, 0, 498) |
| 1995 | (0, 1, 1, —498)<br>(2, 1, 998) | (0, —1, —1, 498) |
| 1996 | (0, 1, 0, —499); (0, 2, 1, —62)<br>(2, 0, 998); (8, 2, 250) | (0, —1, 0, 499); (0, ∓2, 1, ±62) |
| 1999 | (0, 1, 1, —499); (1, 0, —8, —7)<br>(2, 1, 1000); (16, 7, 128) | (0, —1, —1, 499); (1, 0, —8, ±7) |
| 2000 | (0, 1, 0, —500); (0, 2, 2, —61); (4, 0, —5, 0); (4, 2, —4, —7)<br>(2, 0, 1000); (8, 4, 252); (40, 0, 50); (40, 20, 60) | (0, —1, 0, 500); (0, —2, —2, 61);<br>(0, —5, 0, 4); (4, —2, —4, 7) |

Stralsund, den 14. Juni 1851.

# XXVII.

## Ueber einen merkwürdigen allgemeinen Satz von den Curven.

Von

Herrn Doctor *Völler*,

Lehrer an der Realschule zu Saalfeld.

---

### *Lehrsatz.*

**Zieht man in einer beliebigen Curve eine Sehne, so ist, wenn die letztere unendlich klein wird, das Verhältniss des Flächensegments zu dem Dreiecke, welches von der Sehne und den dazu gehörigen Tangenten gebildet wird, wie 2:3.**

### Beweis.

Es ist nicht schwer, für bestimmte Curven — ich erinnere nur an die Parabel — das Verhältniss eines Flächensegments zu dem dazu gehörigen Tangentendreiecke anzugeben. Wird aber die Aufgabe allgemein gefasst, dann lässt sich das weittragende Gerüst der höheren Analysis nicht mehr gut entbehren.

Es seien — um den Flächeninhalt des Dreiecks $MTN$ (Taf. VI. Fig. 1.) bestimmen zu können — die Coordinaten des Punktes $M$ gleich $x_1$, $y_1$; und die des Punktes $N$ gleich $x_2$, $y_2$; dann sind die Gleichungen der Tangenten an den Punkten $M$ und $N$ resp.

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$$

und

$$y-y_2=f'(x_2)(x-x_2),$$

wo $f'(x_1)=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ und $f'(x_2)=\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ bedeutet.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun für den Durchschnittspunkt $T$, dessen Coordinaten $x$, $y$ heissen mögen, dass

$$x = \frac{y_2 - y_1 + x_1 f'(x_1) - x_2 f'(x_2)}{f'(x_1) - f'(x_2)}$$

und

$$y = \frac{y_2 f'(x_1) - y_1 f'(x_2) + (x_1 - x_2) f'(x_1) f'(x_2)}{f'(x_1) - f'(x_2)}.$$

Demnach ist der Flächeninhalt des Dreiecks $MTN$:

$$\frac{(y+y_1)(x-x_1) + (y+y_2)(x_2-x) - (y_2+y_1)(x_2-x_1)}{2},$$

oder, wenn man ausmultiplicirt,

$$\frac{x_1(y_2-y) - y_1(x_2-x) + yx_2 - y_2 x}{2}.$$

Dieser Ausdruck geht bei weiterer Transformation über in:

$$\frac{x_1(y_2-y) - y_1(x_2-x) - x_2(y_2-y) + x_2 y_2 + y_2(x_2-x) - x_2 y_2}{2},$$

woraus sich ergiebt, dass Dreieck $MTN$ gleich

$$\frac{(y_2-y)(x_1-x_2) + (x_2-x)(y_2-y_1)}{2}$$

ist. Substituirt man nunmehr die Werthe von $y$ und $x$, so folgt endlich, dass Dreieck $MTN$ gleich

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}(x_1-x_2)\{(y_1-y_2)f'(x_2) - (x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)\} \\ + (y_2-y_1)\{y_1-y_2+(x_2-x_1)f'(x_1)\}\end{array}\right\}}{2\{f'(x_1) - f'(x_2)\}}.$$

Die Fläche $MPNQ$ ist allgemein gleich

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} y\partial x + C.$$

Da aber das Integral wiederum eine Funktion von $x$ ist, so kann man auch

$$MPNQ = \varphi(x) + C$$

ist die Fläche *MPNQ* — mit Rücksicht auf die
— gleich

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1),$$

*MmN*, was hier nur allein berücksich-

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)-\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2},$$

$$\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}$$

das Trapez *MPNQ* bedeutet.

Es ist also:

$$\frac{\Delta\, MTN}{\text{Seg. } MmN}=\frac{\left\{\begin{array}{c}(x_1-x_2)\{(y_1-y_2)f'(x_2)-(x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)\}\\ +(y_2-y_1)\{y_1-y_2+(x_2-x_1)f'(x_1)\}\end{array}\right\}}{\{2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}\{f'(x_1)-f'(x_2)\}}.$$

Da nun der Aufgabe gemäss das eben angedeutete Verhältniss bei verschwindender Sehne, also im Unendlichkleinen, festgestellt werden soll, so ist es nöthig, beide Theile dieses Bruchs zu differentiiren, wodurch das wegen der Allgemeinheit der Curve nicht ausführbare Integral im Nenner von selbst wegfällt, indem dann $\varphi(x_2)$ wieder in $f'(x_2)$ und $\varphi(x_1)$ in $f'(x_1)$ übergeht, was natürlich die Untersuchung an und für sich in keiner Weise abändert, weil nach der Theorie des Unendlichkleinen das Flächensegment — auch unendlich klein — immer ein Segment und das Dreieck immer ein Dreieck bleibt.

Bei der Differentiation ist es vortheilhaft, die Coordinaten eines dieser Punkte, z. B. $x_2$, $y_2$, als constant anzusehen, weil dadurch die Resultate um Vieles vereinfacht werden. Man hat sich also die ganze Sache so zu denken, als ob der Punkt *M* immer näher an *N* heranrücke und endlich im Unendlichkleinen mit *N* zusammenfalle, wobei $y_1$ in $y_2$ und $x_1$ in $x_2$ übergehen wird.

Würde man jetzt in die obige Formel $y_1=y_2$ und $x_1=x_2$ setzen, so ergäbe sich:

$$\frac{\Delta\, MTN}{\text{Seg. } MmN}=\frac{0}{0}.$$

Es ist also dieser Ausdruck so lange zu differentiiren, bis er — nach Substitution von $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$ — nicht mehr $\frac{0}{0}$ liefert.

Die erste Differentiation giebt nun:

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}(y_1-y_2)f'(x_2)-(x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)+(y_2-y_1)(x_2-x_1)f''(x_1)\\ -(x_1-x_2)^2f''(x_1)f'(x_2)-f'(x_1)\{y_1-y_2+f'(x_1)(x_2-x_1)\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}f''(x_1)\{2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}\\ -\{2f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)-(y_1+y_2\}\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\end{array}\right\}},$$

welcher Ausdruck für $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ liefert.

Die zweite Differentiation giebt:

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}3(x_2-x_1)f''(x_1)f'(x_2)+(y_2-y_1)(x_2-x_1)f'''(x_1)\\ -3(x_2-x_1)f'(x_1)f''(x_1)-(x_1-x_2)^2f'''(x_1)f'(x_2)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}f'''(x_1)\{2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}\\ -2f''(x_1)\{2f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)-(y_1+y_2)\}\\ -(x_2-x_1)f''(x_1)\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\end{array}\right\}},$$

was in gleicher Weise für $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$ das Resultat $\frac{0}{0}$ liefert.

Dasselbe ist auch noch nach der dritten Differentiation der Fall, welche den Ausdruck

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}5(x_2-x_1)f'(x_2)f'''(x_1)-3f'(x_2)f''(x_1)-4(x_2-x_1)f'(x_1)f'''(x_1)\\ +(y_2-y_1)f'''(x_1)+(y_2-y_1)(x_2-x_1)f^{IV}(x_1)\\ +3f'(x_1)f''(x_1)-3(x_2-x_1)f''(x_1)f''(x_1)-(x_1-x_2)^2f'(x_2)f^{IV}(x_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}f^{IV}(x_1)\{2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}\\ -3f'''(x_1)\{2f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)-(y_1+y_2)\}\\ -3(x_2-x_1)f''(x_1)f''(x_1)+f''(x_1)\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\end{array}\right\}}$$

giebt.

Erst die vierte Differentiation führt zu dem Resultat:

$$\left\{\begin{array}{l}
-2f'(x_2)f'''(x_1)-4f'(x_2)f'''(x_1)-4(x_1-x_2)f'(x_2)f^{IV}(x_1)\\
-4f''(x_1)f'''(x_1)(x_2-x_1)-5(x_2-x_1)f'(x_1)f^{IV}(x_1)+4f'(x_1)f'''(x_1)\\
+3f'(x_1)f'''(x_1)-(y_2-y_1)f^{IV}(x_1)-f'(x_2)f^{IV}(x_1)(x_2-x_1)\\
-(y_2-y_1)f^{IV}(x_1)+(y_2-y_1)(x_2-x_1)f^{V}(x_1)+3f''(x_1)f''(x_1)\\
-2f'(x_2)f'''(x_1)+3f''(x_1)f''(x_1)-6(x_2-x_1)f''(x_1)f'''(x_1)\\
+f'(x_1)f'''(x_1)-2(x_1-x_2)f'(x_2)f^{IV}(x_1)-(x_1-x_2)^2f'(x_2)f^{V}(x_1)
\end{array}\right\}:$$

$$\left\{\begin{array}{c}
f^{V}(x_1)\{2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\}\\
-4f^{IV}(x_1)\{2f'(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)-(y_1+y_2)\}\\
-9(x_2-x_1)f''(x_1)f'''(x_1)\\
+3f''(x_1)f''(x_1)+f''(x_1)\{f'(x_1)-f'(x_2)\}+f''(x_1)f''(x_1)
\end{array}\right\},$$

welches für $y_1=y_2$ und $x_1=x_2$ sich auf:

$$\frac{6f''(x_1)f''(x_1)}{4f''(x_1)f''(x_1)}$$

reducirt, woraus erhellt, dass sich das Segment zum Dreiecke wie 2:3 verhält.

# XXVIII.

## Ueber den in der vorhergehenden Abhandlung von Herrn Doctor Völler bewiesenen allgemeinen Satz von den Curven.

Von
dem Herausgeber.

Der in der vorhergehenden Abhandlung von Herrn Doctor Völler in Saalfeld bewiesene allgemeine Satz von den Curven hat mich sehr interessirt, indem derselbe eine neue, jedenfalls sehr merkwürdige Gränze von sehr allgemeiner Gültigkeit nachweiset, und gewiss seinen Theil dazu beitragen wird, der Gränzen-Theorie — und ihrer Anwendung — ihre so ungemein grosse Bedeutung für die gesammte Mathematik immer mehr und mehr zu sichern, und jeder, ohne Zugrundelegung dieser Theorie in ihrer völligsten Strenge, ganz unwissenschaftlichen Behandlung der Analysis und Geometrie in ihren höheren Theilen immer mehr und mehr die Spitze abzubrechen. Auch ist dieser Satz unstreitig für die annähernde Berechnung der von beliebig gekrümmten Curven umschlossenen Flächenräume von Wichtigkeit, und weiset zugleich in der von Herrn Doctor Völler ihm gegebenen Form als einer streng nachweisbaren Gränzen-Bestimmung sehr gut den Grund auf, warum man bekanntlich schon längst sich mit Vortheil zur näherungsweisen Bestimmung der Grösse solcher Flächenräume einer parabolischen Berechnung bedient hat, worauf auch Herr Doctor Völler selbst gleich im Eingange seines Aufsatzes hindeutet. Ich danke daher Herrn Doctor Völler recht sehr für die Mittheilung des Satzes, und glaube, das Interesse, welches ich an demselben genommen, nicht besser an den Tag legen zu können, als dadurch, dass ich sogleich nach Empfang der vorhergehenden Abhandlung einen anderen Beweis für denselben, den ich im Folgenden mittheilen werde, gesucht habe, welcher sich vielleicht noch etwas mehr der neueren Behandlungsweise solcher

allgemeinen Sätze von den Gränzen unmittelbar durch die mit ihrem Reste vervollständigte Taylor'sche Reihe anschliesst, auch wohl noch etwas kürzer und einfacher zum Ziele gelangt, wodurch aber keineswegs dem Werthe der von Herrn Doctor Völler gegebenen Ableitung Abbruch geschehen soll und kann, indem ich vielmehr der Meinung bin, dass diese Ableitung, neben ihrem unmittelbaren Werthe für den Beweis des in Rede stehenden Satzes, zugleich ein sehr gutes Beispiel für die Bestimmung der unbestimmt zu sein scheinenden Werthe der Functionen von der Form $\frac{0}{0}$ liefert. Ich gehe nun zu dem Beweise des fraglichen Satzes selbst über, wobei ein Jeder die Figur ganz in derselben Weise wie in dem Aufsatze des Herrn Doctor Völler sich leicht selbst entwerfen kann.

Man denke sich eine beliebige, ganz in einer Ebene, die zugleich als Ebene der $xy$ angenommen werden mag, liegende Curve, deren Gleichung für rechtwinklige Coordinaten wir im Allgemeinen durch

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y=f(x)$$

bezeichnen wollen. Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt dieser Curve sei $(xy)$ oder $A$. Lassen wir nun $x$ die beliebige Veränderung $\Delta x$ erleiden, wodurch in Folge der Gleichung 1) die Veränderung $\Delta y$ von $y$ herbeigeführt wird, so werden die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ einen zweiten beliebigen Punkt $A_1$ unserer Curve bestimmen. Legen wir nun durch die Punkte $A$ und $A_1$ Berührende an die Curve, so sind deren Gleichungen, wenn wir jetzt die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen, nach den Lehren der höheren Geometrie bekanntlich:

$$2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{y}-f(x)=f'(x).(\mathfrak{x}-x), \\ \mathfrak{y}-f(x+\Delta x)=f'(x+\Delta x).\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}. \end{cases}$$

Ist nun $A_2$ der Durchschnittspunkt dieser beiden Berührenden, so werden dessen Coordinaten, welche wir der Kürze wegen jetzt durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen wollen, aus den beiden vorstehenden Gleichungen auf dem Wege algebraischer Elimination bestimmt werden müssen, wodurch wir, die beiden in Rede stehenden Gleichungen unter der Form

$$\mathfrak{y}-f(x)=f'(x).\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}+f'(x).\Delta x,$$
$$\mathfrak{y}-f(x+\Delta x)=f'(x+\Delta x).\{\mathfrak{x}-(x+x\Delta)\}$$

darstellend, für die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sogleich die folgenden Ausdrücke erhalten:

$$3)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-(x+\Delta x)=-\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x).\Delta x}{f'(x+\Delta x)-f'(x)}, \\[2ex] \mathfrak{y}-f(x+\Delta x)=-\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x).\Delta x}{f'(x+\Delta x)-f'(x)}f'(x+\Delta x). \end{cases}$$

Wir wollen jetzt den Flächeninhalt des Dreiecks $AA_1A_2$ durch $D$ und den Flächeninhalt des von der Sehne $AA_1$ abgeschnittenen Curven-Segments durch $S$ bezeichnen, und diese beiden Flächenräume jetzt zu bestimmen suchen.

Zu diesem Ende wollen wir, wozu wir, ohne auf weitere Erläuterungen uns einzulassen, was hier unnöthig ist, jedenfalls immer berechtigt sind, grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$ eine solche gegenseitige Lage haben, dass man sich, um von dem Punkte $A$ durch den Punkt $A_1$ zu dem Punkte $A_2$ zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den Coordinatenwinkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen. Dann ist nach einem bekannten, im Archiv. Thl. III. S. 263. bewiesenen geometrischen Satze:

$$2D=-\{((x+\Delta x)-\mathfrak{x})y+(\mathfrak{x}-x)(y+\Delta y)+(x-(x+\Delta x))\mathfrak{y}\},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$2D=(\mathfrak{y}-y)\Delta x-(\mathfrak{x}-x)\Delta y,$$

oder

$$2D=\{\mathfrak{y}-(y+\Delta y)\}\Delta x-\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}\Delta y,$$

oder

$$2D=\{\mathfrak{y}-f(x+\Delta x)\}\Delta x-\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}\Delta y;$$

also nach 2) und 1):

$$4)\ \ldots\ 2D=\{f'(x+\Delta x).\Delta x-\Delta f(x)\}\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}$$

findet.

Ferner ist nach den Lehren der höheren Geometrie und der bekannten Formel für den Flächeninhalt des Trapeziums offenbar:

$$5)\ \ldots\ S=\int_x^{x+\Delta x}f(x)\partial x-\tfrac{1}{2}(2y+\Delta y)\Delta x$$

oder

$$6)\ \ldots\ 2S=2\int_x^{x+\Delta x}f(x)\partial x-\{f(x)+f(x+\Delta x)\}\Delta x.$$

Aus 4) und 6) erhält man auf der Stelle:

$$7) \ldots \frac{D}{S}=\frac{\{f'(x+\Delta x).\Delta x-\Delta f(x)\}\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\}}{2\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\partial x-\{f(x)+f(x+\Delta x)\}\Delta x}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist nun, wenn $\varrho$ und $\varrho_1$ wie gewöhnlich gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen bezeichnen:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2,$$

$$f'(x+\Delta x)=f'(x)+f''(x+\varrho_1\Delta x).\Delta x;$$

also:

$$f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x).\Delta x=\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2,$$

$$f'(x+\Delta x)-f'(x)=f''(x+\varrho_1\Delta x).\Delta x;$$

und folglich nach der ersten der beiden Formeln 3):

$$8) \quad \ldots \quad \mathfrak{x}-(x+\Delta x)=-\tfrac{1}{2}.\frac{f''(x+\varrho\Delta x)}{f''(x+\varrho_1\Delta x)}\Delta x.$$

Weil ferner

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$9) \; f'(x+\Delta x).\Delta x-\Delta f(x)=\{f''(x+\varrho_1\Delta x)-\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)\}.\Delta x^2;$$

und sogleich erhellet aus dem Vorhergehenden auch, dass

$$10) \; f(x)+f(x+\Delta x)=2f(x)+f'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2$$

ist.

Setzen wir jetzt allgemein

$$11) \quad \ldots\ldots \quad \int f(x)\partial x=F(x),$$

so ist

$$12) \quad \ldots \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\partial x=F(x+\Delta x)-F(x),$$

also, weil nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$F(x+\Delta x)=F(x)+F'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}F''(x).\Delta x^2+\tfrac{1}{6}F'''(x+\varrho_2\Delta x).\Delta x^3$$

ist:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\partial x = F'(x).\Delta x + \tfrac{1}{2}F''(x).\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}F'''(x+\varrho_2\Delta x).\Delta x^3.$$

Nun ist aber nach 11):

$$F'(x)=f(x),\quad F''(x)=f'(x),\quad F'''(x)=f''(x);$$

folglich:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\partial x = f(x).\Delta x + \tfrac{1}{2}f'(x).\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}f''(x+\varrho_2\Delta x).\Delta x^3,$$

woraus sich nach 10) auf der Stelle

$$13)\quad .\ .\ 2\int_x^{x+\Delta x} f(x)\partial x - \{f(x)+f(x+\Delta x)\}\Delta x$$

$$= \{\tfrac{1}{3}f''(x+\varrho_2\Delta x) - \tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)\}\Delta x^3$$

ergiebt.

Aus 7), 8), 9), 13) erhalten wir jetzt nach gehöriger Substitution der Ausdrücke 8), 9), 13) in 7):

$$\frac{D}{S} = -\frac{\{f''(x+\varrho_1\Delta x) - \frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)\}.\Delta x^2}{\{\frac{1}{3}f''(x+\varrho_2\Delta x) - \frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)\}.\Delta x^3}.\tfrac{1}{2}.\frac{f''(x+\varrho\Delta x)}{f''(x+\varrho_1\Delta x)}.\Delta x,$$

also:

$$\frac{D}{S} = -\tfrac{1}{2}.\frac{f''(x+\varrho\Delta x)}{f''(x+\varrho_1\Delta x)}.\frac{f''(x+\varrho_1\Delta x) - \frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)}{\frac{1}{3}f''(x+\varrho_2\Delta x) - \frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)}$$

oder

$$14)\quad \frac{D}{S} = \tfrac{1}{2}.\frac{f''(x+\varrho\Delta x)}{f''(x+\varrho_1\Delta x)}.\frac{f''(x+\varrho_1\Delta x) - \frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x)}{\frac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x) - \frac{1}{3}f''(x+\varrho_2\Delta x)}.$$

Lässt man jetzt $\Delta x$ sich der Null nähern, so nähern, weil $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, die Grössen $f''(x+\varrho\Delta x)$, $f''(x+\varrho_1\Delta x)$, $f''(x+\varrho_2\Delta x)$ sich sämmtlich der Gränze $f''(x)$ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade, und es ist also nach obiger Gleichung, immer unter der Voraussetzung, dass $\Delta x$ sich der Null nähert:

$$\mathrm{Lim}\frac{D}{S} = \tfrac{1}{2}.\frac{f''(x)}{f''(x)}.\frac{(1-\frac{1}{2})f''(x)}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})f''(x)},\quad \text{also}\quad \mathrm{Lim}\frac{D}{S} = \tfrac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{6}{1},$$

folglich:

$$15)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad \mathrm{Lim}\frac{D}{S} = \tfrac{3}{2},$$

welches der von Herrn Doctor Völler bewiesene allgemeine Satz von den Curven ist.

Es ist zu erwarten, dass dieser Satz zu weiteren Anwendungen Gelegenheit und Veranlassung geben wird.

---

# XXIX.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

---

Von Herrn Alexander Löffler zu Krakau.

1) Es ist zu beweisen, dass die tiefsten Punkte aller aus der Gleichung $y = ae^{\alpha+\beta x} + be^{-(\alpha+\beta x)}$ durch Variation von $\alpha$ und $\beta$ bei constanten $a$ und $b$ entstehenden Curven in einer geraden Linie liegen.

2) Welches ist die Umhüllungslinie aller Curven, die durch Variation des Parameters $\beta$ aus obiger Gleichung entstehen?

---

Von Herrn Professor Friedrich Mann an der Kantonsschule zu Frauenfeld.

1) Ist $AC$ die längste Seite eines spitz- (Taf. VI. Fig. 2.) oder stumpfwinkeligen (Taf. VI. Fig. 3.) Dreiecks $ABC$, so kann man offenbar durch $B$ innerhalb des Winkelraumes $ABC$ zwei Richtungen $BH$ und $BF$ so ziehen, dass Winkel $ABF$ = Winkel $ACB$ und Winkel $CBH$ = Winkel $BAC$ wird. Construirt man nun ein Rechteck, welches die längste Dreiecksseite $AC$ zur einen und den Abschnitt $HF$ zur andern Seite hat, so gibt dasselbe durch seinen Flächeninhalt an, um wie viel das Quadrat über der längsten Dreiecksseite $AC$ kleiner oder grösser sei als die Summe der Quadrate über den beiden andern Dreiecksseiten $AB$ und $BC$.

2) Ruft man auf den beiden andern Dreiecksseiten $AB$ und $BC$ die Abschnitte $BE$ und $BD$ dadurch hervor, dass man von den Ecken $A$ und $C$ Senkrechte auf die gegenüberstehenden Dreiecksseiten (Taf. VI. Fig. 2.) oder deren Verlängerungen (Taf. VI. Fig. 3.) fällt, so gilt der Satz:

Rechteck aus der längsten Dreiecksseite $AC$ und dem auf ihr liegenden Abschnitt $HF$ gleich Rechteck aus der zweiten Dreiecksseite $AB$ und ihrem Abschnitt $DB$ plus dem Rechteck aus der dritten Seite $BC$ und dem ihr zugehörigen Abschnitt $BE$.

---

# XXX.

## Miscellen.

---

### Ueber die neuesten optischen Arbeiten und Untersuchungen des Herrn Ministerial-Raths v. Steinheil in München.

Von dem Herausgeber.

Der grossen Wichtigkeit der neuesten optischen Arbeiten des Herrn Ministerial-Raths v. Steinheil in München, und des grossen Interesses wegen, welches dieselben gewähren, zugleich mit Rücksicht auf die grossen Fortschritte der wissenschaftlichen und praktischen Optik, welche dieselben versprechen, lasse ich die folgenden Auszüge aus den Gelehrten Anzeigen der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften in München und aus der Allgemeinen Zeitung hier abdrucken, um diesen so höchst verdienstlichen Arbeiten eine möglichst grosse Publicität zu geben und die Leser des Archivs auf dieselben aufmerksam zu machen. G.

#### I.

#### Ueber Verbesserung der Objective. *)

(Vortrag des Herrn Ministerial-Raths C. A. Steinheil.)

Wenn ich erst heute, nach einer Unterbrechung von mehreren Jahren, wieder die Aufmerksamkeit der geehrten Classe in Anspruch nehme, um über den Fortgang meiner optischen Untersuchungen zu berichten, so findet diess in dem Umstande seine Erklärung, dass eine grosse Masse von Erfahrungen gesammelt werden musste, um den Punkt kennen zu lernen, auf dem die

---

*) Aus den Gel. Anzeigen der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften in München Nr. 32. und 33. 1856 besonders abgedruckt.

ausübende Optik gegenwärtig steht, weil erst von diesem aus Neues mit Erfolg herbeigeführt werden kann.

Ich glaube jetzt der sehr geehrten Versammlung ein Ergebniss vorlegen zu können, was einen neuen Abschnitt in der Dioptrik herbeiführen dürfte, indem ich Mittel gefunden habe, die Fehler des Objectives in höherer Ordnung aufzuheben. Um aber dieses Resultat in Zusammenhang mit den bisherigen Fortschritten der Optik zu bringen, sei es mir gestattet, die successiven Verbesserungen des Objectives auf allgemeine Gesichtspunkte zu bringen.

Alle wesentlichen Verbesserungen des Fernrohres waren, bewusst oder unbewusst, stets nur darauf gerichtet, seine Länge zu vermindern. Denn die Fehler aller Art im Bilde einer einfachen positiven Glaslinse können beliebig klein gemacht und unter die Empfindlichkeit des Auges gebracht werden, wenn die Oeffnung dieser Linse auf das entsprechende Mass reduzirt wird. Dieses einfachste Fernrohr bekömmt aber schon für einige Zoll Oeffnung eine so ungeheure Länge, dass alle praktische Anwendbarkeit aufhört. Eine neue Epoche für die Dioptrik trat daher ein durch Dollond's Erfindung des achromatischen Objectives. Aber alle grössern Dollond'schen Fernrohre haben noch mehr als die doppelte Länge der Fraunhofer'schen, und müssen diese haben, wenn die Angulär-Abweichungen im Bilde gleich gross werden sollen. Das Fraunhofer'sche Objectiv bildet daher einen wesentlichen Fortschritt im Vergleich mit den englischen. Dies wollen wir näher begründen. Es lässt sich nämlich zu jeder positiven Crownglaslinse eine negative Flintglaslinse finden, welche mit ihr — im gewöhnlichen Sinne des Wortes — ein achromatisches Objectiv bildet, d. h. welche zwei Strahlen von mittlerer Brechbarkeit und einen dritten von anderer Brechbarkeit, die parallel zur Axe des Objectives einfallen, in einem Punkt in der Axe zusammenführt. Ist nun einer dieser mittlern Strahlen der Axe des Objectivs unendlich nahe der andern an den Rand des Objectivs gelegt, und man untersucht, immer unter der Voraussetzung sphärischer Gestalten und homogener Brechung der Glasarten, die Lage dieser Strahlen mittlerer Brechbarkeit zwischen Axe und Rand, so treffen sie, wie man ein bestimmtes Oeffnungsmass des Objectives überschreitet, nicht mehr mit dem Durchschnitte des Axen- und Randstrahls zusammen, sondern sie schneiden die Axe früher und es hängt jetzt nur von der Gestalt der Crownglaslinse ab, wie gross diese Abweichung, die, wie Gauss gezeigt hat, in $\frac{3}{4}$ der Oeffnung ihr Maximum hat, überhaupt werden soll. Diese Abweichung kann daher als das Oeffnungsmass

eines Objectives betrachtet werden. Denn die grösstmögliche Oeffnung für ein Doppelobjectiv wird diejenige sein, bei welcher diese Abweichung ein Minimum wird. Die absolute Grösse, welche sie erreichen darf, hängt von der verlangten Vergrösserung ab und muss stets so gewählt werden, dass der durch das Okular vergrösserte Angulärfehler nicht 45″ oder die Empfindlichkeit des Auges übersteigt. Hieraus erklärt sich, wesshalb kleine Fernröhre verhältnissmässig grössere Oeffnungen als grosse ertragen. Fraunhofer war es vorbehalten, diesen Zusammenhang zu erkennen. Sein Objectiv beruht nicht auf den Bedingungen, die Herschel u. A. zu Grunde legten, sondern lediglich darauf, die der Axe parallel einfallenden Strahlen mittlerer Brechbarkeit in einem Punkte zu vereinigen, oder nur solche Abweichungen zu statuiren, die mit Rücksicht auf die Vergrösserung unter der Grenze der Sensibilität des Auges bleiben. So kann man also sagen, Fraunhofer's Objectiv hat die grösstmöglichste Oeffnung oder sein Fernrohr ist bei gegebener Oeffnung möglichst kurz.

Untersucht man nun in Fraunhofer's Objectiv auch die Lage der Strahlen einer andern Brechbarkeit oder den sogenannten farbigen Strahl, so lässt sich dieser nur in einem Punkte mit den mittlern Strahlen vereinigen. Bewirkt man z. B. diese Vereinigung für $\frac{2}{3}$ der Oeffnung des Objectives, so schneidet der farbige Randstrahl später, der farbige Axenstrahl früher als die mittleren die Axe, und da über alle Elemente des Objectives bereits disponirt ist, bleibt keine Möglichkeit, auch diesen über die ganze Oeffnung des Objectives mit den mittlern Strahlen zusammen zu bringen.

Dieser Fehler des Fraunhofer'schen Objectives oder, wenn man will, des besten möglichen Doppelobjectives lässt sich nur auf Kosten der Oeffnung vermindern. Gauss hat zwar ein Objectiv berechnet, welches parallel zur Axe einfallende Strahlen am Rand und in der Axe, und zwar von zweierlei Brechbarkeit, also vier Strahlen in einem Punkte vereinigt. Er zeigt aber selbst, dass dann eine beträchtliche Abweichung für die Strahlen in $\frac{2}{3}$ der Oeffnung eintritt. Wollte man diese verschwindend klein machen, was sich stets erreichen lässt, da die Abweichung nahe biquadratisch mit der Oeffnung abnimmt, so würde letztere so sehr vermindert, dass auch, abgesehen von andern Uebelständen, diese Construction der Fraunhofer'schen weit nachstünde.

Eine Verbesserung gegen das Fraunhofer'sche Objectiv wäre sonach nur dadurch zu erreichen, dass man den farbigen Strahl über die ganze Oeffnung zu den mittlern Strahlen brächte, ohne dabei eine Abweichung für die $\frac{2}{3}$ Strahlen entstehen zu las-

sen, was natürlich mehr als zwei Linsen erfordert. Sollte aber zugleich die Oeffnung beträchtlich grösser werden als bei Fraunhofer, so müsste gleichzeitig die Abweichung der $\frac{2}{3}$ Strahlen mit denen des Randes und der Axe, und zwar für zweierlei Brechbarkeit gehoben werden, was die Annahme von vier Linsen bedingt.

Diese Aufgabe habe ich nun gelöst durch ein Objectiv, welches aus zwei Crownglas- und zwei Flintglas-Linsen besteht. Dieses Objectiv vereinigt Strahlen, welche parallel zur Axe einfallen, für zweierlei Brechbarkeit am Rande, in $\frac{2}{3}$ und in der Axe, also sechs Strahlen. Es kann betrachtet werden als bestehend aus einer Crownglaslinse, deren Farben- und Gestaltfehler in drei verschiedenen Abständen von der Axe aufgehoben werden durch ein nachfolgendes negatives Objectiv, was aus zwei Flintgläsern und einem Crownglas zusammengesetzt ist. Das negative Objectiv hat jedoch eine weit grössere Brennweite, als die Crownglaslinse, obschon die Fehler in beiden gleich gross und nur im Zeichen entgegengesetzt sind. Farben und Gestalt sind sonach bei diesem Objective in höherer Ordnung gehoben, als bei den jetzigen *). Setzt man die Oeffnung $\frac{1}{6}$ der Brennweite, so treten wieder Abweichungen noch höherer Ordnung hervor zwischen Rand und $\frac{2}{3}$ und zwischen $\frac{2}{3}$ und Axe. Aber sie betragen nicht 0".2 Bogensekunde und sind daher für eine 200malige Vergrösserung erst an der Grenze der Wahrnehmbarkeit des Auges. Sollte die Vergrösserung stärker werden, so müsste die Oeffnung kleiner sein. Ein Fernrohr von 3 Zoll Oeffnung wird mit diesem Objective nur 18 Zoll Länge bekommen. Ein 4zölliger Refraktor wird 2 Fuss lang, während er jetzt 5 Fuss lang ist. Das Bild aber dieser neuen Fernröhre unterscheidet sich von dem der jetzigen dadurch wesentlich, dass man auch beim Schwanken mit dem Auge keine farbigen Bildersäume bekömmt, da das Objectiv halb verdeckt werden kann, ohne dass Farben sichtbar werden. Ich brauche nicht erst darauf aufmerksam zu machen, welche Vortheile aus der Benutzung dieser Fernröhre für die Messinstrumente hervor-

*) Wollte man das negative Objectiv bloss aus zwei Linsen, Crown und Flint, construiren, so könnten entweder nur die mittlern Strahlen in $\frac{2}{3}$ oder nur die Farben mit Axe und Rand vereinigt werden, immer unter der Voraussetzung, dass die Gestalt der positiven zu compensirenden Crownglaslinse willkührlich bleibt. Letzteres ist durchaus nöthig, um nicht, wie Gauss, auf wenig Wurzelwerthe beschränkt zu werden, deren Brauchbarkeit durch anderweitige Rücksichten oft problematisch bleibt. So aber ist stets eine ganze Reihe von Objectiven möglich, von welchen jedes sämmtlichen Bedingungen entspricht. Unter diesen muss dann dasjenige gewählt werden, was das grösste Oeffnungsmass bekömmt.

gehen werden. Denn mit der optischen Kraft wächst bekanntlich die Genauigkeit der Messung.

Allein es sei mir gestattet, hier noch mit einigen Worten der Anwendung dieses Principes auf Mikroskope zu erwähnen.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass durch Verkürzung der Brennweiten die Fernröhre nur an Anwendbarkeit gewinnen. Ganz anders verhält es sich aber bei den Mikroskopen. Hier nimmt die Wirkung caet. par. direkt mit dem Oeffnungsmasse zu. Ein Mikroskop von 20° Licht lässt keine Spur von dem erkennen, was bei 40° Licht mit derselben Vergrösserung sichtbar wird. Aber unsere besten Mikroskope von 100 bis 150° Licht lassen so beträchtliche Gestaltfehler, dass sie zu organischen Untersuchungen schlechterdings untauglich sind. Nach demselben Princip wie bei den Fernröhren kann ich nun Mikroskop-Objective construiren, welche aus zwei vierfachen Objectiven bestehen und nicht nur die Gestalt- und Farbenfehler in drei, sondern in fünf verschiedenen Abständen von der Axe aufheben. Wird nun zugleich bei solchen Objectiven der absolute Masstab vergrössert, so dass dieselben nicht wie jetzt 1 Linie, sondern 10 Linien Oeffnung erhalten, so wird der Beugungsfehler 10mal kleiner und die sphärischen Gestalten werden bei derselben absoluten Fehlergrenze 10mal genauer. Es ist zwar die Durchführung dieser neuen Mikroskope noch eine erhebliche Arbeit, allein sie steht nicht im Vergleich zu der ersten hier gelieferten, und so hoffe ich, der sehr geehrten Classe die ausgeführten Instrumente, Fernrohr und Mikroskop, bald vorlegen zu können.

Schliesslich erfülle ich eine angenehme Pflicht, indem ich anführe, dass diese umfangreichen Rechnungen nur unter meiner Mitwirkung von meinem Sohne Dr. Adolph Steinheil durchgeführt wurden.

## III.

## Sitzung der mathematisch-physikalischen Classe der k. Akademie der Wissenschaften zu München vom 12. Juni 1858 *).

1) Herr Ministerialrath Dr. Steinheil legte der Classe ein Teleskop vor, welches durch Silberspiegel auf Glas wirkt

*) Aus den Gelehrten Anzeigen der k. Akademie der Wissenschaften. Bd. XLVI. Nr. 68.

und auch darin neu ist, dass die sphärische Abweichung des grossen Spiegels durch ein negatives achromatisirendes Objectiv streng gehoben ist. Der Teleskopspiegel hat 3 Pariser Zoll freie Oeffnung und nur 18 Zoll Brennweite. Das compensirende Objectiv greift 2 Zoll vom Brennpunkte aus gegen den Spiegel in den Lichtconus ein, und bewirkt, dass von hier aus das Verhältniss der Vereinigungsweite zur Oeffnung wie 12:1, also eben so wird, wie es jetzt bei Fernröhren oft hergestellt wird. Dadurch geben die nun üblichen Okulare, ungeachtet der bis jetzt noch nie erlangten Kürze des Instrumentes, dennoch dieselben Vergrösserungen, als wenn der Teleskopspiegel 36 Zoll Brennweite hätte. Unmittelbar hinter dem Corrections-Objectiv, was 9 Linien Oeffnung hat und verkittet ist, steht der kleine Planspiegel in direkter Verbindung mit dem Okularträger, der sich längs des Rohres in Mikrometerschlitten bewegt. Dieses Teleskop entspricht vollständig den Erwartungen, die Herr Steinheil in einem Schreiben an Director Peters, den Herausgeber der astronom. Nachrichten, ausspricht, wie in Nr. 1138. dieser Zeitschrift zu lesen ist. Der Lichtverlust des nach Liebig's Methode versilberten grossen Spiegels beträgt nur 9 Procent. Die Dicke der Silberschichte ergibt sich nach Messungen mit einem neuen Steinheil'schen Sphärometer, der 3 Milliontel einer Linie noch deutlich zeigt, zu ein dreissigtausentel Linie. Durch die Silberschichte sieht man das Sonnenbild wie durch ein blaues Moderationsglas als scharf begrenzte Scheibe, und es lässt die gleichmässige Intensität des Sonnenbildes, durch alle Theile des Spiegels betrachtet, erkennen, dass sich die Dicke der Metallschichte wohl nirgend um ihren zehnten Theil ändert. Es bildet daher der Metallüberzug des Glasspiegels mit der polirten Glasfläche eine Aequidistante, die nirgend von der Gestalt des Spiegels mehr als ein dreimal hunderttausentel einer Linie abweicht und somit auch bei den strengsten Anforderungen an Gestalt der Flächen, selbst für die grössten Instrumente genügen würde. Was die Reinheit, Farblosigkeit und Schärfe des Bildes dieses Teleskopes anbelangt, so übertrifft es darin die allerbesten Achromaten so eminent, dass der erste Blick keinen Zweifel lässt. Namentlich ist dadurch der Eindruck sehr angenehm, dass auch beim Schwanken des Auges keine Spur von Farbe sichtbar wird, während alle Fernröhre der Welt farbige Säume zeigen, sobald der Lichtbüschel die Pupille nur theilweise trifft, da kein Achromate ein unsymmetrisches Verdecken des Objectives erträgt. Dieses Teleskop wird sich also auch ganz besonders zu Heliometern eignen.

Ueberhaupt ist die Tragweite dieses neuen optischen Prinzipes noch nicht abzusehen, da mit einem sehr geringen Aufwand

von mechanischer Arbeit ganz vollendete Bilder erzielt werden. Diese stehen zwar jetzt in der Helligkeit bei gleicher Oeffnung noch etwas ($^1/_{22}$tel) gegen die Achromaten zurück. Allein sie können dagegen bei sehr kurzen Längen eine ungemein grosse optische Kraft erhalten. Herr Steinheil lässt jetzt ein 6zölliges Teleskop dieser Art ausführen, was nur 33 Zoll lang ist, leicht getragen und am Fenster benutzt werden kann, und in der Wirkung einem Refractor wenigstens gleich kömmt, der 8 Fuss Brennweite hat und nur auf Sternwarten benutzt werden kann. Bedenkt man überdiess, dass diese Instrumente bei gleicher Leistung wohl nicht die Hälfte im Vergleich zu jetzigen Achromaten kosten werden und, dass sie diesen an Dauerhaftigkeit nicht nachstehen, da durch das Glas die genaue Gestalt für alle Zeiten erhalten wird, neue Versilberung aber nicht mehr Mühe kostet, als das Reinigen des Objectives, was auch jährlich vorgenommen werden muss, so scheint durch die Anwendung der Silberspiegel dem Freunde der Astronomie, so wie dem Manne des Faches, der Gebrauch mächtiger Instrumente unter allen Verhältnissen ermöglicht zu sein. Herr Steinheil verspricht schliesslich, der Classe demnächst ein katadioptrisches Mikroskop vorzulegen, was nach ähnlichen Prinzipien wie dieses Teleskop berechnet und construirt sei.

2) Ebenderselbe hat in Folge einer Anregung des Herrn Professor Seidel und mit Genehmigung des hohen Ministeriums für die mathematisch-physikalische Sammlung des Staats ein 4zölliges parallaktisch montirtes Fernrohr anfertigen lassen, was mit einem neuen Okularphotometer versehen, bestimmt ist, die Helligkeitsmessungen der Sterne bis zur 7. Grössenklasse zu ermöglichen. Dieses Instrument, welches Herr Steinheil der Classe hiemit vorzeigte, soll an Herrn Professor Seidel auf 3 Jahre zur freien Benutzung übergeben werden, um denselben in den Stand zu setzen, seine schönen und nützlichen Arbeiten in der Photometrie des Himmels auch auf kleinere Sterne auszudehnen, als das bisher benutzte Instrument von Herrn Steinheil, was nur 13 Linien Oeffnung hat, gestattete.

Diesem Photometer liegt die Idee zu Grunde, je zwei Sterne durch Zuziehung eines dritten, der während der zwei Vergleichungen seine Helligkeit nicht ändert, zu bestimmen. Hiedurch ist es möglich geworden, ohne auf die Elimination der Helligkeit des Grundes zu verzichten, auf dem die beiden Sterne erscheinen, den Apparat in eine blosse Okularvorrichtung umzugestalten. Diese lässt sich an jedem Fernrohre anbringen, womit die Schwierigkeit entfernt ist, die bisher bestand, dass nämlich zu solchen

Messungen ein dazu ausschliesslich bestimmtes Instrument erforderlich war.

Indessen gestattet auch dieses Instrument nicht, die kleinsten Sterne, die es zeigt, in Helligkeit mit einander zu vergleichen, weil ein schwacher Stern verschwindet, wenn er in eine Lichtfläche ausgedehnt wird. Dieser Nachtheil trifft die Methode und ist nicht zu entfernen durch Benutzung grosser Instrumente. Denn auch bei diesen werden immer noch circa 5 Grössenklassen weiter sichtbar sein, als verglichen werden können. Die Messungen durch Lichtflächen werden sich somit nie bis zu den kleinsten Sternen ausdehnen lassen, die unsere Instrumente noch zeigen. Um die kleinsten sichtbaren Sterne zu vergleichen, muss die Vergleichung nothwendig im Bilde vorgenommen werden. Allein alle bisherigen Versuche der Art haben zu keinem Erfolge geführt, und konnten es auch nicht, weil man immer darauf ausging, dem hellern Stern durch Verengung des Objectives Licht zu entziehen, um ihn gleich hell mit dem kleinern zu machen. Dadurch aber wird das Beugungsscheibchen nothwendig um so grösser, je kleiner die Objectivöffnung wird. In demselben Masse wird aber auch die Beleuchtung des Scheibchens matter, so dass man einen matten Lichtkreis in Helligkeit zu vergleichen hätte mit einem durchmesserlosen stechenden Lichtpunkte. Da die beiden Erscheinungen durchaus keine Aehnlichkeit haben, ist es klar, dass alles Urtheil über gleich hell aufhört, und dass sie auf diese Weise, die übrigens von Humboldt, Herschel, Gerling u. A. vielfach angewandt wurde, nicht sicher zu vergleichen sind.

Zwei Sterne sind offenbar nur dann als gleich in Helligkeit zu beurtheilen, wenn ihre Beugungsscheiben gleich gross sind. Soll daher ein Vergleichungsstern hergestellt werden, dessen Beugungsscheibchen im Durchmesser abnimmt mit der Helligkeit und dieser proportional, so muss das Verhältniss der Oeffnung und Brennweite des Objectives, welches ihn zeigt, dasselbe bleiben, wie bei dem Stern, den das Hauptfernrohr zeigt, und die Verminderung des Lichtes muss jedes kleinste Element des Objectives treffen. Denn auch auf diese Art würden aus beiden zu vergleichenden Sternen gleich grosse Lichtflächen von gleicher Grundhelligkeit, wenn man beide Lichtconus in gleichem Abstand vom Bilde betrachtet, und daher müssen auch im Bilde selbst die zwei Sterne noch als gleich hell erscheinen.

Diese Bedingung hat nun Herr Steinheil erfüllt durch Anbringung eines Fernrohres, was um so mehr verkleinert, je weiter sein gegen den Vergleichungsstern gerichtetes Okular herausgezogen wird, und es gibt die Verstellung des Okulares das

Mass für die Verminderung der Helligkeit. Auf diese Weise lassen sich die Sterne im Bilde eben so sicher vergleichen, als durch Lichtscheiben, weil man auch hier bei gleicher Helligkeit der Fläche, aber bei gleicher Grösse derselben vergleicht, die Vergleichung somit auf dasselbe Prinzip zurückgeführt ist.

Dieses neue Photometer besteht bloss in einem eigens construirten Okular und lässt sich bequem an jedem Fernrohre ohne alle Abänderung anwenden, so dass die Bestimmung der kleinen Sterne, die ihrer grossen Anzahl wegen viele Beobachter fordert, die sich in die Arbeit theilen, von Jedem vorgenommen werden kann, der im Besitze eines Fernrohres ist.

Herr Steinheil glaubt seine Methode der Bestimmung der Lichtmengen der Sterne durch diesen neuen Beitrag wesentlich vervollständigt zu haben, da erst jetzt alle Sterne vergleichbar sind, und wird eine ausführliche Beschreibung des neuen Apparates mit Abbildung für die Denkschriften bearbeiten, da auch seine erste Arbeit über diesen Gegenstand: „Elemente der Helligkeitsmessungen" in den Denkschriften gedruckt ist.

## III.

## Telescope mit Silberspiegeln auf Glas *).

München. In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Classe unserer Akademie der Wissenschaften vom 12. d. M. legte der Akademiker Ministerialrath v. Steinheil ein in seiner Werkstätte ausgeführtes Teleskop mit Silberspiegeln auf Glas vor, das von so überraschender Wirkung ist, dass dieser neue Gegenstand, der eine grosse Zukunft für die Instrumental-Astronomie erwarten lässt, wohl in weiteren Kreisen Interesse erregen dürfte.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass das Newton'sche Spiegelteleskop vom Standpunkt der Theorie aus ungemeine Vorzüge vor dem Fernrohr besitzt, weil seine Theorie streng richtig ist, und daher auch mehr leisten muss, als die vollendetste Dioptrik. Denn hier wird der Lichtstrahl nicht in seine Farben zerlegt, wie bei der Durchdringung der Glaslinsen. Es entstehen also jene Farbensäume der Bilder gar nicht, deren Hebung in der Dioptrik die grösste Schwierigkeit bildet, und die nie vollständig gelingt, namentlich bei grossen Refractoren unvermeidlich bleibt.

*) Aus der Beilage zu Nr. 175. (24. Juni 1858) der Allgemeinen Zeitung.

Aber die Teleskope hatten so grosse Mängel anderer Art im Vergleich zu den Refractoren, dass sie bei uns in Deutschland (etwa mit Ausnahme von Lilienthal) eigentlich nie Eingang fanden. Nur in England, dem Lande, wo sie erfunden wurden, hat man sie mit Erfolg in der Wissenschaft benutzt. Die Mängel der Spiegelteleskope, die bisher alle Talente dieser Sphäre abschreckten, ihre Kräfte der Verbesserung dieser Instrumente zu widmen, und sie veranlassten, sich der Dioptrik zuzuwenden, sind nun hauptsächlich folgende: 1) beträgt der Lichtverlust bei Reflexion von Metallspiegeln 33 Procent und mehr, so dass ein Teleskop, das zweimalige Reflexion des Lichts fordert, 55 Procent des einfallenden Lichts absorbirt, und also fast doppelt so grossen Durchmesser als ein Fernrohr nöthig hat, um gleichviel zu leisten. 2) Ein noch schlimmerer Uebelstand bei den Spiegelteleskopen ist ihre geringe Dauerhaftigkeit. Sehr bald laufen die Spiegel durch Einwirkung von Gasarten an, und ein Aufpoliren, um sie zu reinigen, hat in der Regel den Untergang der genauen Gestalt des Spiegels und damit seiner Leistung zur Folge. Ausserdem aber zeigen 3) die Spiegelteleskope nie so scharf als die Refractoren, weil die sphärische Abweichung des Spiegels hier nicht so, wie bei den Fernröhren vernichtet werden kann.

Das vorgezeigte Steinheil'sche Teleskop ist nun frei von diesen Mängeln. Eine dem Anschein nach unbedeutende chemische Erfindung hat die Entfernung aller Mängel des Teleskops ermöglicht, und ist also von unberechenbarem Nutzen für Optik und Astronomie. Liebig's Versilberung polirter Glasflächen, nach einer neuen, bis dahin noch nicht veröffentlichten Methode, ist nämlich so überaus gleichmässig und dünn, dass die Metallseite der Versilberung eine vollkommene Aequidistante der Glasfläche bildet und durch blosses Abreiben mit weichem Leder zum hochpolirten Spiegel wird. Dabei haftet diese höchst dünne Silberschicht so fest an dem Glas, dass der Spiegel selbst hohen Temperaturen ausgesetzt werden kann, ohne sich wie die bisherigen ähnlichen Versilberungen abzulösen. Nach Messungen von Steinheil ist der Lichtverlust dieser Silberspiegel unter 45° nur 9 Proc. (S. Astron. Nachr. Nr. 1138.) Er beträgt also bei zweimaliger Reflexion nur 17 Proc., während ein Frauenhofer'sches Objectiv 23 Proc. Lichtverlust hat. Teleskope mit Silberspiegeln stehen sonach den Fernröhren gleicher Oeffnung in Helligkeit nicht nach. Nun hat aber Steinheil auch Mittel gefunden, die sphärische Abweichung der Spiegel durch ein kleines negatives Objectiv, das einen Theil des Oculars bildet, in aller Strenge, wie bei den Refractoren, aufzuheben, so dass die Deutlichkeit des neuen Spiegelteleskops selbst die der besten Fernröhre über-

trifft, weil keine Spur von farbigen Säumen an den Bildern sichtbar wird. Die mit einer Silberschicht von der Dicke eines Dreissigtausendstels einer Linie belegte, genau sphärisch polirte Glasfläche des Spiegels bleibt sonach stets geschützt durch die Silberschicht. Selbst wenn diese mit der Zeit anläuft und durch Abreiben mit Leder wieder rein gemacht werden muss, bleibt die Glasfläche unberührt, und damit die genaue Gestalt erhalten. Ja, wenn selbst mit der Zeit die Versilberung des Spiegels erneuert werden muss, so ist dazu nicht mehr Mühe und Vorsicht erforderlich, als jetzt beim Reinigen der Objective. Diese Teleskope sind also wenigstens eben so dauerhaft als Refractoren. Sie bieten aber noch andere wesentliche Vortheile. Es kann nämlich die Oeffnung im Verhältniss zur Brennweite viel grösser als bei Fernröhren gemacht werden. Das vorgelegte Teleskop hat 3 Zoll Oeffnung und 18 Zoll Brennweite, während es in der Leistung einem dreizölligen Fernrohr von 42 Zoll Brennweite sehr nahe gleichkommt. Ein sechszölliges Teleskop bekommt nur 33 Zoll Länge, und bleibt somit leicht transportabel und am Fenster benutzbar, während die Anwendung eines sechszölligen Refractors gleicher Leistung eine Sternwarte erfordert.

Endlich ist die Herstellung dieser Teleskope einfach im Verhältniss zu der der Refractoren, und ganz unabhängig von homogenem wellenfreien Glas, so dass die Preise, im Vergleich mit denen der Refractoren von gleicher Leistung von Merz, kaum ein Viertel betragen werden. Diese Vortheile sind so erheblich, dass wir hoffen dürfen, die Silberspiegel-Teleskope bald eingeführt zu sehen. Sie scheinen nicht nur geeignet, in der Wissenschaft Anwendung zu finden, sondern sie werden auch den Freund der Astronomie in den Stand setzen, die Wunder des Himmels sich ohne grosse Opfer näher als bisher ansehen zu können.

---

## Schreiben des Herrn Dr. Völler, Lehrer an der Realschule zu Saalfeld, an den Herausgeber.

Da der im dritten Hefte des 30sten Theils Seite 355. von Ihnen erwähnte und zugleich bewiesene geometrische Lehrsatz im vierten Hefte dieses Theils Seite 479. durch Herrn Professor Dr. König bereits eine andere Lösung gefunden, so erlaube ich mir, auf Ihre frühere, noch nicht beantwortete Frage: „Wie lässt sich dieser Satz einfacher, etwa mittelst des ptolemäischen Lehrsatzes, beweisen?“ — folgende Mittheilung zu machen:

Man lege um das Dreieck $abc$ (Taf. VI. Fig. 4.) einen Kreis, ziehe eine beliebige Linie $cd$, verlängere dieselbe bis zur Peripherie und verbinde dann noch die Punkte $a$ und $b$ mit $f$, so ist nach dem ptolemäischen Lehrsatze:

$$ac.bf + bc.af = ab.cf. \quad (1)$$

Da aber $\triangle adf \backsim \triangle bcd$ und $\triangle acd \backsim \triangle bdf$, so verhält sich:

$$af : ad = bc : cd$$

und

$$bf : bd = ac : cd.$$

Mithin ist:

$$af = \frac{bc.ad}{cd}, \quad bf = \frac{ac.bd}{cd}.$$

Substituirt man diese Werthe, so muss No. (1) in

$$\frac{ac^2.bd}{cd} + \frac{bc^2.ad}{cd} = ab.cf,$$

d. i. in

$$ac^2.bd + bc^2.ad = ab.cf.cd \quad (2)$$

übergehen. Aus leicht zu begreifenden Gründen ist indess:

$$cf.cd = cd^2 + cd.df,$$

also

$$ac^2.bd + bc^2.ad = ab.(cd^2 + cd.df),$$

oder

$$ac^2.bd + bc^2.ad - cd^2.ab = ab.cd.df.$$

Es ist aber nun:

$$cd.df = ad.db,$$

weil $\triangle adf \backsim \triangle bdc$. Folglich ist:

$$ac^2.bd + bc^2.ad - cd^2.ab = ab.ad.bd, \quad (3)$$

w. z. b. w.*)

*) Ich danke dem Herrn Verfasser sehr für diese Mittheilung, da er meine Vermuthung, dass der Satz sich am besten mittelst des Ptolemäischen Satzes müsse beweisen lassen, sehr schön bestätigt. G.

Von dem Herausgeber.

### Aufgabe.

**Ein rechtwinkliges ebenes Dreieck zu bestimmen, dessen Seiten in stetiger Proportion stehen, und worin eine Seite die gegebene Grösse $a$ hat.**

Die drei Seiten des zu bestimmenden Dreiecks seien $x, y, z$. Nach den Bedingungen der Aufgabe soll die eine Seite die mittlere Proportionale zwischen den beiden anderen sein. Wir wollen annehmen, dass dies die Seite $y$ sei, und demzufolge

1) . . . . . . . . $x:y=y:z$

setzen. Da wir diese Proportion auch unter der Form

$$z:y=y:x$$

schreiben können, so ist es offenbar gleichgültig, welche von den beiden Seiten $x, z$ als die kleinere und welche als die grössere angenommen wird; denn einander gleich können beide als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks offenbar nicht sein, weil dann vermöge obiger Proportion augenscheinlich $x=y=z$ sein müsste, das Dreieck folglich gleichseitig sein würde. Wir wollen daher grösserer Bestimmtheit wegen von jetzt an voraussetzen, dass von den beiden Seiten $x, z$ die erstere die grössere sei. Dann liefert uns der pythagoräische Lehrsatz die Gleichung

2) . . . . . . . . $x^2 \pm z^2 = y^2$,

also nach 1) die Gleichung

3) . . . . . . . . $x^2 \pm z^2 = xz$.

Nun soll eine der drei Seiten die Grösse $a$ haben. Es kann also $x=a$ oder $y=a$ oder $z=a$ gesetzt werden.

I. Setzen wir $x=a$, so wird vorstehende Gleichung 3):

4) . . . . $a^2 \pm z^2 = az$, $z^2 \mp az = \mp a^2$;

woraus

$$(z \mp \tfrac{1}{2}a)^2 = \begin{cases} -\tfrac{3}{4}a^2 \\ +\tfrac{5}{4}a^2 \end{cases}$$

folgt. Also sind bloss die unteren Zeichen zulässig, folglich

$$z+\tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{5},$$

also

$$z = \pm \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5} \mp 1)$$

zu setzen, wo offenbar, weil $z$ seiner Natur nach positiv ist, nur die oberen Zeichen zulässig sind, und daher

$$z = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1),$$

folglich, weil $y^2 = xz = az$ ist,

$$y = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

gesetzt werden muss. Wir haben daher die Auflösung:

$$x = a, \quad y = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad z = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}-1);$$

die den Gleichungen

$$x = a, \quad xz = y^2, \quad x^2 - z^2 = y^2$$

entspricht.

II. Setzen wir $z = a$, so wird die Gleichung 3):

5) . . . . $x^2 \pm a^2 = ax, \quad x^2 - ax = \mp a^2;$

woraus

$$(x - \tfrac{1}{2}a)^2 = \begin{cases} -\tfrac{3}{4}a^2 \\ +\tfrac{5}{4}a^2 \end{cases}$$

folgt, also wieder bloss die unteren Zeichen zulässig sind. Folglich ist

$$x - \tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{5},$$

also

$$x = \tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5}),$$

worin man bloss das obere Zeichen nehmen kann, weil sonst $x$ negativ werden würde, und daher

$$x = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1)$$

setzen muss. Wir haben daher, weil $y^2 = xz = ax$ ist, folgende Auflösung:

$$x = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}+1), \quad y = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \quad z = a,$$

welche den Gleichungen:

$$x^2 - z^2 = y^2, \quad xz = y^2, \quad z = a$$

entspricht.

III. Setzen wir $y=a$, so wird die Gleichung 3), mit Rücksicht auf die Gleichung $xz=y^2=a^2$:

$$6) \quad \ldots \ldots \quad x^2 \pm z^2 = \mp a^2, \quad xz = a^2.$$

Aus diesen Gleichungen würde folgen:

$$x^2 \pm z^2 - 2xz = \mp - a^2,$$

folglich für das obere Zeichen:

$$(x-z)^2 = -a^2,$$

was ungereimt ist. Also ist bloss das untere Zeichen zulässig, und daher zu setzen:

$$x^2 - z^2 = a^2, \quad xz = a^2.$$

Also ist

$$x^2 - \frac{a^4}{x^2} = a^2, \quad x^4 - a^2x^2 = a^4;$$

folglich

$$(x^2 - \tfrac{1}{2}a^2)^2 = \tfrac{5}{4}a^4,$$

woraus

$$x^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \pm \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{5}, \quad x^2 = \tfrac{1}{2}a^2(1 \pm \sqrt{5})$$

folgt, und daher offenbar bloss das obere Zeichen zulässig ist. Mit Rücksicht darauf, dass $x$ positiv sein muss, ist also

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

folglich

$$z = \frac{a^2}{x} = \frac{a}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}} = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Wir haben daher folgende Auflösung:

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \quad y = a, \quad z = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};$$

welche den Gleichungen

$$x^2 - z^2 = y^2, \quad y = a, \quad xz = y^2$$

entspricht.

Wir haben also, wenn von den drei Seiten $x, y, z$ die zweite $y$ die mittlere Proportionale zwischen den beiden anderen $x, z$

bezeichnen, und von diesen letzteren $x$ die grössere sein soll, die drei folgenden Auflösungen:

$$\text{I.}\quad x=a,\quad y=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\quad z=\tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}-1);$$

$$\text{II.}\quad x=\tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}+1),\quad y=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},\quad z=a;$$

$$\text{III.}\quad x=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},\quad y=a,\quad z=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};$$

welche den Gleichungen:

$$\text{I}^*.\quad x=a,\quad xz=y^2,\quad x^2-z^2=y^2 \text{ oder } y^2+z^2=x^2;$$

$$\text{II}^*.\quad x^2-z^2=y^2 \text{ oder } y^2+z^2=x^2,\quad xz=y^2,\quad z=a;$$

$$\text{III}^*.\quad x^2-z^2=y^2 \text{ oder } y^2+z^2=x^2,\quad y=a,\quad xz=y^2$$

entsprechen.

Durch eine einfache Probe kann man sich von der Richtigkeit der vorstehenden Resultate überzeugen. Die Hypotenuse ist nach den vorstehenden Gleichungen immer $x$, was sich auch von selbst versteht, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar $x$ die grösste von allen drei Seiten sein muss.

Zur Construction von I. dient die Gleichung

$$a^2-z^2=az,\quad a^2=z(z+a);$$

also die Proportion:

$$z:a=a:z+a,$$

und die Construction ist aus Taf. VI. Fig. 5. von selbst ersichtlich.

Zur Construction von II. dient die Gleichung

$$ax+a^2=x^2,\quad a^2=x(x-a);$$

also die Proportion:

$$x:a=a:x-a,$$

und die Construction ist aus Taf. VI. Fig. 6. von selbst ersichtlich.

Zur Construction von III. dienen die Gleichungen

$$x^2-z^2=(x-z)(x+z)=a^2,\quad xz=a^2$$

oder die Proportionen:

$$x-z:a=a:x+z,\quad x:a=a:z;$$

deren man sich auf folgende Art bedienen kann.

Ueber einer beliebigen Geraden $AB$ (Taf. VI. Fig. 7.) als Durchmesser beschreibe man um den Mittelpunkt $C$ einen Kreis, errichte auf $AB$ in $B$ ein Perpendikel $BD = AB$ und ziehe durch $C$ und $D$ eine den Kreis in $E$ und $F$ schneidende Gerade. Hierauf beschreibe man über $BD$ als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben von $D$ aus $DE$ als Sehne ein, so dass $DG = DE$ wird, und ziehe $BG$, so erhält man das rechtwinklige Dreieck $BDG$. Nun schneide man auf $BG$ von $B$ aus $BG' = a$ ab und ziehe $G'D'$ mit $GD$ parallel, so ist $BG'D'$ das verlangte Dreieck.

Denn es ist

$$BD^2 = DE.FD = DG.(DG + BD),$$

also

$$\left(\frac{BD}{DG}\right)^2 = 1 + \frac{BD}{DG},$$

und ferner nach der Construction

$$\frac{BD}{DG} = \frac{BD'}{D'G'}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{BD'}{D'G'}\right)^2 = 1 + \frac{BD'}{D'G'}$$

oder

$$BD'^2 = D'G'^2 + D'G'.BD', \quad BD'^2 - D'G'^2 = D'G'.BD'.$$

Nun ist aber nach der Construction

$$BD'^2 - D'G'^2 = BG'^2 = a^2, \quad \text{also} \quad D'G'.BD' = a^2.$$

Setzen wir also

$$BD' = x, \quad D'G' = z, \quad BG' = a;$$

so genügt das rechtwinklige Dreieck $BG'D'$ offenbar den Bedingungen

$$x^2 - z^2 = a^2, \quad xz = a^2,$$

und ist also das gesuchte.

---

## Bemerkungen über einen geometrischen Elementarsatz, über die Auflösung der biquadratischen Gleichungen und eine Aufgabe aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten.

Von dem Herausgeber.

### I.

In den Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome XVI. Mars 1857. p. 125. hat Herr E. A. Gouzy zu Lausanne

die folgende beachtenswerthe und Aufnahme in die Elemente verdienende Construction der mittleren Proportionallinie zwischen zwei gegebenen Linien mitgetheilt, welche bloss den Gebrauch des Lineals und Zirkels, nicht auch, wie die gewöhnlichen Constructionen, des rechtwinkligen Dreiecks, in Anspruch nimmt. Ob diese Construction sonst schon bekannt ist, weiss ich nicht; mir war sie unbekannt, und für die Leser, welche sich in gleichem Falle mit mir befinden, theile ich sie hier mit.

Die beiden gegebenen Linien seien $a$ und $b$, und $a$ sei die grössere. Auf einer beliebigen geraden Linie $MN$ (Taf. VI. Fig. 8.) trage man $AB = b$ auf, und mache $AC = a$ und $BD = a$. Hierauf beschreibe man mit der Zirkelöffnung $a$ aus $C$ und $D$ als Mittelpunkten zwei sich in $E$ schneidende Kreisbogen, und ziehe $EA$ oder $EB$, so ist jede dieser beiden Linien die gesuchte mittlere Proportionallinie zwischen $a$ und $b$.

Der von Herrn Gouzy nicht gegebene Beweis ist sehr leicht zu führen. Man denke sich $EC$ und $ED$ gezogen und von $E$ auf $AB$ das Perpendikel $EF$ gefällt, welches $AB$ in $F$ halbiren wird, so dass $AF = BF = \frac{1}{2}b$ ist. Nach einem bekannten Satze vom Dreieck ist nun

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DA}^2 + 2.\overline{DA}.\overline{AF},$$

also nach der Construction offenbar:

$$a^2 = \overline{AE}^2 + (a-b)^2 + 2(a-b).\tfrac{1}{2}b$$
$$= \overline{AE}^2 + (a-b)^2 + (a-b)b,$$

folglich nach gehöriger Entwickelung auf der rechten Seite:

$$a^2 = \overline{AE}^2 + a^2 - ab,$$

woraus auf der Stelle

$$\overline{AE}^2 = ab \quad \text{oder} \quad a:\overline{AE} = \overline{AE}:b$$

folgt, wie verlangt wurde.

---

## II.

Die von Lagrange*) gegebene Methode zur Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichungen, in denen das zweite

*) Nouveaux Mémoires de Berlin. T. II.

Glied nicht fehlt, scheint nicht so bekannt zu sein, wie sie verdient; ich will dieselbe daher im Folgenden kurz mittheilen, wenn die Methode auch nur als eine Verallgemeinerung der bekannten alten Methode von Ferrari zu betrachten ist.

Die aufzulösende Gleichung sei

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Man bringe dieselbe auf die Form

$$x^4+ax^3=-bx^2-cx-d,$$

und addire, indem $u$ eine neue unbekannte Grösse bezeichnet, auf beiden Seiten die Grösse

$$(2u+\tfrac{1}{4}a^2)x^2+aux+u^2;$$

so erhält man links die Grösse

$$\begin{aligned}&x^4+ax^3+(2u+\tfrac{1}{4}a^2)x^2+aux+u^2\\ &=x^4+ax^3+\tfrac{1}{4}a^2x^2+2(x^2+\tfrac{1}{2}ax)u+u^2\\ &=(x^2+\tfrac{1}{2}ax)^2+2(x^2+\tfrac{1}{2}ax)u+u^2,\end{aligned}$$

also das vollkommene Quadrat

$$(x^2+\tfrac{1}{2}ax+u)^2,$$

und rechts die Grösse

$$\begin{aligned}&-bx^2-cx-d+(2u+\tfrac{1}{4}a^2)x^2+aux+u^2\\ &=(2u+\tfrac{1}{4}a^2-b)x^2+(au-c)x+u^2-d.\end{aligned}$$

Jede Grösse von der Form

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

ist nun immer dann ein vollkommenes Quadrat, wenn

$$\beta=2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\gamma}$$

ist, weil unter dieser Voraussetzung offenbar

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2$$

ist.

Bestimmt man also $u$ aus der Gleichung

$$au-c=2\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b}.\sqrt{u^2-d},$$

so ist die Grösse, welche man oben auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens erhielt, das vollständige Quadrat

$$(x\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b}+\sqrt{u^2-d})^2,$$

und man hat daher zur Bestimmung von $x$ nach dem Obigen die Gleichung:

$$(x^2+\tfrac{1}{2}ax+u)^2=(x\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b}+\sqrt{u^2-d})^2,$$

welche auf die quadratische Doppelgleichung

$$x^2+\tfrac{1}{2}ax+u=\pm(x\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b}+\sqrt{u^2-d})$$

oder

$$x^2+(\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b})x+u\mp\sqrt{u^2-d}=0$$

führt, aus welcher die Werthe von $x$ auf bekannte Weise bestimmt werden können.

Die Gleichung, aus welcher nach dem Obigen $u$ bestimmt werden muss, führt zu der Gleichung:

$$(au-c)^2=4(2u+\tfrac{1}{4}a^2-b)(u^2-d),$$

und wird nach gehöriger Entwickelung leicht auf die Form

$$u^3-\tfrac{1}{2}bu^2+\tfrac{1}{4}(ac-4d)u-\tfrac{1}{8}\{(a^2-4b)d+c^2\}=0$$

gebracht, ist also vom dritten Grade.

Daher hat man jetzt zur Bestimmung von $x$ die beiden folgenden Gleichungen des dritten und zweiten Grades:

$$u^3-\tfrac{1}{2}bu^2+\tfrac{1}{4}(ac-4d)u-\tfrac{1}{8}\{(a^2-4b)d+c^2\}=0,$$

$$x^2+(\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{2u+\tfrac{1}{4}a^2-b})x+u\mp\sqrt{u^2-d}=0;$$

in denen die vollständige Auflösung der Gleichung des vierten Grades

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

in welcher das zweite Glied nicht fehlt, enthalten ist.

---

## III.

### *Aufgabe.*

Drei Grössen $x$, $y$, $z$, deren Summe die gegebene Grösse $s$ ist, sind durch Messung bestimmt worden *),

---

*) Etwa die drei Winkel eines ebenen Dreiecks mit dem Theodoliten.

und man habe dadurch für diese drei Grössen respective die Werthe $a$, $b$, $c$ erhalten. Da diese Werthe mit Beobachtungsfehlern behaftet sind, und ihre Summe also im Allgemeinen nicht genau $s$ ist, so soll man dieselben so verbessern, dass die verbesserten Werthe genau die Summe $s$ geben, und die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum ist.

### Auflösung.

Die gesuchten Verbesserungen seien $x_1$, $y_1$, $z_1$, so sind die verbesserten Werthe $a+x_1$, $b+y_1$, $c+z_1$; also nach den Bedingungen der Aufgabe

$$(a+x_1)+(b+y_1)+(c+z_1)=s$$

oder

$$x_1+y_1+z_1=s-(a+b+c).$$

Die Summe

$$u=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

soll ein Minimum werden. Weil nach dem Vorhergehenden

$$z_1=s-(a+b+c)-x_1-y_1$$

ist, so ist

$$u=x_1^2+y_1^2+\{s-(a+b+c)-x_1-y_1\}^2,$$

also:

$$u=2x_1^2+2y_1^2+2x_1y_1-2\{s-(a+b+c)\}(x_1+y_1)+\{s-(a+b+c)\}^2.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=4x_1+2y_1-2\{s-(a+b+c)\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=4y_1+2x_1-2\{s-(a+b+c)\};$$

also wegen der bekannten gemeinschaftlichen Bedingungen des Maximums und Minimums:

$$2x_1+y_1-\{s-(a+b+c)\}=0,$$

$$2y_1+x_1-\{s-(a+b+c)\}=0,$$

woraus man sogleich:

$$3x_1-\{s-(a+b+c)\}=0,$$
$$3y_1-\{s-(a+b+c)\}=0;$$

also, indem man zugleich beachtet, dass nach dem Obigen

$$z_1=s-(a+b+c)-x_1-y_1$$

ist,

$$x_1=\tfrac{1}{3}\{s-(a+b+c)\},$$
$$y_1=\tfrac{1}{3}\{s-(a+b+c)\},$$
$$z_1=\tfrac{1}{3}\{s-(a+b+c)\}$$

erhält.

Um zu prüfen, ob wirklich ein Minimum Statt findet, muss man die zweiten partiellen Differentialquotienten von $u$ entwickeln, wodurch man erhält:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}=4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2}=4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}=2.$$

Also ist, unabhängig von bestimmten Werthen von $x_1$ und $y_1$, folglich auch für die obigen Werthe dieser Grössen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2}=4-16=-12,$$

diese Grösse also negativ, und die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2}$$

sind beide positiv, woraus sich ergiebt, dass die Bedingungen des Minimums vollständig erfüllt sind.

---

## Ueber die Inhaltsbestimmung einer gewissen Klasse von Körpern.

Von dem Herausgeber.

In den **Problèmes pour les arpenteurs. Traduit de l'Italien. Paris. 1803.** hat **Mascheroni** Inhaltsbestimmungen gewisser Körper ohne Beweis mitgetheilt, welche nicht so bekannt zu sein scheinen, wie sie verdienen. Der französische Uebersetzer sagt in der Vorrede von denselben: „Enfin, le cinquième livre, après quelques propositions simples, en renferme quelques autres plus difficiles, dont les démonstrations pourraient être longues et pénibles, si l'on s'en tenait aux principes de la Géométrie ordinaires, mais se trouveront facilement au moyen des formules que fournit le calcul intégral pour la cubature des soli-

des.“ In der That bedarf man aber der allgemeinen Cubatur-Formeln der Integralrechnung nicht, um zu den betreffenden Sätzen zu gelangen, sondern reicht mit einigen leichten elementaren Gränzenbetrachtungen vollkommen aus, welche ich in diesem Aufsatze im Interesse des stereometrischen Elementar-Unterrichts, in welchen die im Folgenden entwickelten, auch praktisch wichtigen Formeln aufgenommen zu werden verdienen, mittheilen werde.

In Taf. VI. Fig. 9. sei $ABCA'B'C'$ ein Körper, welcher von den beiden parallelen ebenen Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$ als Grundflächen, den beiden ebenen Seitenflächen $ABA'B'$ und $ACA'C'$, und der windschiefen Seitenfläche $BCB'C'$, welche entstanden gedacht wird durch Bewegung einer Geraden, die parallel mit den beiden einander parallelen Grundflächen fortwährend auf den beiden Geraden $BB'$ und $CC'$ hingleitet, so dass also diese windschiefe Seitenfläche von jeder den beiden Grundflächen parallelen Ebene in einer den Grundflächen parallelen Geraden geschnitten wird, eingeschlossen wird. Die Entfernung der beiden parallelen Grundflächen von einander soll die Höhe des Körpers $ABCA'B'C'$ genannt und durch $h$ bezeichnet werden.

Um den Inhalt $J$ dieses Körpers zu bestimmen erinnern wir uns zuerst an den folgenden Satz *): Wenn in dem Trapezio $ABCD$ (Taf. VI. Fig. 10.) mit den parallelen Seiten $AB$ und $CD$ die Linie $EF$ parallel gezogen ist, so ist immer:

$$EF = AB.\frac{CE}{AC} + CD.\frac{AE}{AC}.$$

Durch einen beliebigen Punkt der Höhe des Körpers $ABCA'B'C'$ (Taf. VI. Fig. 9.), dessen Entfernungen von den beiden Grundflächen $ABC$ und $A'B'C'$ sich wie $m:m'$ verhalten mögen, denken wir uns eine den beiden parallelen Grundflächen parallele Ebene gelegt, welche unter den gemachten Voraussetzungen den in Rede stehenden Körper in einem Dreieck schneidet, dessen in den ebenen Seitenflächen $ABA'B'$ und $ACA'C'$ liegende Seiten nach dem vorhergehenden Satze vom Trapezio offenbar

$$AB.\frac{m'}{m+m'} + A'B'.\frac{m}{m+m'} \text{ und } AC.\frac{m'}{m+m'} + A'C'.\frac{m}{m+m'}$$

oder

$$\frac{m.A'B' + m'.AB}{m+m'} \text{ und } \frac{m.A'C' + m'.AC}{m+m'}$$

*) Theil XXX. S. 460. Note.

sind. Also ist, wenn wir den Winkel $BAC$ oder $B'A'C'$ durch $A$ bezeichnen, der Inhalt des in Rede stehenden Dreiecks offenbar:

$$\tfrac{1}{2}.\frac{m.A'B'+m'.AB}{m+m'}.\frac{m.A'C'+m'.AC}{m+m'}.\sin A.$$

Theilen wir nun die Höhe $h$ unsers Körpers in $n$ gleiche Theile, wo $n$ eine ganze Zahl bezeichnet, so erhellet mittelst einer ganz einfachen Betrachtung auf der Stelle, dass, wenn im Folgenden die Gränze sich auf ein in's Unendliche wachsendes $n$ bezieht, der Inhalt $J$ auf folgende Art ausgedrückt werden kann:

$$J=\tfrac{1}{2}\sin A\,\mathrm{Lim}.\frac{h}{n}\left\{\begin{array}{l} \frac{0.A'B'+(n-0).AB}{n}.\frac{0.A'C'+(n-0).AC}{n} \\ +\frac{1.A'B'+(n-1).AB}{n}.\frac{1.A'C'+(n-1).AC}{n} \\ +\frac{2.A'B'+(n-2).AB}{n}.\frac{2.A'C'+(n-2).AC}{n} \\ +\frac{3.A'B'+(n-3).AB}{n}.\frac{3.A'C'+(n-3).AC}{n} \\ \text{u. s. w.} \\ +\frac{(n-1).A'B'+(n-(n-1)).AB}{n} \\ \times\frac{(n-1).A'C'+(n-(n-1)).AC}{n} \end{array}\right\}.$$

Alle Glieder zwischen den Klammern in diesem Ausdrucke sind von der Form:

$$\frac{ka'+(n-k)a}{n}.\frac{kb'+(n-k)b}{n},$$

also von der Form:

$$\frac{1}{n^2}\{k^2a'b'+k(n-k)(ab'+ba')+(n-k)^2ab\};$$

folglich ist offenbar:

$$J=\tfrac{1}{2}h\sin A\,\mathrm{Lim}.\frac{1}{n^3}\left\{\begin{array}{l} [1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2].A'B'.A'C' \\ +\left[\begin{array}{l} n(1+2+3+\ldots.+(n-1)) \\ \quad -(1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2) \end{array}\right] \\ \quad\times(AB.A'C'+AC.A'B') \\ +[1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2].AB.AC \end{array}\right\}.$$

Nun ist aber:

$$\text{Lim}.\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2]=\text{Lim}.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$=\text{Lim}.\tfrac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})=\tfrac{1}{3},$$

$$\text{Lim}.\frac{1}{n^3}[n(1+2+3+\ldots.+(n-1))-(1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2)]$$

$$=\text{Lim}.\frac{1}{n^3}\left[\frac{n^2(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

$$=\text{Lim}[\tfrac{1}{2}(1-\frac{1}{n})-\tfrac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})]=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{6},$$

$$\text{Lim}.\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2]=\text{Lim}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\text{Lim}.\tfrac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\tfrac{1}{3};$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$J=\tfrac{1}{2}h\sin A\{\tfrac{1}{3}.A'B'.A'C'+\tfrac{1}{6}(AB.A'C'+AC.A'B')+\tfrac{1}{3}.AB.AC\}$$

oder

$$J=\tfrac{1}{6}h\sin A\{AB.AC+\tfrac{1}{2}(AB.A'C'+AC.A'B')+A'B'.A'C'\},$$

oder

$$J=\tfrac{1}{6}h\sin A\{AB.(AC+\tfrac{1}{2}A'C')+A'B'.(A'C'+\tfrac{1}{2}AC)\},$$

welche Formel man auch noch auf verschiedene andere Arten ausdrücken kann.

Wenn in Taf. VI. Fig. 11. der Körper $ABCDA'B'C'D'$ von den zwei parallelen ebenen Vierecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ als Grundflächen, und den vier ebenen Seitenflächen $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$, $DAD'A'$ begränzt wird; so kann man sich vorstellen, dass eine Gerade parallel mit den beiden Grundflächen sich so bewege, dass sie immer auf den beiden Geraden $BB'$ und $DD'$ hingleitet, wodurch eine durch diese beiden Geraden gehende windschiefe Fläche entsteht, welche den Körper $ABCDA'B'C'D'$ in zwei Körper von der vorher betrachteten Art theilt. Bezeichnen wir also den Inhalt des Körpers $ABCDA'B'C'D'$ durch $J$ und die Entfernung seiner beiden parallelen Grundflächen von einander durch $h$, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$J = \tfrac{1}{6}h\sin A\{AB.(AD+\tfrac{1}{2}A'D')+A'B'.(A'D'+\tfrac{1}{2}AD)\}$$
$$+\tfrac{1}{6}h\sin C\{BC.(CD+\tfrac{1}{2}C'D')+B'C'.(C'D'+\tfrac{1}{2}CD)\}.$$

Wir wollen jetzt einen Körper $ABCDA'B'C'D'$ betrachten, welcher ganz dieselben Eigenschaften hat, wie der vorher eben so bezeichnete Körper, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Seitenfläche $CDC'D'$ keine Ebene, sondern eine windschiefe Fläche ist, welche durch eine sich stets parallel mit den beiden Grundflächen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ bewegende und dabei immer auf den beiden Geraden $CC'$ und $DD'$ hingleitende Gerade erzeugt worden ist.

Wenn wir durch einen beliebigen Punkt der Höhe dieses Körpers, dessen Entfernungen von den beiden Grundflächen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sich zu einander wie $m:m'$ verhalten mögen, eine den beiden Grundflächen parallele Ebene legen, so sind deren Durchschnittslinien mit den Seitenflächen

$$ADA'D',\quad ABA'B',\quad BCB'C'$$

nach dem Obigen respective:

$$\frac{m.A'D'+m'.AD}{m+m'},\quad \frac{m.A'B'+m'.AB}{m+m'},\quad \frac{m.B'C'+m'.BC}{m+m'};$$

und bezeichnen wir nun die beiden Winkel $DAB$ und $ABC$ oder $D'A'B'$ und $A'B'C'$ respective durch $A$ und $B$, so ist nach einer sehr bekannten Formel der Inhalt des Vierecks, in welchem unser Körper von der in Rede stehenden, den beiden Grundflächen parallelen Ebene geschnitten wird:

$$\tfrac{1}{2}.\frac{m.A'D'+m'.AD}{m+m'}.\frac{m.A'B'+m'.AB}{m+m'}.\sin A$$
$$+\tfrac{1}{2}.\frac{m.A'B'+m'.AB}{m+m'}.\frac{m.B'C'+m'.BC}{m+m'}.\sin B$$
$$-\tfrac{1}{2}.\frac{m.A'D'+m'.AD}{m+m'}.\frac{m.B'C'+m'.BC}{m+m'}.\sin(A+B)\ ^{*)}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Inhalt unsers Körpers wieder durch $J$ und theilen die Höhe $h$ in $n$ gleiche Theile, so ist offenbar:

---

*) Diese Formel lässt sich etwa auf folgende Art beweisen. In dem Viereck $ABCD$ (Taf. VI. Fig. 12.) fälle man von $C$ und $D$ auf die nöthigenfalls gehörig verlängerte Seite $AB$ die Perpendikel $CC'$ und $DD'$; dann ist

$$J=\tfrac{1}{2}\sin A\,\mathrm{Lim}.\frac{h}{n}\left\{\begin{aligned}&\frac{0.A'D'+(n-0).AD}{n}.\frac{0.A'B'+(n-0).AB}{n}\\&+\frac{1.A'D'+(n-1).AD}{n}.\frac{1.A'B'+(n-1).AB}{n}\\&+\frac{2.A'D'+(n-2).AD}{n}.\frac{2.A'B'+(n-2).AB}{n}\\&+\frac{3.A'D'+(n-3).AD}{n}.\frac{3.A'B'+(n-3).AB}{n}\\&\qquad\text{u. s. w.}\\&+\frac{(n-1).A'D'+(n-(n-1)).AD}{n}\\&\qquad\times\frac{(n-1).A'B'+(n-(n-1)).AB}{n}\end{aligned}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sin B\,\mathrm{Lim}.\frac{h}{n}\left\{\begin{aligned}&\frac{0.A'B'+(n-0).AB}{n}.\frac{0.B'C'+(n-0).BC}{n}\\&+\frac{1.A'B'+(n-1).AB}{n}.\frac{1.B'C'+(n-1).BC}{n}\\&+\frac{2.A'B'+(n-2).AB}{n}.\frac{2.B'C'+(n-2).BC}{n}\\&+\frac{3.A'B'+(n-3).AB}{n}.\frac{3.B'C'-(n-3).BC}{n}\\&\qquad\text{u. s. w.}\\&+\frac{(n-1).A'B'+(n-(n-1)).AB}{n}\\&\qquad\times\frac{(n-1).B'C'+(n-(n-1)).BC}{n}\end{aligned}\right\}$$

---

$$\text{Viereck } ABCD=\frac{(CC'+DD').C'D'}{2}-\frac{BC'.CC'}{2}-\frac{AD'.DD'}{2}$$

$$=\frac{(BC.\sin B+AD.\sin A)(AB-BC.\cos B-AD.\cos A)}{2}$$

$$+\frac{BC^2.\sin B\cos B}{2}+\frac{AD^2.\sin A\cos A}{2},$$

also, wie man auf der Stelle findet, wenn man das Product in dem Zähler des ersten Theils gehörig entwickelt:

$$\text{Viereck } ABCD=\tfrac{1}{2}\{AD.AB.\sin A+AB.BC.\sin B-AD.BC.\sin(A+B)\}.$$

Bedeuteten $A$ und $B$ die äusseren Winkel des Vierecks, wie es bekanntlich eigentlich in der Polygonometrie gewöhnlich ist, so wäre:

$$\text{Viereck } ABCD=\tfrac{1}{2}\{AD.AB.\sin A+AB.BC.\sin B+AD.BC.\sin(A+B)\}.$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin(A+B)\mathrm{Lim}.\frac{h}{n}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{0.A'D'+(n-0).AD}{n}.\dfrac{0.B'C'+(n-0).BC}{n}\\[2mm] +\dfrac{1.A'D'+(n-1).AD}{n}.\dfrac{1.B'C'+(n-1).BC}{n}\\[2mm] +\dfrac{2.A'D'+(n-2).AD}{n}.\dfrac{2.B'C'+(n-2).BC}{n}\\[2mm] +\dfrac{3.A'D'+(n-3).AD}{n}.\dfrac{3.B'C'+(n-3).BC}{n}\\[2mm] \qquad\qquad \text{u. s. w.}\\[2mm] +\dfrac{(n-1).A'D'+(n-(n-1)).AD}{n}\\[2mm] \qquad\times\dfrac{(n-1).B'C'+(n-(n-1)).BC}{n}\end{array}\right\},$$

woraus man ganz auf dieselbe Art wie oben erhält:

$$\begin{aligned}J= &\ \tfrac{1}{6}h\sin A\{AD.AB+\tfrac{1}{2}(AD.A'B'+AB.A'D')+A'D'.A'B'\}\\ &+\tfrac{1}{6}h\sin B\{AB.BC+\tfrac{1}{2}(AB.B'C'+BC.A'B')+A'B'.B'C'\}\\ &-\tfrac{1}{6}h\sin(A+B)\{AD.BC+\tfrac{1}{2}(AD.B'C'+BC.A'D')+A'D'.B'C'\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}J= &\ \tfrac{1}{6}h\sin A\{AD.(AB+\tfrac{1}{2}A'B')+A'D'.(A'B'+\tfrac{1}{2}AB)\}\\ &+\tfrac{1}{6}h\sin B\{AB.(BC+\tfrac{1}{2}B'C')+A'B'.(B'C'+\tfrac{1}{2}BC)\}\\ &-\tfrac{1}{6}h\sin(A+B)\{BC.(AD+\tfrac{1}{2}A'D')+B'C'.(A'D'+\tfrac{1}{2}AD)\}.\end{aligned}$$

Bedeuteten $A$ und $B$ die äusseren Winkel des Vierecks $ABCD$, so wäre:

$$\begin{aligned}J= &\ \tfrac{1}{6}h\sin A\{AD.(AB+\tfrac{1}{2}A'B')+A'D'.(A'B'+\tfrac{1}{2}AB)\}\\ &+\tfrac{1}{6}h\sin B\{AB.(BC+\tfrac{1}{2}B'C')+A'B'.(B'C'+\tfrac{1}{2}BC)\}\\ &+\tfrac{1}{6}h\sin(A+B)\{BC.(AD+\tfrac{1}{2}A'D')+B'C'.(A'D'+\tfrac{1}{2}AD)\}.\end{aligned}$$

Natürlich gilt diese Formel auch dann noch, wenn die Seitenfläche $CDC'D'$ eben ist.

In Taf. VI. Fig. 13. sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Körper, dessen Grundfläche $ABA'B'$ ein Trapezium mit den parallelen Seiten $AB$ und $A'B'$ ist. Die Seitenflächen $ABCD$, $BCB'C'$, $A'B'C'D'$, $ADA'D'$ seien Ebenen, welche auf $ABA'B'$ senkrecht stehen. Dagegen sei die Fläche $CDC'D'$ eine windschiefe Fläche, welche entstanden ist, indem eine Gerade sich stets parallel mit den beiden parallelen Seitenflächen $ABCD$ und $A'B'C'D'$, und dabei immer auf den Geraden $CC'$ und $DD'$ bewegte. Will man das Volumen $J$ dieses Körpers mittelst der vorher entwickelten Formel bestimmen, so muss man die parallelen Ebenen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ als Grundflächen betrachten, und in Folge der gemachten Voraussetzungen $\angle A=90^0$, $\angle B=90^0$ setzen; dann erhält man aus der obigen Formel:

$$J = \tfrac{1}{6}h\{AD.(AB+\tfrac{1}{2}A'B')+A'D'.(A'B'+\tfrac{1}{2}AB)\}$$
$$+\tfrac{1}{6}h\{AB.(BC+\tfrac{1}{2}B'C')+A'B'.(B'C'+\tfrac{1}{2}BC)\},$$

oder

$$J = \tfrac{1}{6}h.AB.\{AD+BC+\tfrac{1}{2}A'D'+\tfrac{1}{2}B'C'\}$$
$$+\tfrac{1}{6}h.A'B'.\{A'D'+B'C'+\tfrac{1}{2}AD+\tfrac{1}{2}BC\},$$

oder

$$J = \tfrac{1}{12}h.AB.\{2.AD+2.BC+A'D'+B'C'\}$$
$$+\tfrac{1}{12}h.A'B'.\{2.A'D'+2.B'C'+AD+BC\},$$

also offenbar:

$$J = \tfrac{1}{6}\Delta ABB'.\{2.AD+2.BC+A'D'+B'C'\}$$
$$+\tfrac{1}{6}\Delta AA'B'.\{2.A'D'+2.B'C'+AD+BC\},$$

welche Formel bekanntlich in der Praxis bei Berechnung des Erdabtrags und Erdauftrags vielfache Anwendung findet.

Wenn die Grundfläche $ABA'B'$ ein Parallelogramm ist, so ist $\Delta ABB' = \Delta AA'B$, und folglich nach dem Vorhergehenden in diesem Falle offenbar:

$$J = \overline{ABA'B'}.\frac{AD+BC+A'D'+B'C'}{4}.$$

Wenn der Körper $ABCDEA'B'C'D'E'$ in Taf. VI. Fig. 14. von den beiden parallelen ebenen Grundflächen $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ und fünf ebenen Seitenflächen eingeschlossen wird, so kann man sich eine Fläche denken, welche durch Bewegung einer den beiden parallelen Grundflächen stets parallel bleibende und immer auf den beiden Geraden $AA'$ und $DD'$ hingleitende Gerade erzeugt wird, durch welche Fläche unser Körper in zwei Körper von der im Vorhergehenden betrachteten Beschaffenheit zerlegt wird, deren Volumina, also auch das Volumen des ganzen Körpers, sich mittelst der im Obigen entwickelten Formeln bestimmen lassen. Bezeichnen wir nämlich das Volumen des ganzen Körpers durch $J$ und seine Höhe durch $h$, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$J = \tfrac{1}{6}h\sin B\{AB.(BC+\tfrac{1}{2}B'C')+A'B'.(B'C'+\tfrac{1}{2}BC)\}$$
$$+\tfrac{1}{6}h\sin C\{BC.(CD+\tfrac{1}{2}C'D')+B'C'.(C'D'+\tfrac{1}{2}CD)\}$$
$$+\tfrac{1}{6}h\sin E\{AE.(DE+\tfrac{1}{2}D'E')+A'E'.(D'E'+\tfrac{1}{2}DE)\}$$
$$-\tfrac{1}{6}h\sin(B+C)\{CD.(AB+\tfrac{1}{2}A'B')+C'D'.(A'B'+\tfrac{1}{2}AB)\},$$

wo $B$, $C$, $E$ innere Winkel des Fünfecks $ABCDE$ bezeichnen.

Wie man diese Betrachtungen weiter führen und nach der obigen Methode mittelst der allgemeinen Formeln der Polygonometrie auch leicht ganz allgemeine Inhaltsbestimmungen von Körpern der obigen Art erhalten könnte, fällt sogleich in die Augen. Es ist aber hier gar nicht meine Absicht, diesen Gegenstand zu erschöpfen, indem das Obige hauptsächlich zu weiteren und allgemeineren Untersuchungen über denselben anregen sollte, die ich gern in das Archiv aufnehmen würde.

---

**Berichtigung.** In der Figur auf Taf. III. in diesem Theile muss noch der Durchmesser $PQ$ des Kreises gezogen werden.

# Literarischer Bericht
## CXXI.

Am 25sten März dieses Jahres (1858) wurde von einem unerwartet schnellen Tode betroffen der Professor

**Carl Theodor Anger**

in Danzig. Vor ungefähr zehn Jahren hatte bei einem vierwöchentlichen Aufenthalte in Danzig der Herausgeber des Archivs das Glück, den so früh der Wissenschaft und den Seinigen Entrissenen, so wie seinen trefflichen Collegen Strehlke, persönlich kennen zu lernen, und genussreiche und lehrreiche Stunden in seiner und seiner liebenswürdigen Gattin Gesellschaft zu verleben. Der Eindruck, welchen der so überaus ehrenwerthe Charakter Anger's und seine ungemein gründlichen und vielseitigen Kenntnisse auf den Herausgeber gemacht haben, ist ein bleibender und unauslöschlicher gewesen; er wird dem damals gewonnenen Freunde stets das dankbarste Andenken bewahren, und es macht ihm daher besondere Freude, den Lesern seiner Zeitschrift den folgenden Necrolog des Verstorbenen aus einem Danziger Localblatte*) mittheilen zu können, woraus dieselben zugleich ersehen werden, wie sehr in dem norddeutschen Venedig, wie man die eine der beiden Zierden des östlichen Preussenlandes, wegen ihrer ungemein anmuthigen Lage unmittelbar am Strande der Ostsee, wohl genannt hat, von jeher mathematische und astronomische Studien gepflegt worden sind und noch gepflegt werden, und seit Hevelius stets würdige Vertreter gefunden haben. G.

*) Danziger Dampfboot. 1858. Nr. 74.

# Nekrolog.

Der Mann, dessen sterbliche Hülle heute früh unter den alten Linden des H. Leichnams-Kirchhofs ihre letzte Ruhestätte fand, war ein Biedermann und Christ im vollen Sinne des Wortes, treu und werth erprobt in so vielfachen menschlichen Beziehungen. Er war ferner nicht nur ein ausgezeichneter Lehrer, sondern ein ächter Förderer der Wissenschaft, eine wahrhafte Zierde unserer Stadt, welche nach ausdrücklichem Urtheile der Sachkundigen seit Hevelius Zeit keinen bedeutenderen Mathematiker und Astronomen gehabt hat. Nicht um den Männern seines Faches vorzugreifen, nicht um treffliche biographische Leistungen auf diesem Gebiete irgend nachzuahmen, hat der Unterzeichnete den folgenden kurzen Lebensabriss verfasst, sondern um, dem Wunsche des Verewigten gemäss, ohne lobende Phrasen die einfachen, schmucklosen Thatsachen reden zu lassen, und so zugleich eine Blume freundlicher Erinnerung auf sein vielbeweintes Grab niederzulegen.

## Carl Theodor Anger

wurde hier in Danzig am 31. Juli 1803 geboren. Sein Vater war Ober-Steuer-Controlleur, seine Mutter eine Tochter des Admiralitäts-Gerichts-Directors Pauli. In seine Knabenzeit fiel die grimmige Noth der Belagerung Danzigs durch Lefebvre, dann das bunte, den 3 Brüdern sehr interessante Treiben unter französischer Herrschaft, neben vielen schweren Sorgen der Eltern, dann neue Belagerung und die Rückkehr unter Preussens Scepter. Früh erwachte in ihm die Neigung zum Zeichnen, erhielt aber bei der Mangelhaftigkeit des Unterrichts nicht die gewünschte Nahrung. Mit 11 Jahren kam der Knabe in die Kirchen-Schule zu St. Marien, gegen deren Rector, Dr. Kniewel, auch noch der Mann bis in die gereiftesten Jahre stets eine lebhafte Dankbarkeit bewahrte. Nachdem er sich hier unter Joh. Bapt. Breysig im Zeichnen vervollkommnet, kam er seinem innigsten Wunsche gemäss (nicht ohne grosse und stets von ihm sehr dankbar gerühmte Aufopferung seiner Eltern), 1816 in die Kunst- und Gewerbe-Schule. Ihr Vorsteher, der sinnige, originelle und verdiente Joh. Adam Breysig, der, ohne eigentlich Mathematiker zu sein oder sein zu wollen, doch tüchtige Kenntnisse in diesem Fache besass, wirkte auf Anger nach seinem eigenen Geständnisse vielfach anregend ein, und wie sich in Anger's Schriften die Spuren davon finden, so kann man sie auch wohl in der Art, wie er den mathematischen Unterricht betrieb, wiedererkennen. Nachdem er das hiesige Gymnasium bis Secunda besucht, ging er, um sich

mit vollstem Eifer dem unter Everbeck begonnenen Studium der Mathematik zu widmen, Mich. 1823 auf die Universität Königsberg, wo er unter den allergrössten Entbehrungen, wie sie heute kaum noch vorkommen, dem Studium derselben oblag. Vorher hatte er unter günstigen Verhältnissen eine Seereise nach Kopenhagen unternommen, deren erfreuliche Eindrücke ihn noch nach vielen Jahren zu lebhaften Aeusserungen veranlassten. Als Bessel's Gehülfe bei der Sternwarte (Rosenberger) abging, wählte der berühmte Astronom unter seinen Anhängern Anger zu dessen Nachfolger. Diese Stellung, in der er bis Ostern 1831 blieb, nahm seine vollste Thätigkeit in Anspruch; Bessel theilte sich mit ihm in die Zonen-Beobachtungen, und Anger leistete hiebei, wie bei des Meisters Pendel-Beobachtungen in selbstständiger Weise ausgezeichnete Beihülfe, worüber wir Einzelnes hier anzuführen uns versagen müssen. Schöne Stunden, welche später in stets lebhafter freudiger Erinnerung neu erblühten, verlebte er in dem kleinen Häuschen neben der Sternwarte im traulichen Beisammensein mit Jacobi, Erman, Dove, Neumann und Barthold. Ostern 1831 setzten es hochverdiente noch lebende Männer der Wissenschaft in Danzig durch, dass hier die berühmte Naturforschende Gesellschaft*), nach Vernichtung der älteren Sternwarte durch den Krieg und die neuen Befestigungen, eine neue vorläufig auf der Apotheke auf Neugarten errichtete, und dass Anger, dem inzwischen eine Veränderung seiner Stellung wünschenswerth geworden war, als Astronom der Gesellschaft in seine Vaterstadt berufen ward. Eine Anzahl neuer werthvoller Instrumente wurden für seine Beobachtungen angekauft**), und diese brachten bald erfreuliche Resultate. Sehr wichtig wurden später besonders die auf seinen Antrag und nach seiner Wahl von der Gesellschaft gestellten astronomischen Preisaufgaben, welche öfters höchst bedeutsame Beantwortungen veranlassten, wie z. B. Hansen's Theorie der Pendelbewegungen mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde. Bald übernahm er auch an der Navigationsschule, damals unter Adm. v. Bille, den astronomischen Theil des Unterrichts, und 1832 neben den bisherigen Aemtern noch die mathematischen Lectionen in der früheren „Handwerker- nunmehrigen Gewerbe-Schule", in welcher er ausgezeich-

*) Zufolge eines älteren Legates des Dr. Nath. Math. v. Wolf, der 1780 auf dem Bischofsberge ein Observatorium erbaut und es 1784 nebst werthvollen Instrumenten der Gesellschaft geschenkt hatte.

**) So z. B. ein Passagen-Instrument, ein 42zölliges Fraunhofer-sches Fernrohr, eine Tiede'sche Pendeluhr, ein Chronometer von Kessels in Altona, u. A.

nete Schüler bildete. Ostern 1834 (nach Nagels Abgange) erhielt er das Directorat der „Königl. Provinzial-Gewerbe-Schule", welches er bis 1855 verwaltete. Wie er nach aussen hin der Anstalt Achtung zu gewinnen bemüht war, so strebte er mit Glück, trotz manchem Widerspruche, unter Beuth's Genehmhaltung wichtige Reformen an. 1836 kam er zugleich (nach Förstemanns Tode) als Professor der Mathematik an das Gymnasium, und gab von seiner sonstigen Thätigkeit die bei der Navigations-Schule nunmehr auf. Die hohe Achtung und Liebe, welche die seinen Unterricht geniessenden Schüler der Ober-Classen des Gymnasiums ihm bereitwillig zollten, bewies sich ausser anderen Gelegenheiten namentlich durch einen glänzenden Fackelzug 1844 bei seiner Vermählung mit Fräulein Emilie Zaddach, mit der er bis an seinen Tod in glücklichster, obwohl kinderloser Ehe lebte. Als bei der Sonnenfinsterniss 1851 Se. Maj. der König dieselbe in Schloss Rutzau am Putziger Wiek zu beobachten wünschte, schlug Alex. v. Humboldt entschieden unter den zum Theil so bedeutenden Astronomen Preussens ihn allein zum Ordner der Instrumente vor, und seine Leistung bei dieser Gelegenheit befriedigte so sehr, dass er bald nachher durch besondere Cabinets-Ordre den Rothen Adler-Orden erhielt. Sein reges Interesse für seine Wissenschaften suchte er auf jeden Schüler zu übertragen, und sichtlich grosse Freude machte es ihm, wenn auch gereifte Männer aus andern Fächern sich für seine Experimente, z. B. den Foucault'schen Pendel-Versuch 1852 (zum Beweise der Achsendrehung der Erde) lebhaft interessirten. Der Literarischen Gesellschaft gehörte er seit 1835 als Mitglied und zugleich als Vice-Präses an, und wie er dort einerseits durch wohl gewählte, gediegene Vorträge die Höhe der Wissenschaft wenigstens ahnen liess, worauf er stand, erfreute er, wie überhaupt in zahlreichen geselligen Kreisen, so auch dort Alle durch geistreichen Witz und muntere Laune. Er gehörte ganz besonders zu den Mathematikern, denen als heilsames Gegengewicht gegen den Ernst ihrer strengen Wissenschaft eine reiche Gabe beweglichen Geistes, Witzes, ja Humors beigegeben ward. Seine ungewöhnliche, nichts weniger als oberflächliche Kenntniss der deutschen Literatur, welcher er auch wohl zumeist die Eleganz und Klarheit seines Periodenbaues verdankte, lieh ihm in Verbindung mit einem glücklichen Gedächtnisse reiche Waffen, um durch scherzende, doch niemals unedle Parodien und Anspielungen unwiderstehliche Heiterkeit zu erregen, den geringfügigsten Dingen immer neue geistreiche Seiten abzugewinnen, oder auch im Scherz-Turnier den Gegner niederzuwerfen. In der Naturforschenden Gesellscaft, zu deren Mitgliede er 1831 gewählt, und deren Vorsitzender er seit

1847 war, wirkte er durch Vorlesungen, amtliche Berichte und Correspondenzen bis nach Amerika hin sehr förderlich; nur die Ueberzeugung, die ihm seine grosse Gewissenhaftigkeit eingab, dass diese wichtige Thätigkeit neben dem Lehramte nicht völlig für ihn befriedigend erfüllt werden könne, bewog ihn Ende 1855 zum Rücktritte vom Präsidium, nicht aber von der thätigen Theilnahme an den Bestrebungen der Gesellschaft. Der berühmte Le Verrier wollte 1852 in Bessel's Fundamentis astronomiae gewisse Irrthümer entdeckt haben, und sogleich gab auf Anger's Betrieb die Naturforschende Gesellschaft 1853 als Preis-Thema „die Untersuchung der Differenzen zwischen Bessel's und Le Verrier's Reductionen der Bradley'schen Beobachtungen". Als nun Prof. Peters (früher in Königsberg, dann in Altona) den Preis gewann, und nachwies, dass die sogenannten Irrthümer nur auf eine nach Bessels Zeit gewonnene genauere Bestimmung der Constanten hinauslief, wurde Anger im Auftrage der Gesellschaft nach Altona gesendet, um mit Jenem über die Fortsetzung der wichtigen Untersuchungen mündlich zu verhandeln; eine Reise, von welcher er gestärkt und mit angenehmen Erinnerungen bereichert zurückkehrte. Für wohlthätige Zwecke, z. B. für die Klein-Kinder-Bewahr-Anstalten, hat Anger so manche Vorlesung gehalten; wichtiger aber waren seine systematischen Vorträge über Astronomie, die er in einer früheren Periode, und dann zweimal in den letztverflossenen Jahren vor einem zahlreichen gebildeten Publikum hielt. Diese mit besonderem Fleisse ausgearbeiteten, lichtvoll gewählten und geordneten Vorträge, in seiner klaren und doch von innerer Begeisterung durchwärmten Sprache abgefasst, sind nach dem Zeugnisse der Sachkenner musterhaft zu nennen und verdienen durch den Druck bekannt zu werden. Wichtig und erfolgreich waren seine Untersuchungen über die sogenannten Störungen der Planeten (die Abweichungen ihres wirklichen Laufes von dem elliptischen, durch die Theorie berechneten und gleichsam vorgezeichneten). Die für das Jubelprogramm des hiesigen Gymnasiums gedruckte Abhandlung über Integrale ist die 40ste seiner wissenschaftlichen Arbeiten; ausserdem befindet sich im Drucke ein für Schulen berechneter Lehrgang der Perspective. Diese sämmtlich anzuführen, fehlt hier der Raum; sie beziehen sich theils auf die Astronomie (Polarstern, Meridianmessung, Sternbedeckungen, Komet von 1830, Rectascension, Mond-Ephemeriden, geographische Breite, neuere astronomische Beobachtungs-Kunst, das Keplersche Problem, Euler's planetarische Störungen), theils auf die Physik (Pendel, Barometer), theils auf die Geometrie (Basrelief-Perspective für krumme Bildflächen und Panoramen, plagiographische Projection, Verzerrung; Gegenstände der neuern

Geometrie, Einfluss der Projectionslehre, Ellipse, Trigonom. Theorem, Transformation der Figuren), oder auf die Arithmetik (Integral-Rechnung, Gauss'sche Gleichungen, Funktion $I_k^h$). Allgemein geachtet, von Vielen geliebt, von Keinem gehasst, fand er fast in Ausübung seines Berufes einen unerwartet schnellen völlig schmerzlosen Tod. Heiter und ungetrübt hatte er bei der öffentlichen Prüfung am 25sten im Kreise der Primaner examinirend recht befriedigende Eindrücke empfangen, und war in Begleitung seiner Frau nach Hause gegangen. Eben wollte er sich bei freundlichem Gespräche zu Tische setzen, — da sank er todt von einem Lungenschlage getroffen, zu Boden, und jeder Versuch zur Wiederbelebung zeigte sich entschieden fruchtlos. In die ausserordentliche Ueberraschung, die die schnell verbreitete Kunde in den weitesten Kreisen hervorrief, mischte sich überall aufrichtiges Bedauern, obwohl von der eigentlichen Bedeutsamkeit des Mannes wohl nur Wenige einen rechten Begriff haben mochten. Jeder ahnte wenigstens, dass der Verstorbene eine Zierde Danzigs war, um welche uns so mancher Ort beneiden konnte. Seine Collegen riefen ihm ein ehrenvolles und herzliches Lebewohl nach, und begleiteten ihn sammt den Schülern zur Grabesruhe: ein sehr zahlreiches Gefolge schloss sich ausserdem an. Sein Leben, wenn auch nicht bis zur möglichen äussersten Gränze gelangt, war ein reiches, nützliches, gesegnetes; auch sein Gedächtniss wird lange bei den Erwachsenen wie bei der Jugend im Segen bleiben! „Er fasste (um mich seiner eignen Worte aus der Vorrede zu seinen astronomischen Vorlesungen zu bedienen) nicht engherzig nur den nächsten Nutzen ins Auge, sondern war bemüht den göttlichen Funken wissenschaftlicher Begeisterung zu beleben, wohl erkennend, dass die Wissenschaft, wenn auch für diese Welt mit Nutzen verwendbar, doch nicht von dieser Welt herstammt.“ —

Dr. Brandstäter.

---

# Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Achter Jahrgang. 1858. Wien.

Auf die Wichtigkeit dieses Almanachs einer der ersten Akademien der Wissenschaften in literarischer Beziehung ist schon

mehrmals in unseren Literarischen Berichten hingewiesen worden, und seine Einrichtung ist im Wesentlichen ganz dieselbe geblieben, so dass wir uns also in dieser Rücksicht auf unsere früheren Berichte (in Nr. CXV. Almanach für 1857) beziehen können. In dem Berichte des General-Sekretairs über die Leistungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe ist ein Necrolog des trefflichen, der Wissenschaft leider zu früh entrissenen Salomon mitgetheilt, welchem der in dem Archiv Thl. XXVII. von Herrn Professor Rogner in Gratz mitgetheilte Necrolog dieses trefflichen Gelehrten zum Grunde gelegt worden ist, worauf wir also hier verweisen können. Ausserdem enthält der vorliegende Jahrgang des Almanachs die beiden folgenden, auch für die Leser des Archivs viel Interessantes darbietenden Reden:

II. Die edlen Metalle und ihre natürliche Rangordnung als Geldstoffe. Ein Vortrag, gehalten in der feierlichen Sitzung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften am 30. Mai 1857 vom Präsidenten der Akademie Dr. Andreas Freiherrn v. Baumgartner. S. 9.—S. 39.

V. Die Mathematik in ihrer Beziehung zu den Naturwissenschaften. Ein Vortrag, gehalten in der feierlichen Sitzung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften am 30. Mai 1857 von Dr. J. Petzval, wirklichem Mitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

Wir hoffen auf diese interessanten Vorträge späterhin ausführlicher zurückzukommen.

---

## Geometrie.

Sopra alcune curve algebriche, delle quali la lemniscata è un caso particolare. Nota del Prof. Barnaba Tortolini. Roma. 1858. 4°.

Diese Abhandlung des scharfsinnigen Herausgebers der trefflichen „Annali di Matematica pura ed applicata" findet sich in dem weiter unten angezeigten neuesten Mai- und Junihefte dieses ausgezeichneten Journals und enthält mehrere interessante Bemerkungen Herrn Tortolini's über die Curven, deren allgemeine Polargleichung

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2n u$$

ist, mit denen sich auch der Conte di Fagnano, Legendre, Serret u. A. beschäftigt haben. Wir machen auf diesen Aufsatz des Herrn Tortolini im Interesse der besonderen Zwecke, die unsere Zeitschrift verfolgt, aufmerksam, weil wir glauben, dass die weitere Beschäftigung mit diesen Curven namentlich auch für jüngere Mathematiker ein treffliches Uebungsmittel abzugeben geeignet ist, und wollen daher einige Worte über den Inhalt dieses schönen Aufsatzes sagen.

Herr Tortolini gelangt zunächst zu der Gleichung dieser Curven durch die folgenden allgemeinen Betrachtungen. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $xy$ setze man:

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u.$$

Bezeichnet nun $\varphi$ die Neigung der Curve in dem Punkte $(xy)$ gegen die Abscissenaxe, so ist

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich, wenn man die vorhergehenden Ausdrücke von $x$, $y$ differentiirt:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sin u\partial r+r\cos u\partial u}{\cos u\partial r-r\sin u\partial u};$$

also, wenn man im Zähler und Nenner mit $\cos u$ und $\partial r$ dividirt:

$$\frac{r\partial u}{\partial r}=\frac{\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}u}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}u}=\operatorname{tang}(\varphi-u)$$

oder

$$\cot(\varphi-u)=\frac{\partial r}{r\partial u},$$

wo $\varphi-u$ der Winkel ist, welchen im Punkte $(xy)$ die Berührende mit dem Radius Vector $r$ einschliesst. Ist jetzt $\varphi_1$ die Neigung der Normale gegen die Abscissenaxe, so ist $\varphi_1=\frac{1}{2}\pi+\varphi$, also $\varphi_1-u=\frac{1}{2}\pi+(\varphi-u)$, und folglich

$$\operatorname{tang}(\varphi_1-u)=-\cot(\varphi-u),$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang}(\varphi_1-u)=-\frac{\partial r}{r\partial u},$$

oder

$$\frac{\partial r}{r} = -\partial u \operatorname{tang}(\varphi_1 - u).$$

Das erste Glied dieser Gleichung lässt sich ohne Weiteres integriren, und das zweite ist auf Quadraturen zurückführbar, wenn $\varphi_1$ als Function von $u$ gegeben ist.

Nehmen wir nun an, dass $\varphi_1$ ein ungerades Vielfaches von $u$, also

$$\varphi_1 = (2n+1)u$$

ist, so ist

$$\frac{\partial r}{r} = -\partial u \operatorname{tang} 2nu = \frac{\partial . \cos 2nu}{2n \cos 2nu},$$

also

$$2n\mathrm{l}r = \mathrm{l}\cos 2nu + C,$$

und folglich, wenn man die Constante so bestimmt, dass $r = a$ wird für $u = 0$, woraus sich $C = 2n\mathrm{l}a$ ergiebt:

$$2n\mathrm{l}\frac{r}{a} = \mathrm{l}\cos 2nu$$

also

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} = \cos 2nu \quad \text{oder} \quad r^{2n} = a^{2n}\cos 2nu.$$

Für $n = 1$ erhalten wir die Gleichung der Lemniscate:

$$r^2 = a^2 \cos 2u.$$

Weil

$$r\cos u = x, \quad r\sin u = y$$

ist, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos 2u = \cos u^2 - \sin u^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

also

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Den Fall $n = 2$, also die Curve, deren Gleichung

$$r^4 = a^4 \cos 4u$$

ist, hat schon der Conte di Fagnano betrachtet.

Herr **Tortolini** setzt, um die allgemeine Gleichung

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2nu$$

in rechtwinkligen Coordinaten auszudrücken:

$$2\cos 2nu = (\cos u + i \sin u)^{2n} + (\cos u - i \sin u)^{2n},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Dann ist, weil

$$\cos u = \frac{x}{r}, \quad \sin u = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist:

$$\cos 2nu = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(x+iy)^{2n} + (x-iy)^{2n}}{(x^2+y^2)^n},$$

also nach dem Obigen:

$$(x^2+y^2)^n = \frac{a^{2n}}{2} \cdot \frac{(x+iy)^{2n} + (x-iy)^{2n}}{(x^2+y^2)^n}$$

oder

$$(x^2+y^2)^{2n} = \frac{a^{2n}}{2} \{(x+iy)^{2n} + (x-iy)^{2n}\}.$$

In dem von **Fagnano** betrachteten Falle ist $n = 2$, also

$$(x^2+y^2)^4 = \frac{a^4}{2} \{(x+iy)^4 + (x-iy)^4\},$$

woraus sich sogleich

$$(x^2+y^2)^4 = a^4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

ergiebt.

Für $n = 3$ erhält man die Gleichung

$$(x^2+y^2)^6 = a^6(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6).$$

Eben so leicht lassen sich nach der von Herrn **Tortolini** angegebenen Methode die Polargleichungen in allen übrigen Fällen in rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken.

Herr **Tortolini** zeigt noch die allgemeine Rectification der hier betrachteten Curven. Bekanntlich *) ist allgemein

*) M. s. meine „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Greifswald und Leipzig. 1857. S. 236—239.

G.

$$\partial s = \sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial u^2},$$

und aus der Gleichung

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2nu$$

ergiebt sich nun ohne alle Schwierigkeit:

$$\partial s = \frac{a^{2n}\partial r}{\sqrt{a^{4n} - r^{4n}}}, \quad \text{also} \quad s = a^{2n} \int \frac{\partial r}{\sqrt{a^{4n} - r^{4n}}}.$$

Setzen wir aber

$$r = az, \quad \partial r = a\partial z$$

und integriren zwischen den Gränzen $z=0$, $z=1$; so erhalten wir für den vierten Theil des ganzen Perimeters:

$$s = a \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^{4n}}},$$

wo nun der Zusammenhang mit den elliptischen Functionen und der Function $\Gamma$ klar ist, worüber des Weiteren wegen die Arbeiten von Serret, Legendre, Fagnano nachzusehen sind.

Wir wiederholen, dass wir die Beschäftigung mit den Curven der obigen Gattung jüngeren Mathematikern als ein treffliches Uebungsmittel empfehlen, wobei ihnen die obigen interessanten Bemerkungen von Herrn Tortolini sehr zur Unterstützung dienen werden, weil dieselben, wie alle Arbeiten dieses ausgezeichneten Mathematikers überaus geeignet sind, zu weiteren Forschungen und Untersuchungen in trefflichster Weise anzuregen.

Grunert.

---

# Optik.

Im Literar. Br. No. CXVII. S. 2.—S. 5. ist ein Verzeichniss optischer Instrumente, die von Herrn A. Lamprecht in Bamberg zu den beigesetzten Preisen angefertigt werden, von mir mitgetheilt worden. Ein Urtheil über diese Instrumente habe ich damals nicht ausgesprochen, da ich keins derselben gesehen hatte, was auch S. 2. von mir ausdrücklich bemerkt worden ist. Nachdem jetzt aber ein Paar dieser Instrumente zufällig in meine Hände gelangt sind und ich von denselben nähere Kenntniss genommen habe, kann ich, um der Wahrheit die Ehre zu geben,

**nach diesen Proben,** meinen Lesern keineswegs rathen, sich an die genannte Quelle zu wenden. Um so dringender und mit um so grösserer Freude erneuere ich meine früheren Empfehlungen der Arbeiten der Werkstätte des Herrn Ministerial-Raths von Steinheil in München, wenn auch dessen berühmter Name schon für sich die vollkommenste Bürgschaft leistet, dass jeder Abnehmer nur etwas ganz Vorzügliches erhalten wird, zu so niedrigen Preisen, wie sie nur irgend gestellt werden können. M. s. die Preisverzeichnisse dieser trefflichen Werkstätte im Literar. Ber. Nr. XCVII. S. 8. und Nr. CXI. S. 7. Grunert.

---

## Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Sr. k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Karl von Littrow, Director der Sternwarte. Dritter Folge Siebenter Band. Jahrgang 1857. Wien 1858. 8.

Der vorhergehende Band der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien ist im Litterar. Ber. Nr. CXIV. S. 3. angezeigt worden. Der vorliegende so eben erschienene neueste Band liefert von Neuem den sehr erfreulichen Beweis von dem regelmässigen Erscheinen und demzufolge auch von den regelmässig, nach einem bestimmten Plane fortgesetzten Arbeiten der k. k. Sternwarte in Wien, was von uns schon oft rühmend hervorgehoben worden ist, wodurch diese Sternwarte sich so sehr auszeichnet und unter der umsichtigen Leitung ihres schon so vielfach verdienten Directors der Wissenschaft wahrhaften Nutzen bringt. — In der Einleitung ist zunächst über einige Aenderungen, welche die Reductionsweise der Beobachtungen am Meridiankreise erfahren hat, gewissenhaft Nachricht gegeben, und über einen anderen Gegenstand berichtet worden, den wir bei Gelegenheit der gleich nachher angezeigten Abhandlung etwas näher besprechen werden. Hierauf folgen die Beobachtungen am Meridiankreise aus den Jahren 1851, 1852, 1853; dann Beobachtungen von Cometen am Refractor in den Jahren 1853 bis 1857 von Dr. K. Hornstein, Adjuncten der Sternwarte; hierauf die Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre, und dann die meteorologischen Beobachtungen des Jahres 1856, welche, von dem vorliegenden Jahrgange der Annalen an, regelmässig mitgetheilt werden sollen, indem dem wissenschaftlichen Publikum am Schluss der Einleitung zugleich die

gewiss sehr erfreuliche Nachricht ertheilt wird, dass die Liberalität des hohen kaiserlichen Unterrichts-Ministeriums für eine nachträgliche Publication der älteren meteorologischen Beobachtungen der Sternwarte bereits vorgesorgt habe, und dass der Druck derselben nächstens beginnen werde, wodurch die Wissenschaft gewiss zu grossem Danke verpflichtet werden wird. Möge dem Herrn Herausgeber der Annalen die Vorsehung noch lange Jahre Kraft und Gesundheit zu seinen verdienstlichen Arbeiten verleihen!

Der Zonen-Apparat am Mittagsrohre der Wiener Sternwarte. Von Karl v. Littrow, wirklichem Mitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. (Aus dem Novemberhefte des Jahrgangs 1857 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. XXVII. Bd. S. 443. besonders abgedruckt). Wien. 1858. 8.

In diesem für jeden praktischen Astronomen sehr interessanten Aufsatze ist ausführlich Nachricht gegeben von den bei dem Mittagsrohre der Wiener Sternwarte, welches im Jahre 1836 dem Observatorium des k. k. Marine-Collegiums in Venedig zur einstweiligen Benutzung überlassen, im Jahre 1852 aber der Wiener Sternwarte zurückgegeben worden war, angebrachten Einrichtungen, um dasselbe in einen Zonen-Apparat umzugestalten. Bei der ursprünglichen Einrichtung dieses Apparats war Herr Director Lamont in München in sehr dankenswerther Weise behülflich gewesen; später aber wurden mehrere Veränderungen damit vorgenommen, und namentlich die Beeinträchtigung der optischen Kraft des Fernrohrs durch die übliche Beleuchtung des Gesichtsfeldes dadurch vermieden, dass ein völlig angemessenes System von lichten Fäden im dunkeln Felde eingerichtet wurde. Alle diese Einrichtungen sind in der vorliegenden Abhandlung in sehr lehrreicher Weise beschrieben worden, mit näherer Erläuterung der Beobachtungsmethode und Mittheilung von Beobachtungen, durch welche die Zweckmässigkeit der getroffenen Einrichtungen vollkommen constatirt wird. Wir empfehlen die Schrift daher nochmals jedem praktischen Astronomen zu sorgfältiger Beachtung.

---

## Physik.

Untersuchungen über die Leistungen der Bourdon'schen Metallbarometer mit Hinweisung auf den

**Nutzen dieser Instrumente für die Marine. Von J. F. Julius Schmidt, Astronomen der Sternwarte des Prälaten E. Ritter von Unkrechtsberg zu Olmütz. Wien und Olmütz. Hölzel's Verlags-Expedition. 1858. 4°. 20 Sgr.**

Diese überaus gründliche und umsichtige Untersuchung der Metallbarometer oder Anéroïde hat uns eine sehr grosse Freude gemacht, da wir längst eine solche Prüfung der fraglichen Instrumente für ein wahres Bedürfniss gehalten haben, um über die gewiss häufig überschätzten Leistungen dieser Instrumente, mit denen man wohl Höhen der Tische über dem Fussboden der Zimmer messen zu können behauptet oder vorgegeben hat, endlich zu gehöriger Klarheit zu kommen. Diesem Bedürfniss zu genügen, ist die vorliegende ausgezeichnete Schrift vollkommen geeignet, und wir zollen für dieselbe, sowohl dem Herrn Verfasser, als auch dem hochwürdigen Herrn Prälaten von Unkrechtsberg, welcher sich den mühevollsten und andauerndsten Untersuchungen dieser Instrumente, namentlich in Bezug auf den so wichtigen Einfluss der Wärme, mit seltener Beharrlichkeit und grossem Geschick, insbesondere auch der Berechnung der S. 29. mitgetheilten so wichtigen Wärmetafel durch Interpolation, unterzogen hat, im Namen der Wissenschaft unseren wärmsten Dank. Aus dem folgenden Inhaltsverzeichniss werden die Leser sehen, mit welcher Vollständigkeit und Sorgfalt der betreffende Gegenstand nach allen Seiten hin beleuchtet worden ist: „Einleitende Bemerkungen und Anempfehlung der Metallbarometer zum Gebrauch auf dem Meere." (Der Nutzen bei dem letzteren ist so von selbst einleuchtend, dass es dieser ausführlichen Empfehlung kaum bedurft hätte; aber diese Einleitung enthält ausserdem für alle Besitzer von Anéroïden so lehrreiche Bemerkungen, dass wir ganz besonders auf dieselbe hinweisen müssen. Wir heben u. A. nur folgende Stelle heraus: „Jeder Anéroïd, so wie er aus der Hand des besten Künstlers hervorgeht, ist, wenn ihm keine Instruction beigegeben wird, und wenn er keinen Thermometer enthält, für genaue Beobachtungen ganz unbrauchbar*). Unterzieht man ihn aber einer sorgfältigen Prüfung**), so kann man ihn selbst dann mit Nutzen zu Höhenbestimmungen anwenden, wenn er auch sehr grob gearbeitet, und gegen die Aenderung des Luftdrucks sehr unempfindlich sein sollte, wie dies z. B. bei meinem ersten Anéroïde der Fall war. Endlich

*) Die Richtigkeit dieser Bemerkung unterschreibe ich vollständig. G.

**) Wozu die vorliegende Schrift eine treffliche Anleitung enthält. G.

aber ist es nicht als ein grosser Uebelstand aufzufassen, wenn der Anéroïd wirklich bei irgend einer Gelegenheit seinen Stand verändern sollte; es ist sodann ganz einfach mit dem Shlüssel die vorige Lage des Zeigers wiederherzustellen, und jedenfalls einfacher, als, wenn Luft in das Vacuum oder in das Quecksilber des gewöhnlichen Barometers eingedrungen ist, diese herauszuschaffen. Der Anéroïd ist aber nicht im Stande (wenigstens jetzt nicht) die Quecksilberbarometer zu verdrängen. Auf diese stützt sich vorläufig seine ganze Brauchbarkeit, und auf sie müssen alle Correctionen bezogen werden*)). — Von der Construction des Anéroïdbarometers. — Von der Anwendung der Curvenconstruction. — Untersuchungen über die Eigenschaften des Anéroïds $A^1$. — Dessen Wärmecorrection. — Experimente mit der Luftpumpe. — Daraus abgeleitete Correctionstafel. — Prüfung des Anéroïds $A^1$. — Messung von Höhenunterschieden. — Bildung der Normalwerthe für die definitive Curve. — Definitive Correctionstafel für $A^1$. — Beispiel und Darstellung der übrig bleibenden Fehler. — Versuche über das Verhältniss des Anéroïds $A^2$ unter der Luftpumpe. — Werthe für die erste Correctionstafel. — Wärmecorrection. — Prüfung des Anéroïds $A^2$ während der Beobachtungen am Schneeberge. — Bildung von Normalwerthen für die definitive Curve. — Definitive Correctionstafel für $A^2$. — Beispiele und Anwendung der Tafel und übrig bleibende Fehler.“

Der Herr Verf. weiset mit Recht darauf hin, dass jeder Anéroïd ein Individuum sei, welches einer besonderen Prüfung und sorgfältigen Vergleichung mit genauen Quecksilber-Barometern bedürfe, und giebt schliesslich über seinen Anéroïd $A^2$ das Urtheil ab: „dass dieser Anéroïd zur Messung aller Berge bis zur Höhe von 1100 Toisen vollständig ausreichen und zu genauen Resultaten führen werde.“ Wir empfehlen die ausgezeichnete Schrift nochmals allen Physikern, Astronomen und Seeleuten recht sehr zur Beachtung.

---

## Vermischte Schriften.

**Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa,**

---

*) Auch hierin stimmen wir dem Herrn Verf. aus vollster Ueberzeugung bei. G.

F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Bericht Nr. CXX. S. 5.).

No. 3. (Maggio e Giugno 1858). Sopra i Covarianti delle forme binarie. Nota del Prof. Enrico Betti. p. 129. — Sui differenziali a indice qualunque. Nota del Prof. Placido Tardy. p. 135. — Mémoire sur la probabilité des erreurs dans la somme, ou dans la moyenne de plusieurs observations par le P. M. Jullien S. J. (Continuazione). p. 149. — Note sur une formule d'Abel par Joseph Bertrand. p. 156. — Sui Covarianti delle forme più variabili. Nota del Prof. Francesco Brioschi. p. 158. — Sulle linee del terzo ordine a doppia curvatura. Nota del Prof. Luigi Cremona. p. 164. — Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellitiche. Nota del Prof. F. Brioschi. p. 175. — Sopra alcune curve algebriche, delle quali la lemniscata è un caso particolare. Nota del Prof. Barnaba Tortolini. p. 178.

**Rivista bibliographica.** Intorno ad una formola d'interpolazione. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 182. (Betrifft eine Formel von Herrn Tchebichef in Crelle's Journal T. 53. p. 286.). — Sopra una Memoria del Prof. Ottaviano Fabrizio Mossotti sotto il titolo „Nuova teoria degli stromenti ottici" Osservazioni del Prof. Francesco Cattaneo. (Continuazione e fine). p. 18

Pubblicazioni recenti. p. 191.

# Literarischer Bericht
## CXXII.

---

### Preisaufgabe der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

„Die Theorie der Krümmungs-Linien der Flächen in irgend einem wesentlichen Punkte zu vervollständigen."

Es wird sich hierbei nicht sowohl darum handeln, dass die Anzahl der speziellen Flächen, deren Krümmungs-Linien sich finden lassen, vermehrt werde, sondern um allgemeinere und wichtigere Gesichtspunkte, wie z. B. die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen die Krümmungslinien algebraischer Flächen selbst algebraische Kurven sind, oder um die Bestimmung derselben für Flächen der dritten oder einer höheren Ordnung.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der Beantwortung, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein kann, ist der erste März 1861. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen, und dieses auf dem Aeussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen.

Die Entscheidung über die Zuerkennung des Preises von 100 Dukaten geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage im Monate Juli des Jahres 1861.

---

## Arithmetik.

Die Differential- und Integralrechnung, umfassend und mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik

an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Mit 59 in den Text eingedruckten Figuren. Stuttgart. Metzler. 1857. 8.

Dieses Buch dürfte wohl gegenwärtig die vollständigste Darstellung der Differential- und Integralrechnung in deutscher Sprache enthalten, so weit bei einem Werke, welches die Gränzen eines grösseren Hand- oder Lehrbuchs nicht zu überschreiten beabsichtigt, billigerweise überhaupt von Vollständigkeit die Rede sein kann. Auch glauben wir, dass der Herr Verfasser in dieser Beziehung eine richtige Mitte gehalten hat, wobei er zugleich seinem Werke durch die vielfachen Anwendungen auf Geometrie, Mechanik, mathematische Physik und Astronomie, natürlich auch auf die reine Analysis, welche dasselbe enthält, einen besonderen Werth verliehen, und dasselbe zu einem lehrreichen Handbuche, namentlich auch für Anfänger, gemacht hat, welche letzteren darin vielfachen Stoff zu zweckmässigen Uebungen finden werden. Leider verbietet uns hier der Raum, den reichen Inhalt vollständig anzugeben, so dass wir uns mit der folgenden Angabe der Hauptabschnitte begnügen müssen:

I. Von den Functionen. Gränzwerthe. Differentialquotient für Functionen einer einzigen unabhängig Variablen. II. Differentialquotienten höherer Ordnungen. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen. Bedeutung gewisser Differentialquotienten. III. Die Theoreme von Taylor, Maclaurin, Bürmann und Lagrange. IV. Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen. V. Von den grössten und kleinsten Werthen für Functionen einer unabhängig Variablen. VI. Reihenbildung und Reihensummirung mittelst der Differentialrechnung. VII. Differentialquotienten für Functionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letzteren. Analytische Anwendungen. VIII. Das unbestimmte Integral. IX. Das bestimmte Integral. X. Quadratur der Curven und Oberflächen. Rectification der Curven und Cubatur der Körper. XI. Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale. XII. Die Differentialgleichungen erster Ordnung. XIII. Die Differentialgleichungen höherer Ordnung. XIV. Von den besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen. XV. Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen. XVI. Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange. XVII. Die elliptischen Integrale. XVIII. Die Euler'schen Integrale und die Gamma-Functionen. Reduction vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden. XIX. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. Anhang. Einzelne Ausführungen und Uebungen (ein sehr reichhaltiger und

lehrreicher Abschnitt, dessen Inhalt näher anzugeben uns leider der Raum nicht gestattet).

Wir haben uns zu dieser Inhaltsangabe verpflichtet gehalten, weil wir glauben, dass eben in der daraus sich ergebenden Reichhaltigkeit das Hauptverdienst des Werkes liegt, indem ein gleich vollständiges Werk über die höhere Analysis die deutsche Literatur gegenwärtig nicht aufzuweisen im Stande ist. Auch sieht man aus dieser Inhaltsangabe, wie sehr der Herr Verfasser bemüht gewesen ist, allen neueren analytischen Arbeiten eine möglichst gleichmässige Berücksichtigung zu Theil werden zu lassen, so weit es der beabsichtigte Umfang seines Werkes irgend gestattete, und wie sehr er selbst mit den neueren Fortschritten der Analysis vertraut ist, welches Letztere übrigens schon aus seinen vielen früheren verdienstlichen Arbeiten hinreichend bekannt ist.

Was die Darstellung und Begründung insbesondere der Differentialrechnung betrifft, so brauchen wir nach den allgemein bekannten früheren Arbeiten des Herrn Verfassers unsern Lesern wohl nicht erst zu versichern, dass er auch in dieser Beziehung sich ganz den neueren strengen Ansichten anzuschliessen gesucht hat, welche in dem leider zu früh den mathematischen Wissenschaften entrissenen unübertreffbaren Augustin Cauchy, — dem eigentlichen Begründer der ganzen neueren strengen Analysis, — ihren nächsten und ersten Vertreter finden. So sehr aber dieses höchst verdienstliche Streben des Herrn Verfassers nach vollkommener Strenge, wie wir so eben gesagt haben, überall im Allgemeinen deutlich hervortritt und sich kund giebt: so dürfen wir doch auch auf der anderen Seite zur Steuer der Wahrheit nicht ganz unbemerkt lassen, dass einige Ausführungen allerdings weniger Anspruch auf die der neueren Analysis eigene vollständige Strenge haben, und sich einige Behauptungen finden, die wir nicht unbedingt unterschreiben möchten, bezüglich welcher also auch namentlich Anfängern einige Vorsicht bei dem Gebrauche des Buchs zu empfehlen sein dürfte. Unsere literarischen Berichte beabsichtigen nicht ausführliche Kritiken, sondern nur eine allgemeine Charakterisirung der betreffenden Werke zu liefern, halten sich namentlich auch, bei im Allgemeinen verdienstlichen Schriften, wie die vorliegende ohne Zweifel es ist, gern fern von solcher unangenehm berührender Schärfe, wie sie uns namentlich in neuester Zeit in einigen von jüngeren Gelehrten herrührenden kritischen Beurtheilungen in nicht eben sehr erfreulicher Weise entgegen getreten ist. Daher kann es hier nicht unsere Absicht sein, das vorliegende, wie schon gesagt, jedenfalls mehrfach verdienstliche und empfehlenswerthe Werk

rücksichtlich der oben angedeuteten wenigen schwächeren Partieen eine vollständige Musterung passiren zu lassen. Um jedoch unser obiges Urtheil nicht ohne alle Begründung zu lassen, wollen wir wenigstens über eine Stelle Folgendes bemerken.

Auf den Seiten 55. und 56. bespricht der Herr Verfasser den bekanntlich vielfach, — und, wie wir glauben, mit vollem Rechte, — angefochtenen Satz, dass, wenn die Reihe

$$f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0),\ldots.$$

zwischen gewissen Gränzen convergirt, zwischen denselben Gränzen allgemein

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

sein soll, und sagt: „Dieser wichtige Satz ist vielfach bestritten, dennoch aber unzweifelhaft richtig.“ Nun müssen wir aber gestehen, dass das Raisonnement, — einen anderen, grössere Strenge für sich in Anspruch nehmenden Namen können wir der Darstellung des Herrn Verfassers in diesem Punkte nicht wohl einräumen, — uns keineswegs von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt hat, dass wir vielmehr, wie früher, auch jetzt noch an dessen Unrichtigkeit im Allgemeinen vollkommen festhalten. Zugleich sind wir der Meinung, dass solche an eine ältere Zeit erinnernde allgemeine Raisonnements, wie das hier angewandte, bei der Begründung solcher Sätze nicht mehr am Orte sind, sondern dass ganz strenge Restbetrachtungen hier mehr als irgendwo nur allein zur Wahrheit führen können. Und wo man diese nicht geben kann, sollte man dergleichen Sätze lieber gar nicht aufstellen, viel weniger namentlich Anfängern zur Anwendung empfehlen. Ueber das von dem Herrn Verfasser zur Begründung des fraglichen Satzes in Anwendung gebrachte Raisonnement uns weiter zu verbreiten, fehlt uns hier der Raum, was aber auch nicht weiter nöthig sein wird, wenn wir über die folgende Bemerkung des Herrn Verfassers noch einige Worte beigebracht haben werden. Derselbe sagt nämlich: „Cauchy namentlich glaubt ihn *) thatsächlich dadurch zu widerlegen, dass er $f(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ setzt. Alsdann wäre (§. 5.)

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad f''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},\ldots.,$$

*) d. h. den obigen Satz.

und für $x=0$ werden diese Grössen dann, wegen $e^{-\frac{1}{0}}=0$, die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, die zwar, wie wir §. 22. sehen werden, so lange Null ist, als in $f^{(n)}(x)$ die Zahl $n$ es ist *), aber nicht mehr, wenn $n$ unendlich gross wird. Man kann also in diesem Falle die Reihe (30) **) gar nicht anwenden, und es folgt hieraus keineswegs, wie **Cauchy** meint, das unrichtige Resultat $e^{-\frac{1}{x^2}}=0$."

Wir gestehen gern, dass wir im letzteren Theile dieser Bemerkung den Herrn Verfasser nicht recht verstehen, namentlich nicht einzusehen vermögen, was **hier** die Unterscheidung zwischen einem endlichen und unendlich grossen $n$ für eine Bedeutung haben, was daraus in Bezug auf die fragliche Behauptung **Cauchy's** folgen und geschlossen werden soll, die wir vielmehr in Uebereinstimmung mit **Moigno**, **Duhamel**, u. s. w. für völlig gerechtfertigt halten.

Für $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ erhält man durch successive Differentiation leicht nach und nach die folgenden Ausdrücke:

$$f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x)=(-6x^{-4}+4x^{-6})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f'''(x)=(24x^{-5}-36x^{-7}+8x^{-9})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f^{IV}(x)=(-120x^{-6}+300x^{-8}-144x^{-10}+16x^{-12})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

u. s. w. u. s. w.

und schliesst hieraus auf der Stelle, dass allgemein in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$f^{(n)}(x)=\{\overset{n}{C}_1x^{-(n+2)}+\overset{n}{C}_2x^{-(n+4)}+\overset{n}{C}_3x^{-(n+6)}+\ldots+\overset{n}{C}_nx^{-3n}\}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

ist, wo

$$\overset{n}{C}_1,\ \overset{n}{C}_2,\ \overset{n}{C}_3,\ \overset{n}{C}_4,\ldots\overset{n}{C}_n$$

endliche völlig bestimmte numerische Coefficienten sind. Also ist:

*) Soll wohl heissen: „als in $f^{(n)}(x)$ die Zahl $n$ endlich ist."
**) Eben die obige Gleichung, welche hier besprochen wird.

$$f^{(n)}(x)=\frac{\overset{n}{C}_1 x^{2n-2}+\overset{n}{C}_2 x^{2n-4}+\overset{n}{C}_3 x^{2n-6}+\ldots+\overset{n}{C}_{n-1} x^2+\overset{n}{C}_n}{x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}},$$

und folglich, weil bekanntlich für jedes reelle $x$ ohne Ausnahme:

$$e^{\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^6}+\ldots$$

ist:

$$f^{(n)}(x)=\frac{\overset{n}{C}_1 x^{2n-2}+\overset{n}{C}_2 x^{2n-4}+\overset{n}{C}_3 x^{2n-6}+\ldots+\overset{n}{C}_{n-1} x^2+\overset{n}{C}_n}{x^{3n}\left(1+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^6}+\ldots\right)}$$

oder

$$f^{(n)}(x)=\frac{\overset{n}{C}_1 x^{2n-2}+\overset{n}{C}_2 x^{2n-4}+\overset{n}{C}_3 x^{2n-6}+\ldots+\overset{n}{C}_{n-1} x^2+\overset{n}{C}_n}{x^{3n}+\frac{1}{1}x^{3n-2}+\frac{1}{1.2}x^{3n-4}+\ldots+\frac{1}{1\ldots k}x^{3n-2k}+\ldots}.$$

Weil man nun in dieser Formel offenbar die positive ganze Zahl $k$ beliebig gross annehmen kann, wogegen $n$ immer einen endlichen völlig bestimmten Werth behält und hier als einen solchen behaltend aufgefasst werden muss, so wird $3n-2k$ jedenfalls endlich negativ werden, und daher in Folge der obigen Formel offenbar für jedes positive ganze $n$ immer

$$f^{(n)}(0)=0$$

sein, wobei kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass auch

$$f(0)=0$$

ist. Alles dieses heisst nur so viel, dass für jedes ganze positive $n$ der Werth des Differentialquotienten $f^{(n)}(x)$ verschwindet. Von einer eigentlichen Veränderlichkeit des $n$, wie diese bei einer eigentlichen unabhängigen Variablen zur Betrachtung kommt, ferner von einer dadurch etwa bedingten Annäherung einer anderen Grösse an eine gewisse Gränze oder etwa ein Wachsen dieser Grösse in's Unendliche, ist hier gar keine Rede. Man weiss, wie schon gesagt, ganz einfach nichts weiter, will gar nichts weiter wissen und braucht auch gar nichts weiter zu wissen, als dass für jedes positive ganze $n$, d. h. allgemein, $f^{(n)}(0)$ verschwindet, was ich oben mit jeder mir möglichen Deutlichkeit dargethan zu haben glaube. Kommen wir nun schliesslich auf den Satz, um welchen es sich hier handelt, zurück, dass nämlich zwischen den Gränzen, zwischen welchen die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in folgender Gleichung convergirt, allgemein

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots$$

sein soll, so müsste auch für $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ in jedem solchen Falle

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots,$$

also, weil jetzt allgemein $f^{(n)}(0) = 0$ ist, allgemein für jedes $x$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

sein, was doch gewiss eben so unrichtig ist, als es unzweifelhaft ist, dass die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens im vorliegenden Falle convergirt. Hält man sich nur an den Sinn, welcher dem fraglichen Satze beigelegt und in welchem dessen Richtigkeit behauptet, auch an die Art und Weise, wie derselbe von Jedem, der ihn braucht, jedenfalls angewandt werden wird, so scheint es mir gar nicht zweifelhaft zu sein, dass durch das obige von Cauchy und Anderen gebrauchte Beispiel die Falschheit dieses Satzes (im Allgemeinen) vollständig nachgewiesen wird. Ein anderes von Cauchy gegebenes, zum Nachweis der Falschheit des fraglichen Satzes in der Allgemeinheit, in welcher er behauptet wird, geeignetes Beispiel s. m. in den „Leçons sur le calcul différentiel. Paris 1829. p. 105. und bei Moigno p. 72., so wie bei Duhamel (1841) p. 89., welcher Letztere, im Anschluss an das obige Beispiel $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, noch allgemeiner wie Cauchy sagt: „Il suit de là, que si $F(x)$ est une fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$, developpée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera par conséquent inexacte."

Möge der Herr Verfasser in diesen Bemerkungen nichts weiter als das reine Streben nach Wahrheit erkennen. Der in mehreren Beziehungen nicht in Abrede zu stellenden Verdienstlichkeit seines Buches, die wir innerhalb der oben näher bezeichneten Gränzen bereitwilligst und freudigst anerkennen, soll dadurch kein Abbruch geschehen. G.

---

## Geometrie.

Ueber die Kegelschnitte. Von G. Fr. Th. Koch, Mathematikus am Gymnasium zu Budissin. Programm des

**Gymnasiums zu Budissin von Ostern 1851. Budissin 1851. 4.**

Dieses schon im Jahre 1851 erschienene Programm ist uns leider erst jetzt bekannt geworden. Da es aber zu den verdienstlichen Schriften gehört, welche die Hauptsätze der Lehre von den Kegelschnitten aus einem allen diesen Curven gemeinschaftlichen allgemeinen Princip abzuleiten suchen, und sich leicht der verdienten Beachtung entziehen möchte, so scheint die folgende, freilich verspätete Anzeige wohl gerechtfertigt zu sein. Um eine deutliche Einsicht in das Wesen der vom Herrn Verfasser angewandten Methode zu gewinnen, ist es nöthig, die folgenden Erklärungen und weiteren Bestimmungen mit seinen eigenen Worten vorauszuschicken:

„Eine Linie, die aus an einander gränzenden Sehnen einer krummen Linie besteht, heisse eine Sehnenlinie dieser krummen Linie, und, wenn diese Sehnen alle gleich sind, eine gleichseitige Sehnenlinie; der Winkel, welchen zwei an einander gränzende Sehnen einer solchen Sehnenlinie mit einander bilden, heisse ein Sehnenwinkel. Die gewöhnliche Erklärung der Kreislinie mag, der später davon zu machenden Anwendung wegen, mit folgender vertauscht werden: Eine Linie, die so gestaltet ist, dass alle Winkel einer gleichseitigen Sehnenlinie derselben, welche aus unendlich vielen gleichen Sehnen besteht, immer einander gleich sind, welche Länge auch die gleichen Sehnen haben mögen, ist eine Kreislinie. Ist jeder der gleichen Winkel dieser Sehnenlinie kleiner als 2 R., so schneiden sich alle diese gleichen Winkel halbirenden Geraden in einem Punkte, welcher von allen Punkten der Kreislinie gleich weit entfernt ist und Mittelpunkt der Kreislinie heisst, und die Kreislinie ist in diesem Falle geschlossen, wie sich aus der gegebenen Erklärung der Kreislinie leicht nachweisen lässt. „Radius und Durchmesser haben die gewöhnliche Bedeutung. Eine solche, geschlossene Kreislinie heisse eine positive Kreislinie, die von ihr begränzte Ebene heisse der positive Kreis oder die positive Seite der Kreislinie, die auf der andern Seite der Kreislinie liegende unendliche Ebene heisse der negative Kreis, oder die negative Seite der Kreislinie. Die Gerade, welche einen der gleichen Winkel einer gleichseitigen Sehnenlinie einer Kreislinie halbirt, heisse die Axe der Kreislinie oder des Kreises und der Scheitelpunkt des halbirten Winkels der Anfang der Axe. Denkt man sich nun die gleichen Winkel einer gegebenen gleichseitigen Sehnenlinie einer gegebenen Kreislinie alle stetig und gleichmässig zunehmend, so dass sie also immer ein-

ander gleich bleiben, und zwar so, dass dabei der Anfang der Axe in seiner Lage bleibt, und dass die Axe, welche einen der Winkel der gegebenen Sehnenlinie halbirt, diesen Winkel, während er zunimmt, auch immer halbirt, so entsteht dadurch fortwährend eine gleichseitige Sehnenlinie, welche einer sich immer ändernden Kreislinie angehört, deren Radius immer zunimmt, wie leicht zu beweisen. Werden die Sehnenwinkel durch diese Zunahme endlich gestreckte Winkel, so wird die Kreislinie, welcher dann die gleichseitige Sehnenlinie angehört, eine unendliche Gerade, mit welcher die gleichen Sehnen selbst zusammenfallen, und die die gleichen Winkel der gleichseitigen Sehnenlinie halbirenden Geraden werden alle zu einander parallel, die Kreislinie hat keinen Mittelpunkt mehr, oder ihr Mittelpunkt liegt in unendlicher Entfernung, ihr Radius wird unendlich gross. Eine solche Kreislinie heisse eine unendliche Kreislinie. Die positive Seite dieser unendlichen Kreislinie ist immer die Seite derselben, welche die positive Seite der Kreislinie war, ehe die letztere unendlich wurde. Denkt man sich das eben angenommene Wachsen der gleichen Sehnenwinkel noch weiter fortgesetzt, so werden diese Winkel gleiche convexe Winkel, und die so gebildete Sehnenlinie gehört wieder einer geschlossenen Kreislinie an, welche sich aber, rücksichtlich der ersten Kreislinie, aus der sie entstanden ist, auf der entgegengesetzten Seite des Anfangs der Axe schliesst, gleichsam umgebogen ist, so dass sie nun ihre negative Seite einschliesst, und ihre positive Seite, die unbegränzte Ebene ausserhalb der Kreislinie, ausschliesst. Die die convexen Sehnenwinkel halbirenden Geraden schneiden sich wieder in einem Punkte, wenn sie rückwärts verlängert werden. Die Radien einer solchen Kreislinie sind also, verglichen mit den Radien der ersten positiven Kreislinie, negativ, denn sie entstehen, wenn die die gleichen Sehnenwinkel halbirenden Geraden über die Scheitelpunkte dieser Winkel hinaus verlängert werden, während die Radien einer positiven Kreislinie entstehen, wenn diese Geraden nach der entgegengesetzten Richtung verlängert werden. Diese Erweiterung des gewöhnlichen Begriffs vom Kreise, welche nach dem Gesetze der Stetigkeit in der Construction von Raumbegriffen sich aus dem obigen Bildungsgesetze der Kreislinie ergiebt, ist es hauptsächlich, worauf die Allgemeinheit der Eigenschaften aller Kegelschnitte beruht, und dieser weitere Begriff vom Kreise kann auch sonst mit Vortheil angewendet werden, wie z. B. in den Formeln der Brechungsgesetze der Linsen.

Unter der Entfernung eines Punktes von einer Kreislinie ist, entsprechend der Entfernung eines Punktes von einer Geraden,

die kürzeste Gerade zu verstehen, welche sich von dem gegebenen Punkte an die Kreislinie ziehen lässt, welche Gerade bekanntlich immer, vorwärts oder rückwärts verlängert, durch das Centrum der gegebenen Kreislinie geht.

Auf diese Erklärungen gründet sich nun die Erklärung eines sogenannten Kegelschnitts. Ein Kegelschnitt ist nehmlich eine Linie, in welcher jeder Punkt von einer gegebenen Kreislinie und einem gegebenen Punkte, welcher auf der positiven Seite dieser Kreislinie liegt, gleichweit entfernt ist.

Ist die gegebene Kreislinie eine positive, so heisst der Kegelschnitt eine Ellipse; ist die gegebene Kreislinie eine unendliche, so heisst der Kegelschnitt eine Parabel; ist die gegebene Kreislinie eine negative, so heisst der Kegelschnitt eine Hyperbel."

Auf die vorhergehende allgemeine Erklärung gründet der Herr Verfasser nun die Theorie der Kegelschnitte, wobei er sich, da seine Schrift zugleich einen pädagogischen Zweck hat, ganz richtig einer gemischten geometrischen und algebraischen Methode bedient, indem er die algebraische Rechnung stets an eine Figur anschliesst.

Möge die Schrift hierdurch der Beachtung unserer Leser empfohlen sein.

---

# Mechanik.

Ueber Seilcurven. Von Dr. T. Spieker, Oberlehrer an der Realschule zu Potsdam. (Vierter Jahresbericht der Städtischen Realschule zu Potsdam.) Potsdam. 1858. 4°.

Der Herr Verfasser hat schon in einem früheren Programm des Gymnasiums zu Bernburg (1852) eine verdienstliche Arbeit über Seilpolygone und die Kettenlinie geliefert, welches im Literarischen Berichte Nr. LXXVIII. S. 971. mit verdientem Lobe angezeigt, und namentlich der bei dieser Untersuchung angewandten elementaren Methode das Wort geredet worden ist. An jene frühere Arbeit schliesst sich die vorliegende zwar in gewisser Weise an, ist aber dessenungeachtet von derselben unabhängig und als eine ganz selbstständige Untersuchung zu betrachten, weil der Herr Verfasser, ohne auf seine frühere Arbeit zurückzugehen, die Differentialgleichungen der Seilcurven hier in selbstständiger Weise aus den leicht zu gewinnenden Grundeigenschaften der

Seilpolygone entwickelt hat. Denn dass bei dem vorliegenden Gegenstande mit blossen elementaren Methoden ohne die grösste Weitläufigkeit nicht mehr auszukommen war, versteht sich von selbst.

Die von dem Herrn Verfasser bei seiner Untersuchung befolgten allgemeinen Gesichtspunkte giebt derselbe auf folgende Art an: „Ein in zwei Punkten befestigtes, vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil bildet, wenn nur parallele Schwerkräfte auf dasselbe wirken, eine Seil- oder Kettencurve. Sind die Schwerkräfte ausserdem gleich, ist z. B. das Seil überall von gleicher Dicke und Dichtigkeit, so ist diese Curve die gemeine Kettenlinie. Sind dagegen die Schwerkräfte verschieden, ändert sich z. B. die Dichtigkeit des Seils, so entstehen, so bald diese Aenderung eine continuirliche ist, Seilcurven von verschiedener Gestalt. Ist nun eine Seilcurve ihrer Gestalt nach bekannt, so ist die erste Frage nach dem Gesetze, welches die an ihr wirkenden Schwerkräfte und die Spannungen innerhalb des Seils bei ihrer Aenderung befolgen. Nicht minder interessant ist das umgekehrte Problem, für ein vorgeschriebenes Aenderungsgesetz der Kräfte oder Spannungen die Gestalt der Kettencurve zu finden. Auch die Krümmung und der Schwerpunkt dieser Gebilde sind in Untersuchung zu ziehen, und zeigen gerade sehr allgemeine und einfache Resultate."

Geleitet von diesen allgemeinen Grundansichten hat der Herr Verfasser nun nach und nach zum Gegenstande seiner Untersuchung gemacht: I. Die Grundrelationen. II. Kräfte und Spannungen gegebener Seilcurven. 1. Der Kettenkreis. 2. Die Kettenparabel. 3. Die gleichseitige Hyperbel als Seilcurve. 4. Die Kettencycloide. III. Seilcurven gegebener Kräfte oder Spannungen. (Ein lehrreiches Kapitel, in welchem der Herr Verfasser jeden der drei Fälle, jenachdem die Schwerkräfte 1. von dem Bogen $s$; oder 2. von den Coordinaten $x, y$; oder 3. von dem Neigungswinkel $\varphi$ der Berührenden gegen den Horizont abhängen, besonders betrachtet hat, was Alles wieder durch zweckmässig gewählte und manche interessante Beziehungen darbietende Beispiele erläutert wird.) IV. Krümmung der Kettencurven im Scheitel. V. Schwerpunkt der Kettencurven.

Indem wir uns mit dieser allgemeinen Inhaltsangabe dieses sehr lesenswerthen Programms begnügen müssen, können wir nur noch im Allgemeinen hinzufügen, dass wir dasselbe für einen sehr dankenswerthen Beitrag zur höheren Geometrie und Mechanik halten, wodurch der Herr Verfasser, wie durch seine oben erwähnte, mehr elementar gehaltene Arbeit, einen neuen Beweis seines

schönen Talents für die zweckmässige, möglichst einfache Behandlung solcher Gegenstände geliefert hat, wozu wir ihm und der Lehranstalt, welcher er seine Kräfte widmet, von Herzen Glück wünschen.

## Krystallographie.

Ergänzungen zur Krystallometrie des regulären Systems. Von Dr. J. H. T. Müller, Oberschulrath und Director des Herzoglichen Realgymnasiums zu Wiesbaden. Wiesbaden. Ohne Jahreszahl. 4.

Diese Schrift enthält in ihrer ersten Hälfte ein abgeschlossenes Ganzes, nämlich eine Tafel der Cosinus aller Flächenwinkel des allgemeinsten Körpers des regulären Systems, in einer dem Bedürfnisse der Theorie entsprechenden Bezeichnungsweise. Der zweiten Hälfte, welche ein Bruchstück einer ausführlicheren Arbeit ist, kam es lediglich darauf an, den Weg zu zeigen, wie man aus ein Paar Keilen des Achtundvierzigflächners dessen Axen bestimmen könne, während die Krystallographen nur den umgekehrten Weg zu zeigen pflegen, der den Mineralogen über die Art zu den Axencoefficienten durch Messung zu gelangen im Dunkeln lässt. Das den kleinen Aufsatz beschliessende Abhängigkeitsgesetz der drei Achtundvierzigflächnerkeile dürfte bisher noch nicht bekannt gewesen sein, und verdient den für Krystallographie sich interessirenden Lesern, so wie die ganze verdienstliche Schrift, zur Beachtung empfohlen zu werden.

## Curiosität.

In einem den so eben erschienenen Grundlehren der höheren Analysis von Dr. C. H. Schnuse, Thl. II. Integralrechnung. Braunschweig 1858. beigegebenen „Offenen Sendschreiben" findet sich am Ende folgende

„Literarische Anzeige."

„Ich halte es für nothwendig: Blätter für mathematische Antikritik in zwanglosen Heften herauszugeben, damit die mancherlei schiefen Ansichten und grundlosen Urtheile, welche namentlich in den secundären mathematischen Zeitschriften verbreitet werden, in das gehörige Licht gestellt werden!

Heidelberg, den 25. Jan. 1858. Dr. Schnuse."

**Herr Schnuse und Kritik!!!**

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XXII.

### Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

J. Salomon, Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Ober-Real-Schulen. 2. Bd.: Die Elemente der Geometrie. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. 2 Thlr.

### Arithmetik.

J. Heger, Ueber die Auflösung eines Systems von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen. gr. 4°. geh. Wien. 2 Thlr.

J. Petzval, Integration der linearen Differential-Gleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. 5. Lief. gr. 4°. geh. Wien. 3 Thlr.

### Geometrie.

R. Guinodie, Traité de l'application de l'algèbre à la géométrie à deux et à trois dimensions, dans lequel, par les secours de l'analyse algébrique, ont été résolus plusieurs problèmes importants de la géométrie descriptive, et ont été trouvées les expressions des rayons de courbure et les équations des développées des courbes du second degré. Paris. 4°. Mit 28 Taf. 6 Thlr.

M. Hartmann Edler von Franzenshuld, Grundlehren der analytischen Geometrie des Raumes als Vorbereitungslehre für höhere Studien in diesem Fache. gr. 8°. Wien. geh. 1 Thlr.

H. Heilermann, Sammlung geometrischer Aufgaben. 2. Thl. 12°. geh. Coblenz. 1/4 Thlr.

J. Fr. Ley, Lehrbuch der Geometrie. 1. Thl. A. u. d. T.: Die Planimetrie. Mit eingedr. Holzschnitten. Bonn. 18 Ngr.

J. Schneider, Anfangsgründe der Planimetrie. 8°. geh. Wien. 16 Ngr.

G. Spörer, Die ebene Geometrie und Trigonometrie für den Schulgebr. bearbeitet. 1. Hft. 2. Aufl. gr. 8°. geb. Anclam. 1/4 Thlr.

### Trigonometrie.

J. E. Boher, Trigonometrie. 1. Cursus. gr. 8°. geh. Münster. 3 3/4 Ngr.

### Praktische Mechanik.

J. B. Belanger, Théorie de la résistance et de la flexion

plane des solides dont les dimensions transversales sont petites relativement à leur longueur. Paris. 8°. Mit 1 Taf. 1 Thlr.

## Optik.

F. K. Hillardt, Perspectivischer Zeichen-Apparat, welcher es einem Jeden möglich macht, die Theorie der Perspective aus leicht anzustellenden Beobachtungen abzuleiten etc. gr. 8°. geh. Wien. $\frac{1}{3}$ Thlr.

## Astronomie.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris par Urb. J. Le Verrier. Tome III. Paris. 4°. Mit 1 Taf. 9 Thlr.

M. Riedig, Himmelsatlas in 20 Blatt, nach den grossen Bode'schen Sternkarten gezeichnet. 2. Aufl. qu. 16. geh. Leipzig. $\frac{1}{4}$ Thlr.

## Physik.

A. Abrahski, Vorträge über höhere Physik, gehalten an der k. k. Lemberger Hochschule in den Jahren 1851/56. I. Bd. 1. Lief. (1. Abth.: Polarwirkende Naturagentien.) Lemberg. 4°. 1 Thlr.

P. Béron, Origine des sciences physiques et naturelles, et des sciences métaphysiques et morales, constatée suivant les lois physiques dans l'origine commune des fluides impondérables, de la pondérabilité, de la pesanteur, du mouvement et des trois états des corps, avec plusieurs gravures dans le texte. In 4. Paris.

F. E. J. Crüger, Schule der Physik, auf einfache Experimente gegründet und in populärer Darstellung für Schule und Haus methodisch bearbeitet. 4. Aufl. br. 8. geh. Erfurt. 2 Thlr.

A. Guyot, Tables, Meteorological and Physical, prepared for the Smithsonian Institution. Royal 8. London and Washington. 14 s.

L. Jenyns, Observations in Meteorology relating to Temperature, the Winds, Atmospheric Pressure, the Aqueous Phenomena of the Atmosphere, Weather Changes, etc.; being chiefly the Results of a Meteorological Journal kept for Nineteen Years at Swaffham Bulbeck, in Cambridgeshire, and serving as a Guide to the Climate of that Part of England. London. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

## Vermischte Schriften.

Mathematische Abhandlungen der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1857. gr. 4°. geh. Berlin. 1 Thlr.

Physikalische Abhandlungen der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1857. gr. 4°. geh. Berlin. 2 Thlr.

J. Strehl, Aufgaben zur Berechnung der Flächen u. der geometrischen Körper, nebst Aufgaben aus der Fisik und Mechanik. 3. Aufl. geh. Wien. 16 Ngr.

# Literarischer Bericht

## CXXIII.

Am 15. August (1858) starb in Giessen der als Lehrer sehr geschätzte ausserordentliche Professor Dr. Friedrich Zamminer, erst 41 Jahr alt. Derselbe hat sich auch durch mehrere verdienstliche schriftstellerische Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik und Physik vortheilhaft bekannt gemacht und einen geachteten Namen erworben. Dem Herausgeber des Archivs hat er, so lange dieser mit ihm in Briefwechsel zu stehen das Glück hatte, sehr viele Freundlichkeit erwiesen, was ihm stets ein dankbares Andenken in dessen Herzen sichern wird, um so mehr, weil die höchst ehrenhafte Gesinnung und Lebensanschauung, die in allen seinen Briefen sich aussprach, die grösste Achtung vor seinem trefflichen Charakter erwecken musste, und seinen frühen Verlust für sein Vaterland und die Wissenschaft nur als einen um so grösseren erscheinen und bedauern lässt. Wir unterlassen jetzt mehr über den Verstorbenen zu sagen, wünschen aber sehr, dass uns recht bald aus kundiger Feder ein zugleich seine wissenschaftlichen Leistungen würdigender Necrolog eingesandt werden möge, den in den Literar. Ber. unserer Zeitschrift aufzunehmen uns zu wahrer Freude gereichen wird. G.

## Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1858. Vingt-quatrième année. Bruxelles. 1858.

Ausser seinem allen Jahrgängen gemeinschaftlichen Inhalte über die Einrichtung der Akademie und die Vorgänge in derselben, enthält dieser Jahrgang eine von Herrn D'Omalius d'Halloy verfasste Notice (biographique) sur André Dumont, Membre de l'Académie, né à Liège le 15 Février 1809, décédé à Mons le 28. Février 1857, welcher als Mineralog und Geolog dem Kreise des Archivs ferner steht. Aber in literarischer Rücksicht ist dieser Jahrgang sehr wichtig, und fordert eine Anzeige in diesen Literarischen Berichten. Denn derselbe enthält auf 114 Seiten ein vollständiges Inhaltsverzeichniss der in wissenschaftlicher Rücksicht so wichtigen Memoiren der Belgischen Akademie, welches für jeden Mathematiker, Physiker u. s. w. ein sehr wichtiges literarisches Hülfsmittel sein wird, wenn er bei seinen eigenen Arbeiten auf die Arbeiten Belgischer Gelehrten zurückzugehen Veranlassung finden sollte, weshalb wir unsere Leser auf dieses höchst verdienstliche Inhaltverzeichniss dringend aufmerksam machen. Dasselbe besteht aus den folgenden Abtheilungen: I. Table générale par volumes. p. 102—p. 132. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Bruxelles. Mémoires des membres. Tome I. 1820. — Tome XXX. 1857. — p. 133. — p. 147. Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Bruxelles. Tome I. 1847. — Tome XXVIII. 1856. 4°. — p. 148.—149. Mémoires couronnés publiés dans le format in 8°. Tome I. 1840. — Tome VI. 1855. — II. Table des noms d'auteurs p. 151.—p. 182. — III. Table des matières p. 183.—214.

Möchten doch auch andere Akademien solche vollständige Verzeichnisse ihrer Schriften veröffentlichen, die für alle, denen keine grossen öffentlichen Bibliotheken zu Gebote stehen, eins ehr wichtiges Hülfsmittel darbieten und gewiss mit grossem Danke aufgenommen werden würden. Auch möchte — beiläufig gesagt — eine Fortführung des für seine Zeit sehr verdienstlichen: Repertorium commentationum a societatibus litterariis editarum. Secundum disciplinarum ordinem digessit J. D. Reuss. (Mathesis etc. etc. Tom. VII. Gottingae. 1808.) bis auf die jetzige Zeit ein sehr anzurathendes literarisches Unternehmen sein, und gewiss von allen Gelehrten mit Dank aufgenommen werden.

---

## Trigonometrie.

Logarithmisch-trigonometrische Dreiecksberechnung. Eine Sammlung berechneter Beispiele für den

Schulgebrauch. Von C. Powalky. Ebene Trigonometrie. Berlin. Dümmler. 1858. 8°.

Diese Schrift enthält eine grosse Anzahl berechneter numerischer Beispiele zur ebenen Trigonometrie, und scheint, so weit sich ohne längeren Gebrauch darüber urtheilen lässt, mit grossem Fleisse und grosser Sorgfalt bearbeitet zu sein. Für die ebene Trigonometrie hat sich der Herr Verfasser darauf beschränkt, eine grosse Auswahl von jeder Art der einfachen Dreiecks-Berechnungen zu geben und ausserdem einige einfache und zusammengesetze Beispiele der Aufgabe: Wenn 4 Punkte gegeben sind, die Entfernung von zweien derselben und die Winkel an jedem von 2 Punkten nach den anderen 3 Punkten, die Entfernung der anderen Punkte von einander und im Allgemeinen die Seiten, Diagonalen und Winkel des durch die 4 Punkte bezeichneten Vierecks zu bestimmen (mit Einschluss des nach Pothenot benannten Problems). Die uns noch nicht vorliegenden Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie sollen häufig eine astronomische Einkleidung erhalten, wobei für die zu Grunde zu legenden Zahlen-Angaben das Berliner Jahrbuch für 1860 benutzt worden ist, wobei wir im Interesse preussischer Schulen bemerken, dass wir lieber gesehen hätten, wenn der Herr Verfasser das nautische Jahrbuch von Bremiker zu Grunde gelegt hätte, welches viel wohlfeiler ist als das Berliner Jahrbuch (es kostet nur 15 Sgr.) und schon deshalb den Schulen weit näher liegt, ganz abgesehen von seinem für Schulen sich auch mehr eignenden Inhalte. In einer Einleitung sind die allgemeinen Rechnungsvorschriften in geeigneter Weise erläutert. Wir glauben auf diese Schrift als ein zweckmässiges Hülfsmittel für den Unterricht in der Trigonometrie aufmerksam machen zu müssen, namentlich auch wegen der grossen Reichhaltigkeit seines Inhalts.

---

## Mechanik.

Lehrbuch der höheren Mechanik von Louis Navier. Deutsch herausgegeben von Ludewig Mejer, Lehrer am Lyceum zu Hannover. Navier's Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Supplementband. Hannover. Hahn. 1858. 8. 1 Thlr.

Diese Uebersetzung des Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique par M. Navier. Paris. 1841. ist mit Fleiss und Sachkenntniss gearbeitet, und wird

manchen praktischen Lehranstalten, auf denen das Buch als Lehrbuch gebraucht wird, willkommen sein. Das Buch bietet manche Eigenthümlichkeiten dar, namentlich in der Entwickelung der Grundelemente der Statik, die freilich sich schwerlich allgemeinen Beifalls erfreuen dürfte, was auch der Vorredner, Herr Professor Wittstein in Hannover, ganz richtig andeutet. Wir haben aber darüber hier um so weniger weiter etwas zu bemerken, weil der Inhalt des schon im Jahre 1841 erschienenen und sehr verbreiteten Buchs allgemein bekannt ist, und es hier zunächst nur darauf ankam, die Existenz der vorliegenden recht guten Uebersetzung anzuzeigen.

---

## Geodäsie.

**Studien über die Methoden und die Benützung hypsometrischer Arbeiten, nachgewiesen an den Niveauverhältnissen der Umgebungen von Prag. Ein neuer Beitrag zur Geodäsie und zur Orographie von Carl Kořistka, Professor der Geodäsie am polytechnischen Institute zu Prag, der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften daselbst und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften Mitgliede. Mit zwei Niveaukarten und mehreren Holzschnitten. Gotha. Justus Perthes. 1858. 4°. 2 Thlr. 10 Sgr.**

Der Herr Verfasser des vorliegenden verdienstlichen und in vielen Beziehungen wichtigen Werks hat seit einer längeren Reihe von Jahren, theils auf Veranlassung der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien, theils auf Veranlassung der naturwissenschaftlichen Section des böhmischen Landes-Museums, sich mit hypsometrischen und orographischen Arbeiten in den nordöstlichen Alpen und in der Stadt Prag und deren Umgebungen eifrig beschäftigt, und diesen, je mehr es an dergleichen Arbeiten leider noch fehlt, desto verdienstlichern Arbeiten einen grossen Theil seiner Zeit und Kräfte gewidmet. Als eine Frucht dieser Arbeiten, namentlich der letzteren, kann dieses Werk betrachtet werden. Um aber den Leser sogleich auf den richtigen Standpunkt zu stellen, aus welchem er dasselbe zu beurtheilen hat, und ihm den richtigen Maassstab für dessen Wichtigkeit an die Hand zu geben, müssen wir gleich von vorn herein bemerken, dass dasselbe keineswegs bloss die Resultate der in Prag und dessen Umgebungen ausgeführten hypsometrischen Arbeiten, sondern vielmehr

ganz besonders eine nach unserer Meinung vorzügliche Anleitung zu der Ausführung und Anordnung solcher Arbeiten überhaupt, welche durch jene speciellen Arbeiten in Prag und seinen Umgebungen wie durch ein vollständig ausgeführtes Beispiel trefflich erläutert wird, enthält, so dass wir das vorliegende Werk für Jeden, der mit der Ausführung ähnlicher Arbeiten sich zu beschäftigen beabsichtigt, unentbehrlich halten. Und eben wegen seines trefflichen Gehalts in allgemein wissenschaftlicher oder theoretischer Beziehung — neben dem sehr verdienstlichen praktischen Resultaten — muss dieses Werk als ein sehr werthvoller Beitrag zur Geodäsie überhaupt betrachtet werden.

Von den verschiedenen Methoden, nach denen Höhenbestimmungen sich ausführen lassen, hat der Herr Verfasser die drei wichtigsten und in der Praxis bei Weitem am Häufigsten und mit der grössten Aussicht auf hinreichende Genauigkeit in Anwendung kommenden, nämlich die trigonometrische Methode, das Nivellement im eigentlichen Sinne und die barometrische Methode, deren Kenntniss natürlich im Allgemeinen bei dem Leser vorausgesetzt wird, einer sorgfältigen Untersuchung unterworfen, rücksichtlich der von ihnen zu erwartenden Genauigkeit gegen einander abgewogen, und, was wir überhaupt für ein wesentliches Verdienst dieses Werks halten, die möglichen Fehler vollständig nachgewiesen, so wie deren Einfluss auf die Resultate genau untersucht und dadurch überall einen Maassstab für die zu erreichende Genauigkeit oder eine Gränze für die zu befürchtenden Fehler zu gewinnen gesucht, wobei durchgängig die bekannten neueren theoretischen Methoden, welche man dergleichen Bestimmungen zu Grunde zu legen hat, mit grosser Umsicht in Anwendung gebracht worden sind. Der trigonometrischen Methode ist mit Recht die meiste Aufmerksamkeit geschenkt, und dieselbe ist bei den Messungen in den Umgebungen Prags vorzugsweise oder fast durchgängig in Anwendung gebracht worden. Die zur Berechnung der Höhen in Bezug auf einen gewissen Horizont erforderlichen Distanzen hat der Herr Verfasser aus guten Karten entnommen, was immer nothwendig und zweckmässig sein wird, wenn die Messungen vorzugsweise hypsometrischen Zwecken dienen, und nicht zu viele Zeit für sich in Anspruch nehmen sollen. Zur Messung der Höhenwinkel ist aber auf S. 6. ein zweckmässiges, namentlich sehr leicht transportables Instrument beschrieben worden, bei welchem eigentlich das den bekannten trefflichen Stampfer'schen Nivellir-Instrumenten, die in dem polytechnischen Institute in Wien in so ausgezeichneter Weise verfertigt werden, zu Grunde liegende Princip der Winkelmessung durch die

Schraube an einem kleinen leicht transportablen Theodoliten in Anwendung gebracht worden ist, so dass sich mit diesem Instrumente Winkel bis 6° sehr scharf, bis 50° noch mit der Genauigkeit einer Minute messen lassen. Nimmt man das umlegbare Fernrohr aus den Trägern, so kann das Instrument in ein kleines leichtes Lederfutteral gepackt und bei den grössten Gebirgsreisen an einem Hängeriemen ohne besondere Beschwerlichkeit getragen werden. Als Stativ dient ein Zapfenstativ, dessen drei Füsse sich auf der Reise gut in einen einzigen starken zusammen legen lassen *). Das eigentliche Nivellement ist, wie zu erwarten war, in der Stadt Prag selbst und ihren nächsten Umgebungen angewandt worden, wobei der Assistent bei'm Lehrfache der Geodäsie am Prager polytechnischen Institute, Herr M. Sluka, die verdienstlichste Hülfe leistete **); und die barometrische Methode hat überall, wo ihr Gebrauch zweckmässig schien und namentlich eine Vergleichung mit früheren derartigen Messungen gestattete, Anwendung gefunden.

In dem zweiten, „die orographischen Resultate" überschriebenen Abschnitte beschäftigt sich der Herr Verfasser in sehr lehrreicher Weise zunächst mit den verschiedenen graphischen Darstellungsmethoden der Höhenverhältnisse. In Deutschland war, und ist wohl auch theilweise noch, in dieser Beziehung vielfach die Lehmann'sche Methode ***) in Gebrauch. Wer aber aus Erfahrung weiss †), welcher Aufwand von Zeit und Mühe in Anspruch genommen wird, und welche Anstrengungen dem so kostbaren Auge zugemuthet werden müssen, wenn man sich eine hinreichende Uebung in der Ausführung eine schöne Ansicht gewährender derartiger Zeichnungen erwerben will, — (wenn man

*) Da wir hoffen und wünschen, dass das vorliegende verdienstliche Werk das Interesse für hypsometrische Arbeiten neu beleben und zu denselben Veranlassung geben wird, so ersuchen wir den Herrn Verfasser, uns zur Mittheilung im Archiv die Werkstätten, aus denen das fragliche Instrument in vorzüglicher Güte bezogen werden kann, nebst den Preisen für die verschiedenen Arten und Dimensionen desselben gefälligst anzugeben. G.

**) Auch den Herren Krejči und W. Jirsak bekennt sich der Herr Verfasser für mannigfaltige Hülfeleistungen zu Dank verpflichtet.

***) Ausser welcher der Herr Verfasser auch die alt-französische oder italienische Methode ausführlich bespricht.

†) Auch der Herausgeber des Archivs darf sich anmaassen hierbei ein Wort mitzureden, da in seiner Absicht ursprünglich die Verfolgung einer praktischen mathematischen Laufbahn lag, und er eigentlich nur durch Zufall der reinen Theorie zugeführt worden ist.

dabei namentlich noch in Anschlag bringt, dass dieselben doch gewiss keineswegs den beabsichtigten Zweck auch nur in annähernder Vollständigkeit erfüllen) — wird gewiss mit uns wünschen, dass diese Methode bald gänzlich aufgegeben und verlassen werde *). Wir billigen es daher ganz, dass der Herr Verfasser bei Entwerfung der beiden dem Werke beigegebenen schönen Niveaukarten der Stadt Prag und ihrer Umgebung eine Methode in Anwendung gebracht hat, welche wir die **reine** Methode der Schichten- oder Niveaulinien, oder am kürzesten die Methode der Horizontalen, nennen möchten, die, in ihrem Princip sehr einfach, gewiss allen billigen Anforderungen genügt. Man denkt sich nämlich, von der Oberfläche des Meeres angefangen, durch das Terrain in gleich grossen Vertikalabständen horizontale Ebenen gelegt, welche die Oberfläche des Terrains in gewissen Linien, den Niveaulinien, Schichtenlinien oder Horizontalen schneiden; diese Curven werden auf den Horizont projicirt, die Projectionen in die Karten eingetragen, und denselben ihre Seehöhen beigeschrieben. Auf der Niveaukarte der Stadt Prag ist die Höhe der Schichten = 1 Wiener Klafter = 6 Wiener Fuss, auf der Niveaukarte der Umgebungen von Prag dagegen = 10 Wiener Klaftern = 60 Fuss angenommen; der Maassstab der letzteren ist 1 Zoll = 200 Klaftern, der Maassstab der letzteren dagegen 1 Zoll = 2000 Klaftern. Nach den verschiedenen Höhen der Schichten sind dieselben in verschiedenen Farbentönen illuminirt, natürlich nicht jede einzelne Schicht, sondern mehrere zusammen mit gleicher Farbe nach einer einfachen Gruppirung. Die niedrigsten Schichten sind weiss, die höchsten am dunkelsten gehalten. Häufig wird umgekehrt verfahren; für das Verfahren des Herrn Verfassers spricht aber schon der Umstand, dass das niedrigste Terrain gewöhnlich das am meisten bevölkerte ist, also auch das meiste Detail enthält. Ueberhaupt sollte man bei allen diesen Dingen das Schönheitsprincip immer dem Nützlichkeitsprincip unterordnen, was auch der Herr Verfasser in sehr einsichtsvoller, ein richtiges Maass haltender Weise gethan hat. Beide Karten sind mit der grössten Sorgfalt, Genauigkeit und Sauberkeit ausgeführt und können als Muster gelten. Auf eine Menge lehrreicher Bemerkungen im zweiten Abschnitte über die vertikale Erhebung des Bodens, Neigungswinkel desselben, Wasserlauf (hierbei auch die Lignes de la plus

*) Bei'm preussischen Heere hat bekanntlich der kürzlich in hohem Alter verstorbene hochverdiente General v. **Müffling**, schon vor ziemlich langer Zeit, einer gegen die **Lehmann**'sche sehr vereinfachten Methode Eingang und Geltung zu verschaffen gesucht.

grande pente), Terminologie u. s. w. können wir hier nur noch ganz im Allgemeinen aufmerksam machen.

Wir wiederholen zum Schluss, dass wir dieses Werk sowohl in theoretischer als praktischer Rücksicht für sehr wichtig halten, so dass Niemand, wer sich mit hypsometrischen Arbeiten zu beschäftigen denkt, dasselbe wird entbehren können. Es ist ein sehr verdienstlicher Beitrag zur wissenschaftlichen Geodäsie und liefert in praktischer Rücksicht ein sehr anschauliches Bild der Configuration einer in geologischer und orographischer Rücksicht sehr merkwürdigen Gegend, so dass wir dem Herrn Verfasser zu der Vollendung dieser verdienstlichen hypsometrischen Arbeiten, so weit sie bis jetzt geführt worden sind, ohne dass derselbe sie, wie wir annehmen zu dürfen glauben, als abgeschlossen betrachtet, nur Glück wünschen können.

---

## Vermischte Schriften.

**Annali di Matematica pura ed applicata pubblicata da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Br. No. CXXI. S. 15).**

No. 4. (Luglio e Agosto 1858.) Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche. Memoria del Prof. Enrico Betti. p. 193. — Teorica de' moti piccioli d'un galleggiante omogeneo. Memoria del Prof. Delfino Codazzi. p. 205. — Mémoire sur la probabilité des erreurs dans la somme, ou dans la moyenne de plusieurs observations par le P. M. Jullien S. J. (Continuazione e fine). p. 227. — Sulla determinazione de coefficienti della trasformata di Tschirnaus: applicazione alla ridotta di Jerrard dell' Equazione generale di quinto grado. Nota del Prof. Giov. Lavagna. p. 238.

**Rivista bibliographica.** Sulla simultanea trasformazione di due forme quadratiche. Articolo del Prof. Francesco Brioschi. p. 250. — Sulla risoluzione dell' Equazioni di quinto grado. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 256. — Sulle funzioni Bernoulliane ed Euleriane. Articolo del Prof. F. Brioschi. q. 264. Pubblicazioni recenti. p. 264.

# Literarischer Bericht
# CXXIV.

## Geodäsie.

**Abbildung krummer Oberflächen auf einander und Anwendung derselben auf höhere Geodäsie von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. Vieweg. 1858. 8.**

Bei der grossen Ausdehnung, welche gegenwärtig die Mathematik gewonnen hat, halten wir Monographien wie die vorliegende, welche Gegenstände von grosser wissenschaftlicher Bedeutung in einer auch weniger Geübten möglichst leicht zugänglichen Weise behandeln und, namentlich mit Rücksicht auf die Anwendungen, welche sich oft von denselben machen lassen, weiter ausführen. Zu dieser Klasse nach unserer Meinung sehr verdienstlicher Schriften gehört auch die vorliegende des den Lesern des Archivs als gründlicher und gewandter Mathematiker längst bekannten Herrn Verfassers. Dieselbe beschäftigt sich im Allgemeinen mit der Aufgabe: „Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird", in einer, an die in verschiedenen Schriften publicirten bekannten berühmten Arbeiten von Gauss im Wesentlichen zwar sich anschliessenden, aber doch vielfach eigenthümlichen, überaus fasslichen Weise, so dass wir diese Schrift allen, die sich mit höheren geodätischen Arbeiten zu beschäftigen haben, dringend empfehlen, so wie wir selbst dieselbe mit Vergnügen gelesen haben. Die allgemeine Theorie ist, wie gesagt, zuerst sehr fasslich entwickelt und dann auf verschiedene besondere Karten-Projectionen in lehrreicher Weise angewandt worden. Der Inhalt ist im Allgemeinen folgender: „Theorie der Abbildung krummer Oberflächen auf einander. — Anwendung auf die Kugel und das Rotationsellipsoid. — Anwendung auf Kartenprojectionen (Seekarten. Stereographische

Polarprojection. Stereographische Aequatorealprojection). — Abbildung des Ellipsoids auf einer Kugel. — Bestimmung der geographischen Lage der Eckpunkte, eines geodätischen Netzes. — Correctionen, welche an die Resultate anzubringen sind. — Auszug aus der Gauss'schen Tafel."

Möge der Herr Verfasser die mathematische Literatur noch öfter mit solchen lehrreichen Monographien beschenken.

---

## Praktische Mechanik.

**Theorie und Bau der Wasser-Räder von J. Redtenbacher, Director der polytechnischen Schule zu Carlsruhe und Professor des Maschinenbaues. Mit 6 kleinen Tafeln und einem Atlas von 25 lithographirten Tafeln. Zweite Auflage. Mannheim. Bassermann. 1858. 4. 10 Thlr.**

Wegen der grossen Wichtigkeit des vorliegenden Werkes, in welchem die Theorie der Wasserräder von ganz eigenthümlichen Standpunkten aus behandelt ist, für den Maschinenbau, zeigen wir das Erscheinen dieser zweiten Auflage hier an, ohne uns weiter über das seinem Inhalte nach hinreichend bekannte Werk zu verbreiten, indem der geehrte Herr Verfasser in der Vorrede selbst sagt, dass die zweite Auflage sich von der ersten nur durch die äussere Form und nicht durch den Inhalt unterscheide. Hervorheben wollen wir nur die grosse Deutlichkeit, mit welcher in allen Fällen die allgemeinen Bedingungen, auf deren mathematischen Ausdruck es ankommt, hingestellt worden sind, was wir namentlich in, der praktischen Mechanik angehörenden Werken nicht selten vermisst haben. Die eigentliche mathematische Entwickelung, welche in diesem Werke überall streng und elegant ist, schliesst sich dann immer von selbst an. Möge auch diese neue Auflage die so sehr verdiente Beachtung im weitesten Kreise finden.

---

## Physik.

**Lehrbuch der Experimental-Physik zum Gebrauche in Gymnasien und Realschulen, so wie zum Selbstunterrichte. Leichtfasslich dargestellt und mit vielen in's praktische Leben einschlagenden Beispielen er-**

läutert von Dr. August Kunzek, k. k. Professor der Physik an der Universität zu Wien u. s. w. Mit 220 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Sechste, gänzlich umgearbeitete Auflage. Wien. Braumüller. 1858. 8.

**Dieses Lehrbuch der Experimental-Physik für Schulen ist uns leider erst jetzt in seiner so eben erschienenen sechsten Auflage bekannt geworden, welches allein der Grund ist, dass dasselbe in diesen literarischen Berichten noch keine Anzeige gefunden hat, die es gar sehr verdient.**

Zunächst müssen wir auf den Zusammenhang hinweisen, in welchem wenigstens in gewisser Weise dieses Lehrbuch mit zwei anderen trefflichen physikalischen Werken desselben Herrn Verfassers steht. Dasselbe bildet nämlich mit dem Lehrbuche der Physik mit mathematischer Begründung. Wien. 1853. und den Studien aus der höheren Physik. Wien. 1856., welche zwei Werke in unseren Literarischen Berichten Nr. LXXXVI. S. 11. und Nr. CV. S. 7. mit verdientem Lobe angezeigt worden sind, einen für die verschiedenen Unterrichtsstufen methodisch vom Leichteren zum Schwereren, vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitenden Cursus der gesammten Physik, welchem wir, was namentlich vollständige Gründlichkeit, in den von dem Herrn Verfasser in jedem Falle sich selbst gesetzten Schranken, betrifft, kaum einen ähnlichen an die Seite zu setzen wüssten. In dem Literarischen Berichte Nr. LXXXVI. haben wir schon gezeigt, wie trefflich dem Herrn Verfasser in dem ersten der beiden genannten Bücher eine Darstellung des betreffenden Lehrstoffes bloss mit Hülfe der Elementar-Mathematik gelungen ist, und wie sehr er dabei seine eigene Kenntniss dessen documentirt hat, was man eigentlich mathematische Strenge zu nennen berechtigt ist, die sich, was namentlich die Elemente betrifft, nur aus dem sorgfältigen Studium der unübertreffbaren Muster schöpfen und gewinnen lässt, welche auf geometrischem Gebiete die griechischen Geometer uns hinterlassen haben. Dass bei einer solchen elementar-mathematischen Darstellung nicht jede Lehre bis zu ihrer äussersten Gränze geführt werden kann, versteht sich von selbst. Nehmen wir etwa die Theorie des einfachen Pendels als Beispiel, so wird man auf elementarem Wege nicht die unendliche Reihe vollständig gewinnen können und wollen, durch welche bekanntlich die Zeit einer Pendelschwingung dargestellt wird; vielmehr wird man sich mit der Entwickelung einiger wenigen Anfangsglieder dieser Reihe begnügen müssen, was auch für's Erste völlig hinreicht, dem Schüler vielfache Belehrung gewährt und seinen Geist kräftigt

und bildet, wenn jede solche Entwickelung, wie überall in dem genannten Werke, nur — auch in ihrer beschränkteren Gestalt — mit völliger mathematischer Strenge und Schärfe gegeben wird. — Die Weiterführung der physikalischen Lehren bis zu ihrer äussersten Gränze, also die völlig genaue Darstellung der Naturgesetze in der Sprache der Mathematik, wobei natürlich die durch die höhere Analysis gebotenen kräftigen Hülfsmittel in weitester Ausdehnung in Anspruch genommen werden müssen, ist die Aufgabe des zweiten der beiden oben genannten Werke des Herrn Verfassers, welches wir allen denen, die mit den erforderlichen mathematischen Kenntnissen ausgerüstet sind, von Neuem nicht genug empfehlen können.

Diesen beiden Werken von einer höheren Tendenz schliesst sich nun das vorliegende Elementarbuch in würdiger Weise an, und vollendet gewissermaassen in methodischer Rücksicht den physikalischen Cursus, da natürlich im Allgemeinen der Inhalt in allen drei Werken eben so unverändert derselbe ist, wie die ewige Wahrheit selbst. Dasselbe, — bestimmt für die ersten Anfänger und eben deshalb auch besonders bestimmt, das Interesse an der herrlichen Wissenschaft, welcher diese drei Werke gewidmet sind, in dem jugendlichen Geiste zu wecken und zu weiterem Fortschreiten denselben aufzumuntern, — setzt mit richtigem pädagogischen Takte an die Stelle der strengen mathematischen Begründung zunächst und vorzugsweise das Experiment, jedoch, wie gesagt nur vorzugsweise, da die Anwendung der Mathematik, wo es irgend zweckentsprechend war, keineswegs ausgeschlossen worden ist, aber überall nur in sehr beschränktem Maasse, so weit man etwa höchstens mit den ersten Elementen der Geometrie, einschliesslich natürlich der Lehre von den Proportionen und von der Aehnlichkeit, reicht, Berücksichtigung gefunden hat, um den Anfänger gleich bei'm Eintritt in die Wissenschaft fühlen zu lassen, dass in derselben ohne Mathematik nirgends etwas Rechtes anzufangen ist. Zu den Experimenten wird keineswegs ein complicirter und sehr kostspieliger Apparat in Anspruch genommen, sondern es werden vollständig die Gränzen eingehalten, welche in dieser Beziehung in den meisten Ländern den Gymnasien und Realschulen, vielleicht mit Ausnahme einiger besonders begünstigten Lehranstalten, gesteckt sind. Besonders rühmend müssen wir noch hervorheben: die Bestimmtheit und Klarheit, womit überall die Naturgesetze ausgesprochen sind; ferner die namentlich für den ersten Elementar-Unterricht so ungemein wichtige strenge Sonderung des bloss Hypothetischen von dem, was als völlig fest begründet, als völlig gewiss und ausge-

macht angesehen werden darf; endlich die vielfachen Beziehungen, welche auf das praktische Leben genommen worden sind, die jedenfalls zur Erhöhung des Interesses an der reinen Wissenschaft wesentlich beizutragen sehr geignet sind. Bei'm ersten physikalischen Unterrichte kommt es gar nicht darauf an, den Anfänger mit einer Fülle von Thatsachen zu überhäufen, ihm, worin selbst manche nur für den ersten Unterricht bestimmte Lehrbücher leider ihre Stärke suchen, immer das Neueste mitzutheilen, sondern vielmehr darauf, ihn in einfacher nüchterner Sprache mit den wichtigsten Naturerscheinungen, theils auf dem Wege des Experiments, theils mittelst ganz einfacher mathematischer Betrachtungen bekannt zu machen, dadurch seinen Blick für das, was stündlich um ihn herum vorgeht, zu schärfen und zu üben, ihn dadurch für die Eindrücke der Schöpfung empfänglich zu machen und stets auf das Höhere im Leben hinzuweisen. In allen diesen Beziehungen scheint uns das vorliegende Elementarbuch gleichfalls eine richtige Mitte getroffen zu haben.

Wir haben uns bei diesem Schulbuche und seinem Verhälthältniss zu den beiden oben genannten grösseren Werken von einer höheren Tendenz, länger verweilt, als wir dies bei Büchern dieser Art zu thun gewohnt sind, weil die in den drei besprochenen Werken befolgte, vom Leichteren zu Schwereren methodisch fortschreitende, Behandlung der Physik für die Zwecke des Unterrichts so vollkommen mit unseren eigenen, auch in den Literarischen Berichten schon oft genug ausgesprochenen Ansichten über diesen für die allseitige Ausbildung des jugendlichen Geistes so ungemein wichtigen, durch kein anderes wissenschaftliches Gebiet zu ersetzenden Unterrichtszweig übereinstimmt, dass uns selbst kaum noch etwas zu wünschen übrig bleibt.

Dem Herrn Verfasser wünschen wir aber aufrichtig Glück zu der Vollendung dieser drei Werke und empfehlen dieselben allen Lehrern der Mathematik und Physik an höheren Unterrichtsanstalten, sowohl für ihre eigenen wissenschaftlichen Zwecke als auch im Interesse ihrer Schüler nochmals.

---

## Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien (S. Literar. Ber. Nr. CXVII. S. 5.)

Jahrgang 1857. Band XXIV. Heft 3. In diesem Hefte

befinden sich mehrere interessante Berichte über die Expedition der „Novara", namentlich einer von dem Befehlshaber derselben, Herrn v. Wüllersdorf.

Jahrgang 1857. Band XXV. Heft 1. Brücke: Ueber Gravitation und Erhaltung der Kraft. S. 19. — Spitzer: Integration der Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x)y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

(S. mit Weiterem unten Band XXVI.) S. 31. — Knochenhauer: Beobachtungen über zwei sich gleichzeitig entladende Batterien. S. 71. — Zantedeschi: Delle dottrine del terzo suono, ossia della conicidenza delle vibrazioni sonore, con un cenno sulla analogia, che presentano le vibrazioni luminose dello spettro solare. Memoria I. S. 145. — Zantedeschi: Della corrispondenza, che mostrano fra loro i corpi sonori nella risonanza di più suoni in uno. Memoria II. S. 165. — Della unità di misura dei suoni musicali, dei loro limiti, della durata delle vibrazioni sui nervo acustico dell' uomo, e dell' innalzamento del tono fondamentale avvenuto nei diaspason di acciajo, in virtu di un movimento spontaneo molecolare. Memoria III. S. 172. — Fritsch: Untersuchungen über das Gesetz des Einflusses der Lufttemperatur auf die Zeiten bestimmter Entwickelungsphasen der Pflanzen, mit Berücksichtigung der Insolation und Feuchtigkeit. S. 240. — v. Littrow: Physische Zusammenkunft der Planeten Amphitrite und Melpomene im November 1857. (Herr v. Littrow hat bei seinen verdienstlichen Untersuchungen über die Zusammenkünfte der Planeten in ihren Bahnnähen gefunden, dass die beiden genannten Planeten am 17. November 1857 etwa 2,3 Millionen geographische Meilen von einander entfernt waren). S. 251. — Stur: Ueber den Einfluss des Bodens auf die Vertheilung der Pflanzen. S. 423.

Jahrgang 1857. Band XXV. Heft 2. Kreil: Ueber zwei Reihen meteorologischer Beobachtungen in den afrikanischen Missions-Stationen Chartum und Gondokorò. (Ein sehr lehrreicher Aufsatz über die Beobachtungen an zwei so entfernten Stationen, von denen die erstere am Zusammenflusse des blauen und weissen Nils, die letztere am weissen Nil liegt. Die Beobachtungen sind von dem verstorbenen Missionär Dovyak ausgeführt, und Herr Kreil sagt mit Recht, dass diese Beobachtungen hauptsächlich deshalb von besonderem Interesse sind, weil sich in ihnen der Einfluss der Wüste deutlicher ausspricht, als man aus den bisher bekannten Beobachtungen der afrikanischen Stationen, die sämmtlich am Meere liegen, entnehmen konnte.) S. 476. — Grailich und Handl: Note über den Zusammenhang zwischen der Aende-

rung der Dichten und der Brechungs-Exponenten in Gemengen von Flüssigkeiten. S. 515. — Benedikt: Ueber die Abhängigkeit des elektrischen Luftwiderstandes von der Grösse und Dauer des Stromes. S. 590.

Jahrgang 1857. Band XXVI. Petzval: Bericht über dioptrische Untersuchungen. Fortsetzung. (Wir haben schon früher auf das grosse Interesse, welches diese Berichte über die dioptrischen Untersuchungen des Herrn Professor Petzval gewähren, hingewiesen, und machen von Neuem auf dieselben aufmerksam. Es ist sehr zu wünschen, dass der Herr Verfasser das grosse Werk über diese langjährigen Untersuchungen, mit dessen Ausarbeitung er beschäftigt ist, bald der Oeffentlichkeit übergebe. Er wird sich alle Mathematiker und Physiker zu besonderem Danke verpflichten.) S. 33. — Oeltzen: Argelander's Zonen-Beobachtungen vom 15. bis 31. Grade südlicher Declination in mittleren Positionen für 1850. 0. (Erste Abtheilung von $0^h$ bis $4^h$.) S. 151. — Pohl: Ueber den Gebrauch des Thermo-Hypsometers zu chemischen und physikalischen Untersuchungen. S. 229. — Ditscheiner: Ueber die graphische Kreismethode. (Für alle, die sich für Krystallographie interessiren, sehr lesenswerth). S. 279. — Böhm: Ueber Pendel mit Quecksilber-Compensation. (Für die genauere Berechnung solcher Pendel wichtig.) S. 345. — Spitzer: Integration verschiedener linearer Differentialgleichungen. S. 449. — Spitzer: Bemerkungen über Integration linearer Differentialgleichungen mit Coefficienten, die bezüglich der unabhängigen Variablen von der ersten Potenz sind. S. 479. (In diesen beiden ausführlichen Abhandlungen behandelt der Herr Verfasser, im Anschluss an seine oben angezeigte Abhandlung in Band XXV. S. 31, mehrere specielle Differentialgleichungen, die als vortreffliche Beispiele dienen können, und sehr verdienen, dass die Aufmerksamkeit auf diese und andere ähnliche Arbeiten des Herrn Verfassers, der ja allen Lesern des Archivs bekannt genug ist, hingelenkt werde.)

Jahrgang 1857. Band XXVII. Heft 1. Grailich und v. Lang: Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. S. 3. — Czermak: Ueber das Accomodationsphosphen. S. 78. — Oeltzen: Argelander's Zonen-Beobachtungen. Fortsetzung. Zweite Abtheilung von $5^h$ bis $7^h$. S. 81. — v. Lang, Handl und Murmann: Krystallographische Untersuchungen. S. 171. — Langer: Ueber incongruente Charnier-Gelenke. S. 182. — v. Baumgartner: Von den allgemeinen Eigenschaften der Kräfte in der unorganischen Natur und ihrer Bedeutung in der unorganischen Naturlehre. (Sehr lesenswerthe,

tief in das eigentliche Wesen der Kräfte eingehende und einführende Untersuchungen.) S. 203.

(Leider ist uns die Fortsetzung dieses Bandes noch nicht zugegangen und wird daher später angezeigt werden).

---

Von Band XXVIII. an haben diese so vieles Treffliche enthaltenden Sitzungsberichte eine andere sehr zweckmässige Einrichtung erhalten, so dass jeder Band aus 6 Heften besteht, von denen jedes auf eine besondere Sitzung der Akademie Bezug hat. Diese neue Einrichtung ist auch deshalb sehr zweckmässig, weil diese kleineren Hefte leichter und mit weit geringeren Kosten als die früheren grösseren Abtheilungen bezogen werden können, da jedes einzelne Heft nur 1 Gulden C. M. kostet, so dass also ein Jeder sich leicht in den Besitz einer einzelnen ihn besonders interessirenden Abhandlung setzen kann. Uebrigens kommen von den grösseren in den Sitzungsberichten und den Denkschriften enthaltenen Abhandlungen auch Separatabdrücke in den Buchhandel. Dieser neueren Einrichtung der Sitzungsberichte werden sich von jetzt an auch unsere Anzeigen derselben anschliessen.

---

Band XXVIII. 1858.

Nr. 1. Kudelka: Ueber Brücke's Lautsystem. S. 3. — Brücke: Nachschrift zu Professor J. Kudelka's Abhandlung, betitelt: „Ueber Herrn Dr. Brücke's Lautsystem" nebst einigen Beobachtungen über die Sprache bei Mangel des Gaumensegels. S. 63. (Wenngleich diese Abhandlungen weniger in den Kreis des Archivs gehören, so weisen wir doch namentlich Lehrer an Schulen auf dieselbe hin, für die sie vielfach lehrreich und interessant sein werden.) — Ditscheiner: Ueber die graphische Parabel-Methode (Krystallographisch, s. oben über die Kreis-Methode.) S. 93.

Nr. 2. Ditscheiner: Ueber die graphische Hyperbel-Methode (S. vorher.) S. 134.

Nr. 3. Reslhuber: Ueber das Wetterleuchten. S. 177. (Dieser ausgezeichnete Aufsatz ist im Archiv. Thl. XXXI. Heft 3. vollständig mitgetheilt worden.) S. 192. — Ditscheiner: Ueber die Zonenflächen. S. 201.

Nr. 4. Petzval: Ueber Herrn Spitzer's Abhandlung: Die Integration mehrerer Differential-Gleichungen betreffend, und die darin erhobenen Prioritäts-Ansprüche. S. 253. — Boué: Ueber

die Erdbeben im December 1857, dann im Jänner und Februar 1858. S. 321.

Nr. 5. Zantedeschi: Della lunghezza delle onde aeree, della loro velocità nelle canne a bocca, e dell' influenza che esercitano i varii elementi sulla loro tonalità. Memoria VII. S. 327. — Derselbe: Studio critico-sperimentale del metodo comunemente seguito dai fisici nella determinazione dei nodi e ventri delle colonne aeree vibranti entro canne a bocca. Memoria VIII. S. 341.

Nr. 6. Czermak: Ueber reine und nasalirte Vocale.

**Band XXIX. 1858.**

Nr. 7. Petzval: Bericht über eine Abhandlung des Dr. Anton Müller, Professor der Mathematik in Zürich. (Die Abhandlung führt den Titel: Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven und ist in zwei Abtheilungen getheilt: I. Die fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Gebilde überhaupt. II. Die Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven.) S. 40. — Spitzer: Neue Integrations-Methode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. (Diese verdienstliche Abhandlung beschäftigt sich mit der Auflösung der Gleichung

$$X_n f(x+n) + X_{n-1} f(x+n-1) + \ldots + X_1 f(x+1) + X_0 f(x) = 0,$$

in welcher $X_n$, $X_{n-1}, \ldots X_1$, $X_0$ ganze rationale algebraische Functionen von $x$ sind.) S. 53.

Nr. 8. Petzval: Ueber die Schwingungen gespannter Saiten. (In diesem interessanten Bericht über eine grössere, für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, zeigt der verdiente Herr Verfasser an, dass es ihm gelungen sei, das berühmte Problem von den Schwingungen gespannter Saiten in sehr einfacher Weise mittelst Zuhülfenahme von Formeln, welche Discontinuitäten darzustellen geeignet sind, zu lösen. Auf die, wie gesagt, für die Denkschriften angekündigte eigentliche Abhandlung sind wir sehr begierig.) S. 160. — Oeltzen: Argelander's Zonen-Beobachtungen. (Vierte Abtheilung von $12^h$ bis $15^h$.) S. 177.

Nr. 9. v. Baumgartner: Ein Fall ungleichzeitiger Wiederkehr des Sehvermögens für verschiedene Farben. (Eine interessante kurze Mittheilung.) S. 257. — v. Tschudi: Beobachtungen über Irrlichter. S. 269. — Grailich und Weiss: Ueber das Singen der Flammen. S. 271. — Friesach: Geographische und magnetische Beobachtungen in Nord- und Süd-Amerika, angestellt in den Jahren 1856 und 1857. S. 285.

Nr. 11 *). **Böhm**: Untersuchungen über das atmosphärische Ozon. S. 409. — **Schabus**: Krystallographische Untersuchungen. S. 441. — **Löwy**: Ueber die Bahn der Eugenia. S. 450. — **Oeltzen**: Argelander's Zonen-Beobachtungen. (Fortsetzung. Fünfte Abtheilung von $16^h$ bis $18^h$.) S. 459.

Nr. 12. **Haidinger**: Aus einem Schreiben des Herrn **Maury** in Washington an Herrn Dr. **Scherzer**. S. 529. — **Prestel**: Die geographische Verbreitung der Gewitter in Mittel-Europa im Jahre 1856, so wie über die gegenseitige Beziehung zwischen dem Auftreten der Gewitter, der Temperatur, der Windrichtung und dem Barometerstande. S. 533. — **Czermak**: Untersuchungen mit Garcia's Kehlkopfspiegel. S. 557. etc.

Band XXX. 1858.

Nr. 15. **Haidinger**: Drei Briefe von der k. k. Fregatte „Novara" von Singapore erhalten. S. 175. — **Hirsch**: Ueber die Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860. S. 200. — **Bauer**: Beitrag zur näheren Kenntniss der Ursache des Erhärtens der Mörtel beim Altern. S. 226.

**Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma.** 4⁰. (S. Literar. Ber. Nr. CXXIII. S 8.)

Nr. 5. (Settembre e Ottobre. 1858.) Proprietà dei centri conjugati principali e dei piani principali conjugati, dedotte dalla considerazione degli assi dei pennelli luminosi, ed applicazione di essi al calcolo degli stromenti ottici composti di più lenti delle cui grossezze si debba tener conto. Nota del Prof. O. F. **Mossotti**. p. 265. — Sulle linee del terz' ordine a doppià curvatura. Nota del Prof. **Luigi Cremona** (Continuazione e fine). p. 278. — La teorica dei covarianti, e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni. Monografia del Prof. **Francesco Brioschi**. p. 296. — Sulla risoluzione algebrica dell' equazioni del terzo e quarto grado. Studii del Prof. **Barnaba Tortolini**. p. 310.

**Rivista bibliografica.** Sopra le funzioni simmetriche delle

---

*) Wir bemerken hier ein für allemal, dass, wenn die Reihe der Nummern irgendwo unterbrochen ist, die fehlenden Nummern keine in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze enthalten.

radici di una equazione. Articolo del Prof. Enrico Betti. p. 323. — Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado: (appendice all' articolo V. No. 4. p. 256) articolo del Prof. F. Brioschi. p. 326. — Pubblicazioni recenti. p. 328.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. C. S. 7.).

Wir sind erst jetzt im Stande, die Fortsetzung dieser wichtigen Schriften einer der ersten und thätigsten Akademien der Wissenschaften anzuzeigen, weil uns die betreffenden Theile nach längerer Unterbrechung erst vor Kurzem zugegangen sind.

Tome XXII. IIme Partie. 1855. Sur un mémoire de M. Mahmoud, relatif au calendrier judaïque actuel. Rapport de M. Liagre. p. 3. Rapport de M. Quetelet. p. 8. — Sur la probabilité de l'existence d'une cause d'erreur régulière dans une série d'observations. Mémoire de M. Liagre. Rapport de M. Lamarle. p. 9. — Magnétisme terrestre. M. Quetelet communique quelque déterminations nouvelles du magnétisme terrestre, que M. Mahmoud a prises récemment à Bruxelles. p. 14. — Sur la probabilité d'une cause d'erreur régulière dans une série d'observations; par M. Liagre. p. 15. — Sur l'aérolithe tombé à St.-Denis-Westrem. Notice de M. Duprez. p. 54. — Sur l'aberration diurne en azimut et en hauteur; par M. Liagre. p. 87. — La cause de la scintillation ne dériverait-elle point de phénomènes de refraction et de dispersion par l'atmosphère? Mémoire de M. Montigny. Rapport de M. Plateau. p. 347. — Étoiles filantes périodiques du mois d'août. p. 357. — Intégration d'un système de cinq équations aux dérivées partielles, qui se présente dans la transformation de plusieurs problèmes de géométrie et de physique mathématique; par M. Ign. Carbonelle. p. 652.

Tome XXIII. Ire Partie. 1856. Recherches expérimentales sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur: 3me série; par M. Plateau. Rapport de M Maus. p. 4. — Sur une nouvelle méthode de conduire et de calculer les triangulations géodésiques. Mémoire de M. P. E. Biver. Rapport de M. Liagre. p. 88. — Note sur le théorème inverse de Bernoulli; par M. Meyer. Rapport de M. Brasseur. p. 97. — Mémoire sur une nouvelle méthode de conduire et de calculer les triangulations géodésiques; par M. P. E. Biver. p. 99. — Note sur le théorème inverse de Bernoulli; par A. Meyer. p. 148. — Horloge électrique de M. Goetmakers. Rapport de M. A. De Vaux.

p. 255. — Note sur la phosphorescence de la neige, observée le 5 décembre 1855; par M. M. Ghaye. p. 256. — Sur la scintillation des étoiles. (Lettre à M. A. Quetelet par M. Ch. Dufour.) p. 347. — Note contenant une démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli; par M. A. Meyer. Rapport de M. Brasseur. p. 349. — Inclinaison et déclinaison de l'aiguille aimantée; par M. Ernest Quetelet. p. 350. — Note sur les limites que, dans l'état actuelle de nos connaissances, on peut assigner à la rotation d'Uranus; par M. Houzeau. p. 351. — Sur la scintillation des étoiles. Lettre à M. Quetelet par M. Dufour. p. 366. — Rapport sur un travail de M. Montigny intitulé: Additions au mémoire sur la scintillation; par M. Plateau. p. 731. — Sur un mémoire de M. Meyer. Rapport de M. J. B. Brasseur. p. 734. — Sur les théories récentes de la constitution des veines liquides lancées par les orifices circulaires, par J. Plateau. p. 737.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

Fig. 9

2.

b

E

B

c

Fig. 7.

H

F

C

D

Fig. 11.

α

Fig. 2.